試行錯誤で「三平方の定理」を考える

一関工業高等専門学校

梅野 善雄 *

1 はじめに

数学は，論理的思考の積み重ねにより作り上げられている。いろいろな定理の証明は，理路整然とした論理で構成されているが，その証明の論理は必ずしも最初から備わっていたわけではない。いろいろな試行錯誤の中から得られた結論としてのものであることも多い。また，証明を考える以前に，まず「定理」となりうる数学的事実を見出すことが先決であり，それを見出す過程においては，かなりの試行錯誤を伴うものである。

したがって，数学教育でも試行錯誤を伴う課題を中り入れることが望ましいと思われるが，そのような試行錯誤を行うには，いろいろな数・式の計算，方程式・不等式などの解法，さらには，いろいろな関数のグラフをイメージできることなど，数学の基礎が十分備わっていることが必要になってくる。そのため，数学の成績が低迷している学生に，このような課題を課すことは難しくなってくる。

しかし，その基礎的な部分にテクノロジーによる数式処理機能を補助的に活用させることにより，成績が下位にある者にも数学上の試行錯誤を行わさせることが可能である。以下では，平成 16 年度の一関高専 1 年生に，テクノロジーとして数式処理のできるグラフ電卓 (TI–89) を利用させて，三平方の定理について考察させたときの結果を報告する。

2 数式処理電卓と自由研究

2.1 授業内容と数式処理電卓の貸与

平成 16 年度，著者は 1 年生 (167 名) の基礎数学 I (3 単位) を担当した。本校では，数式処理のできるグラフ電卓 (TI–89) を 1 学年分購入している。いろいろな計算の答え合わせや，関数のグラフ表示などの確認のために利用されることを期待して，著者の授業ではこの電卓を貸与している。平成 16 年度の貸与時期は 7 月中旬である。貸与直後に，基本的な使用方法と代数機能・グラフ機能の使い方を説明した。以後，学生は計算の答え合わせやグラフの確認等で利用した。

担当科目の授業内容を次頁の通りである。その内容から授業中に積極的に活用させる場面は少なかったが，この電卓のグラフ機能や数式処理機能を利用すると学生に数学上の試行錯誤を行わさせることができる。そこで，夏季休業，10 月下旬，冬季休業の計 3 回にわたり，数学上の試行錯誤を伴いながら何らかの数学的な規則性を見出させる課題を与えた。課題

*E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp [URL] http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

は複数題を与え，その中から自分で選択させるようにした。考察期間は約 1ヶ月，提出率は 88%～95%である。

基礎数学 I の授業内容

数と式の計算

整式の計算：整式の加減，乗法，因数分解，整式の除法，剰余の定理と因数定理

いろいろな数と式：分数式の計算，実数，絶対値，平方根の計算，複素数の計算

方程式と不等式

方程式：2 次方程式，解と係数の関係，分数・無理方程式，恒等式，等式の証明

不等式：不等式の性質，1 次不等式，2 次不等式，連立不等式，高次不等式，不等式の証明，集合，命題

図形と式

点と直線：2 点間の距離と内分点，直線の方程式，2 直線の関係

2 次曲線：円，楕円，双曲線，放物線，2 次曲線の接線，不等式と領域

2.2　自由研究の内容 (冬季課題)

冬季休業中には，通常の練習問題の他に自由研究の課題も課した。いわゆるオープンエンドの問題である [1)]。しかし，通常の演習問題と自由研究の締切を同一日に設定すると，学生側の心理としては円周問題を解いたことで安心してしまい，自由研究の方がおろそかになるようである。そこで，自由研究については，その締切日を 2 週間ずらして設定した。

学生に提示した課題は，以下の内容である。

(1) 三平方の定理「$a^2 + b^2 = c^2$」を成立させる自然数 a, b, c に関する考察
(2) 自然数 n, a について，$x^n + a$ が因数分解できるための n, a の条件に関する考察
(3) 関数 $y = (x - a)(x - b)(x - c)$ のグラフと定数 a, b, c との関係に関する考察
(4) 各自が設定した独自の問題に関する考察

数学の通常の問題は,「計算せよ」「解け」「証明せよ」というタイプが多い。この課題のように，数学に関することで「～について考察せよ」と言われても，学生は何をしてよいのか戸惑うと思われた。規則性に気づくことのできない学生でもまとめることができるように，次のような解説をした。

> まとめ方は自由です。数ナビにどのようなことをやらせたらどのような結果が表示されたか。いろいろやっているうちにどのようなことが予想されてきたか。その予想を確かめようとして，どのようなことをしたか。その予想が正しいことを，どのような理由で確信したか。あるいは，その予想が誤りであることを，どのようにして分かったか。あるいは，どのようなことが原因で，その予想の真偽を確かめることができなかったか。などなど，各自の思考の経過をま

とめればよいのです。予想が正しいと確信できるときは，その証明も考えてみてください。また，いろいろやってみたが，規則性は分からなかった，というときは，どのようなことをやってみたのか，そのやった内容を書いてください。

この課題の提出率は91%であった。各課題を選択した学生は，それぞれ，(1) 94名，(2) 42名，(3) 14名，そして (4) 2名である。(1) は「三平方の定理」という，すでに既知の定理に関することなので，学生は取り組みやすいと感じたのであろう，半数強 (56%) が (1) の課題を選択した。

独自に問題を設定して考えてきた2名の内容は,「角の3等分の作図問題に関する考察」と「a と $\sqrt{a}$ との関係に関する考察」である。前者の学生は,「作図不能と聞いていたが，できそうに思ったので考えてみた」と書いているが，当然ながら作図はできていない。後者の学生は,「この2つの数がどのような関係になっているのか，以前から気になっていた」とのことであった。しかし，いろいろな値を試しているうちに,「単に2乗すればよく，極めて簡単なことであった」と自分で気づいている。

3　「三平方の定理」に関する学生の発見

冬季休業の課題で，167名中94名の学生が「三平方の定理」に関する課題を選択した。この課題を学生に課したときの解説は，以下のような内容である。

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として，$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ が良く知られています。このような自然数は，他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように，連続する3つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように，3つのうち2つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは，他にあるでしょうか。つまり，$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では，$a^2=c^2-b^2$ も成立しています。そして，そのような自然数 a, b, c は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。数ナビの操作ばかりではなく，ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

次頁に，三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ $(a<b<c)$ が成立する具体例を幾つかあげておく。学生は，まずこのような具体例を書き出して，それを元に，どのような規則性があるかを考えている。

表1は，学生から指摘されてきた事項を指摘の多い順にまとめたものである。いろいろ考えてみる中で，三平方の定理に対する認識を深めてもらいたいという意図で出した課題であり，単純な指摘だけしか予想していなかったが，提出されたレポートを見ると，そのまとめ方は千差万別である。友人のレポートを写したと思われるものは数えるほどしかなく，自分なりに精一杯考えて書いていることが感じらる内容ばかりあった。三平方の定理に関して一般的に知られている式の指摘のみならず，学生からの指摘で著者が始めて知る性質もあった。

a, b, c が連続するとき： $3^2+4^2=5^2$

a, b が連続するとき：

$$3^2+4^2=5^2$$
$$20^2+21^2=29^2$$
$$119^2+120^2=169^2$$
$$696^2+697^2=985^2$$
$$4059^2+4060^2=5741^2$$

b, c が連続するとき

$$3^2+4^2=5^2$$
$$5^2+12^2=13^2$$
$$7^2+24^2=25^2$$
$$9^2+40^2=41^2$$
$$11^2+60^2=61^2$$
$$13^2+84^2=85^2$$
$$15^2+112^2=113^2$$

連続しないとき

$$6^2+8^2=10^2$$
$$8^2+15^2=17^2$$
$$10^2+24^2=26^2$$
$$12^2+35^2=37^2$$
$$14^2+48^2=50^2$$

4　学生の行った「試行錯誤」

4.1　平方数の 1 の位に着目した学生

S 君は，数 x を 1 ずつ増やすとき，その平方数 x^2 を $x=53$ のときまで求め，それらの 1 の位の数の変化に着目する。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
差	1	3	5	-3	-1	1	3	-5	-3	-1
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
差	1	3	5	-3	-1	1	3	-5	-3	-1

S 君は，まず，連続する数の平方数を計算して，その 1 の位に注目する。そして，1 の位の数は $0-1-4-9-6-5-6-9-4-1-0$ が繰り返されていること，それは 5 を中心に対

表１：三平方の定理に関する学生の発見

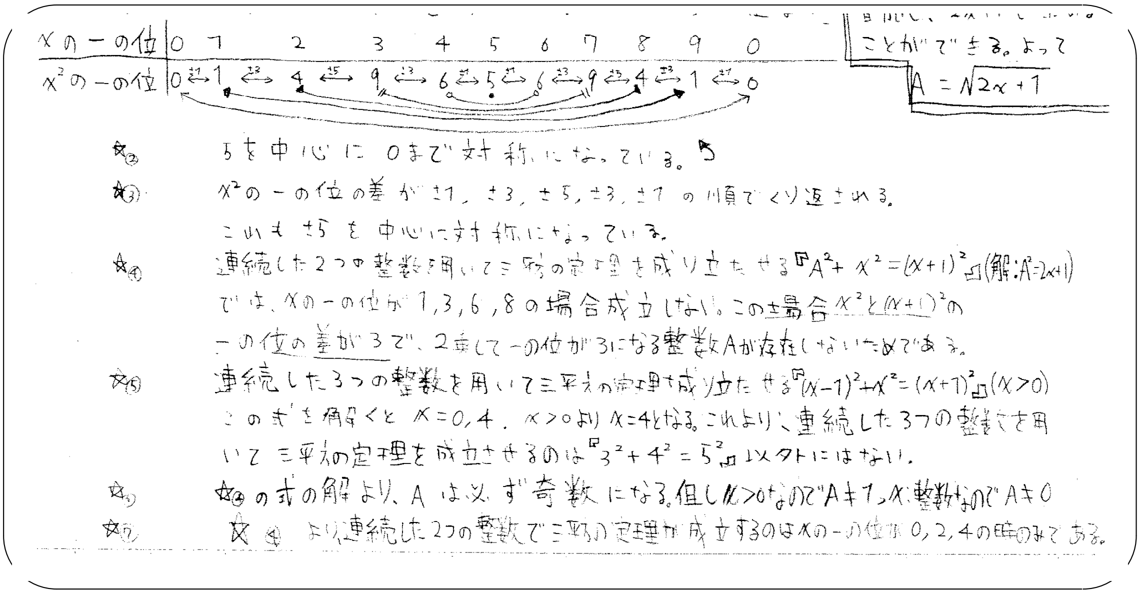
No	三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ に関する学生の発見	数
(1)	$a^2+b^2=c^2$ が成立すれば，$(na)^2+(nb)^2=(nc)^2$ も成立する	48
(2)	a,b,c が連続するのは，$a=3,\ b=4,\ c=5$ のときしかない	44
(3)	b,c が連続するとき，a は奇数である	32
(4)	b,c が連続するとき，それらは 4 の倍数ずつ増えていく	26
(5)	b,c が連続するとき，$a^2=b+c$ である	20
(6)	b,c が連続するとき，a,b,c のうちの 2 つの数は奇数である	14
(7)	b,c が連続するのは，奇数 a に対して $b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$ のときである	8
(8)	b,c が連続するのは，a^2 を 2 で割った商を b とすればよい	5
(9)	連続する 2 数の平方の差は奇数である	3
(10)	b,c が連続する場合として，次の場合がある。 $(2n+1)^2+(2(n^2+n))^2=(2(n^2+n)+1)^2$	3
(11)	a,b が奇数のとき，$a^2+b^2=c^2$ は成立しない	3
(12)	a,b が連続するとき，$c^2=2ab+1$ である	2
(13)	b,c が連続するとき，次のことが成立する。 $(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+\cdots+1))^2=(4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$	1
(14)	b,c が連続するとき，$(a-3)/2+1=n$ とおくと，$b=$ (前の式の b) $+4n$	1
(15)	b,c が連続するとき，$3^2+4^2=5^2$ から数えて k 段目の式の b は，$b=ak+k$ である。たとえば $a=9$ は 4 段目なので $b=9\times4+4=40$	1
(16)	b,c が連続するとき，b は $a+1$ を 2 で何回割れたかを掛けた値である。たとえば，$17/2=8.5$ なので，$b=(17+1)\times8=144$ より，$17^2+144^2=145^2$ である	1
(17)	$a^2+b^2=(b+1)^2$ に対して，その次の式を $(a+2)^2+B^2=(B+1)^2$ とすると，$B=((a+2)^2-a^2)/2$ である。	1
(18)	a_n,b_n が連続するとき，$a_{n+1}=6a_n-(a_{n-2}-2)$ である。	1
(19)	$3^2+4^2=5^2$ が成立するので，$333^2+444^2=555^2$ や $3333^2+4444^2=5555^2$ なども成立する	1
(20)	どんなときでも，$a^2+1^2=b^2\ (a\fallingdotseq 0)$ は成立しない	1
(21)	a,b,c の中には，一定量ずつ増えているものがある。$6^2+8^2=10^2$ は 2 ずつ増えている。12 ずつ増えるのは，$a^2+(a+12)^2=(a+24)^2$ を解いて $a=36$ である	1
(22)	b,c が連続するとき，$a+b+c$ の第 2 階差は 8 である	1
(23)	b,c が連続するとき，$a>3$ であれば $b>2a$ である	1
(24)	b の 1 の位の数が 1,3,6,8 のとき，b,c が連続するようにはできない	1
(25)	b,c が連続するのは，b の 1 の位の数が 0,2,4 のときだけである	1
(26)	$3a=b+c$ のとき，$a:b:c=3:4:5$ である	1
(27)	$3a=b+c,\ 4a=b+c,\ 5a=b+c$ となるものが存在するので，$na=b+c$ となるものが存在するはずである	1
(28)	$a+b-c$ は 2 の倍数である	1
(29)	b,c が連続するとき，abc は 60 の倍数である	1
(30)	連続する 2 数の平方の和の差は，4 の倍数である	1
(31)	a,b が連続するものより，b,c が連続するものの方が多い。	1
	(以下，省略する)	

称になっていることに気づく。次に，その 1 の位の数の差をとると $\pm1-\pm3-\pm5-\pm3-\pm1$ が繰り返され，やはり 5 を中心に対称になっていることに気づく。

そして，平方数の 1 の位の差は $\pm1, \pm3, \pm5$ だけであることから，$A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x は，x の 1 の位の数が 1,3,6,8 のときは存在しないと結論づける。その理由は,「このとき x^2 と $(x+1)^2$ の 1 の位の差は 3 となり，平方して 1 の位が 3 になる整数は存在しないためである」としている。1 の位の実際の差は ±3 であるので，$(x+1)^2-x^2$ の 1 の位の数は 3 か 7 である。平方数の 1 の位が 3 か 7 になることはないので,「x の 1 の位が 1,3,6,8 のときは存在しない」という S 君の結論は正しい。

S 君は，さらに，$A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x について,「x の 1 位の数は 0,2,4 のときに限られる」と結論づける。その理由には触れられていないが，このような x は偶数であることに気づいた上で，x の 1 の位は 6 と 8 を取り得ないことからの結論と思われる。

S 君は，感想として,「久しぶりに頭がフル回転し，全く苦になりませんでした。考えがどんどん発展していって，とても楽しかったです。」と書いている。かなり細かい考察が必要であり，そこから何らかの規則性を見出していく過程には大きな喜びがあったと思われる。



4.2　連続する奇数の平方の差に着目した学生

K 君は，b, c が連続する場合を調べるために，n^2 の値を $n=1$ から $n=59$ のときまで書き出す。そして，その差が平方数になっている場合を探すことにより，三平方の定理が成立

する式として，次の式を見出す。

$$3^2+4^2=5^2$$
$$5^2+12^2=13^2$$
$$7^2+24^2=25^2$$
$$9^2+40^2=41^2$$
$$\vdots$$
$$31^2+480^2=481^2$$

そして，これらの式から「連続しない数は 2 ずつ増え，すべて奇数である」「連続する数は 4 の倍数ずつ増えていく」「3 つが連続するものは $3^2+4^2=5^2$ しかない」ことに気づく。そして，連続しない a の値から連続する b,c の求め方として，次の方法を考案している。

それは,「$3^2+4^2=5^2$ と $5^2+b^2=c^2$ において，b は $(5^2-3^2)\div 2=8$ を 4 に加えた値である」というものである。そして,「以下，これを繰り返せばよい」と述べている。

実際，$a=2n+1$ のとき $b=(a^2-1)/2=2n^2+2n$ であり，その次の $a=2n+3$ のときの b は $b=2n^2+6n+4$ となるが，K 君の方法では，$a=2n+3$ のときの b は，

$$\left\{(2n+3)^2-(2n+1)^2\right\}\div 2=4n+4$$

であるので，$b=(2n^2+2n)+(4n+4)=2n^2+6n+4$ として求められることになる。年度末の感想で K 君は,「自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった」と書いている。

4.3 連続する $\boldsymbol{b,c}$ の求め方を発見した学生

M 君は，b,c が連続する場合を多数書き出した上で，a,c は奇数，b は偶数であることに気づく。さらに，奇数 a の 2 乗をほぼ半分に分けて，小さい方を b，大きい方を c とすればよいことに気づいている。たとえば，$7^2+24^2=25^2$ において，$7^2=49$ をほぼ半分に分けると 24 と 25 であるので，$b=24,\ c=25$ であることを指摘した上で，もっと大きな数で確認するため，$a=1001$ の場合を試している。$a^2=1001^2=1002001$ をほぼ半分に分けると，501000 と 501001 であるので，$c^2-b^2=a^2$ が成立することを $5001001^2-5001000^2=1001^2$ により確認している。

4.4 連続する $\boldsymbol{b,c}$ と $\boldsymbol{a}$ との関係に着目した学生

S さんは，b,c が連続する場合として，よく知られている $3^2+4^2=5^2$ と $5^2+12^2=13^2$ を書き出し，これらの間に何かの規則性がないかどうかを考える。そして，この 2 つの式だ

けをもとに，次の関係を見い出した。

$$
\begin{aligned}
3^2+(4\times 1)^2 &= \{(4\times 1)+1\}^2 \qquad (4=3+1)\\
5^2+(6\times 2)^2 &= \{(6\times 2)+1\}^2 \qquad (6=5+1)\\
7^2+(8\times 3)^2 &= \{(8\times 3)+1\}^2 \qquad (8=7+1)\\
&\vdots\\
15^2+(16\times 7)^2 &= \{(16\times 7)+1\}^2 \qquad (16=15+1)
\end{aligned}
$$

S さんは，この仕組を，$a^2+b^2=c^2$ の a,b,c を使って，次のように記述している。

- a は必ず奇数で，$a \geqq 3$ である
- b は a を 2 で何回割れたかという回数を $a+1$ に掛けた数である
- $c=b+1$ である

そして，$a=17$ の場合は，$(17+1)\times 8=144$ であることより，$17^2+144^2=145^2$ が成立することを確認した上で，次のような感想を記している。

> まず，$3^2+4^2=5^2$ のような形の式を見つけるために，ひたすら書き出しました。10, 11, 12 の式まで書き出したときに，10^2 と 11^2 を足しても 12^2 とは全く違う数になることに気がつき，$3^2+4^2=5^2$ のような式はそんなに多くはないことを確信しました。すると，$3^2+4^2=5^2$ だけだったので，驚きました！
>
> 次に $3^2+4^2=5^2$ と $5^2+12^2=13^2$ を照らし合わせて，何か規則性はないかといろいろ試しているうちに，上のようなことが分かりました。$5^2+12^2=13^2$ のような式が他にもたくさんあったことには，また驚きました！

4.5　a,b が連続するときの規則性を発見した学生

A 君は，a,b が連続する場合を考察して，次の式を見い出した。

$$
\begin{gathered}
3^2+4^2=5^2\\
20^2+21^2=29^2\\
119^2+120^2=169^2\\
696^2+697^2=985^2\\
4059^2+4060^2=5741^2
\end{gathered}
$$

そして，n 段目の式を $a_n^2+b_n^2=c_n^2$ とするとき，内容的に

$$
a_n=6\times a_{n-1}-(a_{n-2}-2), \quad c_n=6\times c_{n-1}-c_{n-2}
$$

という規則性があることを発見している。

一般に，$a, a+1, b$ が三平方の定理を満たせば，

$$
3a+2b+1,\ \ 3a+2b+2,\quad 4a+3b+2
$$

も三平方の定理を満たすことが知られている[2)]。これらの値の次の値を $A, A+1, B$ とすると，

$$A = 3(3a+2b+1)+2(4a+3b+2)+1 = 17a+12b+8$$
$$B = 3(3a+2b+1)+2(4a+3b+2)+2 = 24a+17b+12$$

となる。A 君の計算方法では

$$A = 6(3a+2b+1)-(a-2) = 17a+12b+8$$
$$B = 6(4a+3b+2)-b = 24a+17b+12$$

となるので，この結果は正しい。A 君は，他にも次のことを見い出している。

(1) $x^2+y^2=z^2$ が成立すれば，$(nx)^2+(ny)^2=(nz)^2$ も成立する。

(2) 3 数が連続するのは，$3^2+4^2=5^2$ だけである。(証明あり)

(3) b, c が連続するとき，a は奇数であり，c は 4 の倍数ずつ増える。

A 君は，提出したレポートの最後の方で「三平方の定理について，殆どのことが理解できたような気がしました」と書いている。

4.6　a, b, c が連続的でないときを考察した学生

I 君は，a, b, c が連続的でない場合として，次の式を見い出している。

$$6^2+8^2=10^2$$
$$8^2+15^2=17^2$$
$$10^2+24^2=26^2$$
$$12^2+35^2=37^2$$
$$14^2+48^2=50^2$$
$$16^2+63^2=65^2$$

そして，これらの関係から，$c=b+2$ であることや，$a^2 \div 2 = b+c$ であることを見抜き，$2(b+c)+b^2=c^2$ としている。

4.7　文字式の計算で考察した学生

T 君は，いろいろな性質を a, b, c という文字式の計算から導いている。

(1) b, c が連続する場合について

b, c が連続すれば $c=b+1$ であるので，$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)=c+b$ である。

(2) b, c が連続する場合の a について

a^2 が偶数 $(2x, x$ は整数$)$ のとき，$a^2=(2x)^2=2(2x^2)$ は偶数になるので，a が偶数のときは b, c が連続するようにはできない。$a^2=b+c=2b+1$ であるので，a^2 は奇数である。

(3) a から連続する b, c の求め方について

b, c が連続するとき a^2 は奇数なので，$a^2 \div 2 =$ ある整数 $n+1$ となる。このとき，$b=n, c=n+1$ とすればよい。

このレポートの作成には 1 日かかったようである。次のような感想を書いている。

> 普段，さりげなく使っていた三平方の定理を新めて考えることによって，今まで気付かなかった法則に気付いた。とてもおもしろかったし，他にも何か法則があるのか調べてみたいと思った。

4.8　a, b, c の間のおもしろい関係を見い出した学生

H 君は，$y^2 = a^2 + x^2$ より $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ であることから，a の値を 1 から少しずつ増やしていくことにより，b, c が連続する場合の式を幾つか発見した。そして，その過程において，3 つの数が連続するのは，$a^2 + (a+1)^2 = (a+2)^2$ のときであり，これを解くと $a = 3,\ -1$ となるので，3 つの数が連続するのは $3^2 + 4^2 = 5^2$ しかないことを証明している。さらに，2 つの数が連続するのは，$a^2 + b^2 = (b+1)^2$ のときであることから，$a^2 = 2b + 1$ となるので，

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{a^2 - 1}{2} + 1$$

を導いている。そして，$3^2 + 4^2 = 5^2$ であることから，$333^2 + 444^2 = 555^2$ や $3333^2 + 4444^2 = 5555^2$ も成立することを述べ，さらに，

$$3333^2 = 5555^2 - 4444^2 = (5555 + 4444)(5555 - 4444) = 9999 \cdot 1111$$
$$4444^2 = 5555^2 - 3333^2 = (5555 + 3333)(5555 - 3333) = 8888 \cdot 2222$$

であり，右辺の 2 数の和は，いずれも 11110 となって一致することを見い出している。

4.9　$a^2 + b^2 = c^2$ の n 倍の式を延々と書き出している学生

N さんは，$3^2 + 4^2 = 5^2$ について，$3, 4, 5$ を次々に 2 倍していって，

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$6^2 + 8^2 = 10^2$$
$$12^2 + 16^2 = 20^2$$
$$24^2 + 32^2 = 40^2$$

が成立することを確認する。そして，同様のことが 2 倍だけではなく，$3, 4, \cdots, 10$ 倍でも成立することをレポート用紙に 5 枚にわたり書き出して確認している。その後，n 倍ではなく n 乗するとどうなるかを確認しようとするが，2 乗した $9^2 + 16^2 = 25^2$ が成立しないこで，そのような場合は成立しないことを確認している。

教師側から見ると単純な部分しか見つけられなかったといえるが，この学生にとっては，確認のたびに「2 倍しても成立する」「3 倍でも成立する」という「わくわく」感があったのではないかと思われる。

4.10　a, b, c の和や積を考えた学生

三平方の定理を成立させる a, b, c について，それらの和や積を考えた学生もいる。

HS 君は，b, c が連続する場合について考察した後で,「そのような a, b, c は，60 の倍数になっているようだ」と書いている。実際，$a = 2n+1$ のとき，$b = 2n(n+1)$, $c = 2n^2+2n+1$ なので，

$$abc = 2n(n+1)(2n+1)\{2n(n+1)+1\}$$

となり，abc は 60 の倍数である。

N 君は，b, c が連続する a, b, c について，それらの和 $a+b+c$ を計算する。それらの第 2 階差を求めると，すべて 8 になり一定であることを見い出している。実際，

$$A_n = a_n + b_n + c_n = (2n+1) + 2n(n+1) + (2n^2+2n+1) = 4n^2 + 6n + 2$$

とすると，$B_n = A_n - A_{n-1} = 8n+2$ なので，第 2 階差は 8 である。また，N 君は「$a+b-c$ は偶数である」とも述べている。実際，

$$a_n + b_n - c_n = (2n+1) + 2n(n+1) - (2n^2+2n+1) = 2n$$

である。なお，この値は a, b, c を 3 辺とする直角三角形の内接円の直径であることが容易に分かる。

5 試行錯誤を行った学生の感想

平成 16 年度の 1 年生には，**2** 節で述べたような形で「自由研究」と題する課題を 3 回ほど課した。年度末の最後の授業で学生にその感想を自由記述式で書いてもらうと，167 名中 142 名から回答があった。その内容を大別すると，以下のように分類される。

(1)	「楽しかった」「おもしろかった」	51 名 (35.9%)
(2)	「勉強になった」「理解が深まった」	22 名 (15.5%)
(3)	「大変だったけど・難しかったけど・面倒だったけど，おもしろかった・勉強になった・楽しかった」	33 名 (23.2%)
(4)	「分からなかった」「難しかった」	27 名 (19.0%)
(5)	「その他の内容」	9 名 (6.3%)

繰り返しになるが，学生に課したのは，数式処理のできるグラフ電卓を利用した試行錯誤を通して,「数学的な性質について考察せよ」という課題である。この種のタイプの課題を与えて,「おもしろかった」「楽しかった」という感想が (1)〜(3) を併せると 70%以上も寄せられたことには，むしろ著者の方が驚かされた。学生の感想をみると,「いろいろやってみて何かに気づいたとき」に大きな喜びを感じたようである。たとえば，以下のような感想が記されている。

- 今までは規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった。

- 自由研究をやってきて，自分でも数学に対する考え方が変わったのが良く分かった。自由研究は，自分で新しい法則 etc が発見できるので，楽しかったです。
- 今までは，ただ計算し，理解せずに書いていたが，自由研究によって理解しながら解けるようになった。
- 自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった。
- 始めは面倒だと思っていても，いざ始めると没頭してしまった。
- 面倒な気もしていたけど，どういった仕組でこうなるというのが分かってくると，興味や関心が少し強くなってきたので，数学の内容を深く知ることができたと思った。
- 自由研究は，出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った。来年もやりたい。
- 自由研究をやって，今まで考えなかった考え方をするようになった。
- 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見することができるようになったと思う。
- 普通の数学の授業とは違った，数学の楽しい部分があることを知った。

このような感想が目白押しで続くと，読んでいる著者の方が感動してしまった程であった。学生によっては,「数学に対する見方が変わった」とする者もおり,「考える」ということに対して，かなりのインパクトを与えたように思われる。

この自由研究に対する感想は，数学の成績とは関連しているのだろうか。「(4) 分からなかった・難しかった」という学生も 20%弱いる。それが成績下位の学生に集中している場合，自由研究なるものを課すことは，成績下位の学生にとっては苦痛でしかないであろう。

そこで，著者の科目の定期試験 (4 回) の平均点をもとに，全体を 4 つに区分して，この感想との関連性をみてみた。

表 2： 成績区分と自由研究に対する感想

	自由研究に関する感想					
成績	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
上位	17	6	9	5	3	40
中上	12	7	9	10	1	39
中下	11	6	5	5	4	31
下位	11	3	10	7	1	32
計	51	22	33	27	9	142
%	35.9	15.5	23.2	19.0	6.3	100

表 2 をみると，成績下位の学生は，さすがに「(3) 大変だったけど・難しかったけど $\cdots$」という感想が他の区分と比べると多いが，それでも結果的には「おもしろかった・楽しかった・勉強になった」という感想になっている。「(5) 難しかった」という感想はどの成績区分

にも存在し，成績下位の学生が突出しているわけではない。この感想は，成績とは全く関連していないことが分かる。

6 自由研究の意義・まとめ

この自由研究は，授業外の時間で考察させている。グラフ電卓を貸与しているとはいえ，著者の授業は黒板を利用した平均的な数学の授業である。著者が学生に対して行ったことは，自由研究の内容を書いたプリントを配布し,「今度は，これをやってきてください」と指示しただけである。つまり，単に問題を提示しただけである。プリント配布時に多少の説明は加えているが，それ以降は特に何の説明も加えていない。学生は，配布されたプリントの解説だけを頼りにして自分なりに考え，レポートにまとめて提出してきた。いろいろ考える中で何かの発見があると，学生はそれによる喜びを感じ，それがさらなる思考を後押ししたのではないかと思われる。

ただし，提出されたレポートは一人ずつチェックして，誰がどのようなことに気づいたか等をプリントにまとめ，事後に１時間かけて学生に解説した。問題提示の負担は少ないが，提出されたレポートをまとめる作業はかなりの負担がある。しかし，提出されたレポートをそのままにしていては,「次の自由研究をやってもらえなくなる」という思いが，逆に教師を奮い立たせたともいえる。

このような自由研究の意義としては，まず，数学の１つの問題を長時間考え抜く体験をさせることができることが上げられよう。しかも，時間をかけて考えた結果，多くの学生に数学的な事柄を発見する喜びを成績の上下によらずに感じさせることができた。それは，考えさせた問題が，ちょっと考えると誰でも何かに気づく部分を含んでいたためと思われる。中には，そのような部分に気付いたことで終わることなく，さらに独自の視点で問題設定をして教師側が予想もしない内容に踏み込む学生も現れている。

このことは，学生に与える問題内容を吟味することで，数学に関する発見の喜びを，教師側が意図的に学生に感じさせることができることを示唆しているように思われる。しかも，この効果を得るために，通常の授業体系を大きく変更する必要はないことも特筆されるべきであろう。教師は，単に問題を提示するだけである。

また，成績下位の学生でも何らかの発見ができたのは，課題の内容に関する部分に加えて，数学的な試行錯誤に数式処理電卓を利用できたことも大きく寄与しているように思われる。このツール無くしては，このような結果は得られなかったであろう。三平方の定理は単なる四則計算のできる電卓でも十分に考察可能と思われるが，グラフ電卓を利用することで入力した式の履歴が残り，さらに考えやすかったのではないかと思われる。

対象とした学生は高専１年生ということもあり，自分の発見したことの証明まで考察できた学生は少ない。しかし，まず数学的なことについて何かを発見する体験をさせ，それにより通常の問題解法では得られない喜びを感じさせることができたことだけでも，この自由研究の役割には十分なものがあるように感じられる。

一方，教師側にとっては，問題を提示することは容易でも，提出されたレポートの点検作業の大きさには，かなりの負担感がある。さらに，提出された多様なレポートの評価をどうするかということも問題として残る。しかしながら，事後の学生の感想を見ても分かるように，このような自由研究を課すことで得られる教育効果には，他では得られない計り知れないものがあるように感じられる。今後は，この効果について，さらに様々な角度から検討を加えていきたい。

参考文献

[1] 島田茂編：新訂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」，東洋館出版，平成 7 年
[2] B. シェルピンスキー：ピタゴラスの三角形，東京図書，p.21，1993 年