論文

数式処理電卓の応数・応物での利用例案と予想される教育効果

How Should We Use Algebraic Calculators in Applied Mathematics & Applied Physics, and How Effective Are They in Engineering Education

梅野善雄
Yoshio UMENO

最近のグラフ電卓の中には，高度の数式処理機能を持つものがある．その数式処理能力は高く，高専や工学部での利用に十分耐えられるものがある．ここでは，この電卓を応数や応物で利用する場合の具体例を紹介すると共に，それを工学教育で活用した場合に予想される教育効果について述べる．この電卓を活用すれば，理解力のある学生は相当高度のところまで自力で到達する可能性がある．また，理解力の乏しい学生においては，その理解を補うツールとして利用できる．工学では数学を欠かすことはできないので，工学教育で活用すれば相当の効果が期待される．

キーワード：数式処理電卓，応用数学，応用物理，工学教育

The latest graphing calculators possess the feature of computer algebra system, which is available in colleges of technology or engineering departments of universities. We will introduce some concrete examples of the use of an algebraic calculator in applied mathematics and applied physics, and then state its effectiveness in egineering education.

If excellent students learn engineering subjects with these calculators, each of them can deepen their understanding of engineering. On the other hand, these calculators will be very helpful for students with poor marks to understand engineering subjects. We can expect that the use of algebraic calculators for engineering education is considerably effective, for mathematics is indispensable for engineering.

Keywords : Algebraic calculators, Applied mathematics, Applied physics, Engineering Education

1．はじめに

最近のグラフ電卓には数式処理機能を持つものがある．その数式処理機能はかなり高度であり，数式処理ソフトの国際コンペでMathematicaと並んで同一首位になったこともある[1]．工学におけるMathematicaの有用性を考えると，類似の機能が電卓の大きさに納められたことの意義は大きい[2]．たとえば，高専の数学の授業で長期利用した場合の効果については，文献[3]を参照されたい．

以下では，数式処理電卓の応用数学や応用物理での利用例を紹介し，工学教育で利用した場合に予想されるであろう教育効果について述べたい．工学の専門科目では数学が駆使されるので，高専や工学部では積極的に活用されるべきツールと思われる．

2．数式処理電卓の機能

数式処理電卓として，TI-89（テキサスインスツルメント社）を例にとる．市販されている多機能関数電卓と同程度の大きさであるが，以下のような機能を持つ．パソコン用の数式処理ソフトとして実績のあるDeriveが組み込まれ，CPUにはMotorola社の68000（10MHz）が使用されている．詳細は販売代理店のHPを参照されたい[4]．

代数機能　文字式の計算／分数式の計算／複素数の計算／方程式の解法（高次，連立，非線形）／行列・行列式の計算／固有値・固有ベクトルの計算／単位の付いた計算／2進数・16進数の計算等

解析機能　微分・積分の計算／偏微分・多重積分の計算／極限値の計算（片側極限や無限大も可）／和Σの計算／関数の級数展開／最大値・最小値／接線の方程式／変曲点／微分方程式の解法（解析解，ベクトル場の表示）等

グラフ機能　関数のグラフ表示（$y=f(x)$），媒介変数

表示 $x=f(t)$，$y=g(t)$，極座標 $r=f(\theta)$，2変数関数 $z=f(x,\ y)$，陰関数 $f(x,\ y)=0$）／グラフの拡大・縮小／グラフ上から面積・長さの計算／グラフ上の点の座標（$x,\ y$）を表に変換等

統計・テーブル機能　表計算機能（99列999行）／セル内で数式処理が可能／散布図・箱ひげ図などの描画／各種の統計回帰（10種類）等

その他　プログラミング（通常の構造化言語と類似，数式処理機能を利用可能）／センサーを通した実データの収集／パソコンとのデータ通信／アセンブリ言語も使用可能

3．応数・応物での利用例

数式処理電卓を実際の授業でどのように使用すべきか，応数と応物で想定される使用例を以下に述べる．

3．1　応数での利用例　―フーリエ級数―

工学におけるフーリエ級数の意義はいわずもがなであろう．フーリエ級数を求めるには，まずフーリエ係数を計算しなければならない．特に，部分積分の計算が確実にできることが必要である．しかし，一般区間における場合や部分積分を何度も繰り返さなければならないような場合，あるいは複素形フーリエ係数の場合，その計算はかなり繁雑になる．そのため，フーリエ級数以前に，そこで必要とされる積分計算でつまずいてしまう学生も少くない．

数式処理電卓を利用すると，学生はフーリエ係数の計算結果を簡単に確認することができる．計算に誤りがあるときは，不定積分の計算が違うのか，それとも定積分の計算が違うのかも確認できる．通常の計算画面では変数に整数の属性を付加することはできないので，積分結果は図1のような形で表示される．$\sin n\pi=0$ であることは自分で読み取ることが必要であり，ある意味では極めて教育的である．積分範囲に文字定数があってもかまわないので，かなり一般的な計算にも利用できる．

フーリエ級数の授業では，その収束の様子は教師が説明し，学生は具体的な関数のフーリエ級数を求めることに力点が置かれていたと思われる．しかし，積分計算によりフーリエ級数を求めることができても，その収束の様子をイメージできる学生がどれだけいるのだろうか．その部分のイメージが持てないと，フーリエ級数の意味をよく理解しているとはいえないであろう．

数式処理電卓では，図2のように有限和の関数を定義すれば，そのグラフは図3のように表示される．学生は，フーリエ級数の収束の様子を簡単に確認できる．いろいろな関数について，そのフーリエ級数の収束の様子を観察させれば，関数の連続性や微分可能性の違いにより収束の速さが違うことに気づかせることも可能になるだろう．

一方，学生にフーリエ変換を理解してもらうには，まず積分の意味を正しく理解していることが前提になる．離散と連続の違いや無限積分についての理解も必要になる．特に，フーリエ正弦変換や余弦変換された関数をみても，学生はそのグラフを簡単にはイメージできない．フーリエ変換に対する理解は，フーリエ級数への理解よりも格段に低下するのが現状であろう．

図4は，関数 $f(x)=e^{-ax}$（a＞0）のフーリエ余弦変換 $Fc(u)$ を計算したものである．a＞0という条件をつけて計算させている．

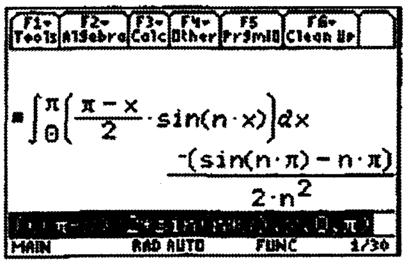

図1　フーリエ係数の計算

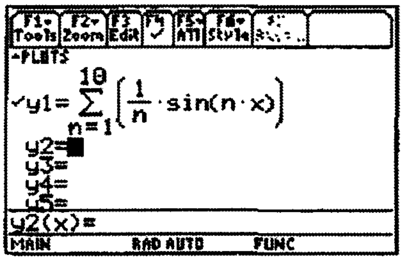

図2　第10項目までの和

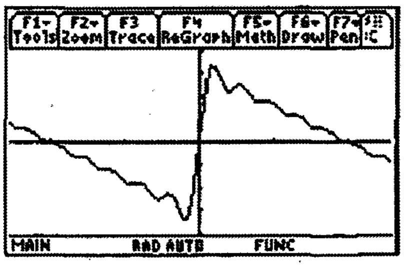

図3　フーリエ級数のグラフ

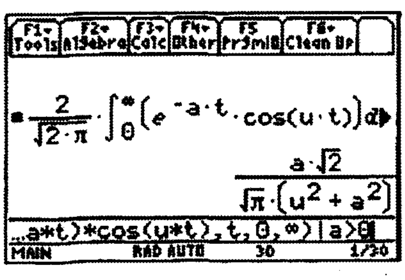

図4　フーリエ変換の計算

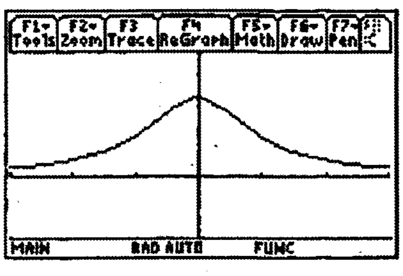

図5　フーリエ変換のグラフ

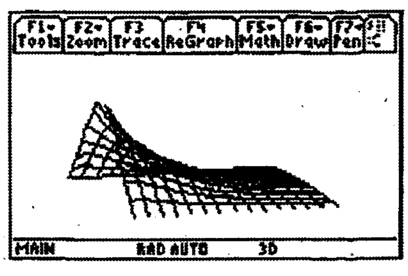

図6　熱伝導方程式の解

$$F_c(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-at}\cos utdt$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{u^2+a^2}$$

図5は$a=1$のときの$Fc(u)$のグラフである．このように，フーリエ変換のグラフを簡単に確認することができる．

フーリエ級数の応用として，よく偏微分方程式の解法が取り上げられる．たとえば，次の熱伝導の方程式を与えられた境界条件と初期条件のもとで解く．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leqq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leqq x < \pi \end{cases}$$

これを解くと，次の解を得る．

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n=1)^2}e^{-(2n-1)^2t}\sin(2n-1)x$$

しかし，解を表す式は求められたが，この式をみて確かなイメージを持てる学生がどれだけいるであろうか．それまで$y=f(x)$や$z=f(x, y)$の形の関数しか扱ってきていない学生は，このような式をみても「解いた」という実感は湧いてこないであろう．また，このグラフは曲面であるので，そのイメージをつかむのも容易なことではない．

図6は，数式処理電卓のグラフ機能を利用して，

$$z = \frac{4}{\pi}\left(e^{-y}\sin x - \frac{1}{9}e^{-9y}\sin 3x\right)$$

のグラフを描画させたものである．標準モードでは約30秒で描画される．この状態でグラフを回転できるばかりではなく，座標軸に垂直な方向から見た場合のグラフも表示できる．座標を表示しながら曲面上を自由に動くこともできるので，グラフを数値的に理解することもできる．

このような形で数式処理電卓を利用させれば，フーリエ級数やフーリエ変換への理解が大きく進展することが期待される．ある程度の理解が得られた後にこの数式処理機能を積極的に活用させれば，従来は計算が繁雑で学生に課すことのできなかったような問題を扱わせることも可能になってくるであろう．

3．2　応物での利用例　一振動一

工学では，さまざまな場面で微分方程式が現われる．たとえば，一端を固定したばね定数kのコイルばねに質量mの物体をつけ，ばねをxだけ変形させて振動させると，その運動方程式は次式で与えられる．

$$(1)\qquad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

図7は，$k>0$，$m>0$として，初期変位$x(0)=x_0$，$x'(0)=v_0$のもとでの解を，$k>0$，$m>0$という条件をつけて数式処理機能のdeSolveを利用して求めたものである．

$$x = x_0 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{k}\cdot t}{\sqrt{m}}\right) + \frac{\sqrt{m}\cdot v_0 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{k}\cdot t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{k}}$$

が表示されている．

図8は，$x_0=0$，$v_0=1$，$m=1$，$k=4$の場合の解曲線を描画したものである．垂直方向の動きと，時間軸を横軸にとったときのグラフとを同時表示させた．これにより，図8の右側の画面でばね定数kや初期変位x_0，v_0を変えると，振動の様子がどう変わるかを簡単に確かめることができる．

この振動に強制的な外力$mf\cos\omega t$を与えると，運動方程式は

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = f\cos\omega t$$

となる．この方程式の一般解は，（1）の一般解と（2）の特殊解との和で表されるので，特殊解を

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

の形に設定してa，bを求めてみる．

図9は，$x(t)$をこのように定義してから式（2）を計算させたものである．

$$\frac{(k-m\cdot\omega^2)(a\cdot\cos(\omega t)+b\cdot\sin(\omega t))}{m} = f\cdot\cos(\omega t)$$

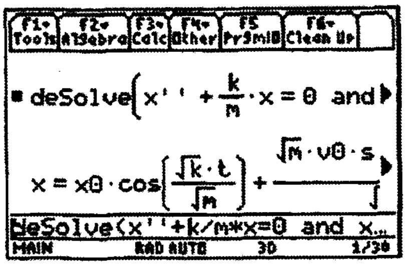

図7　微分方程式の解法

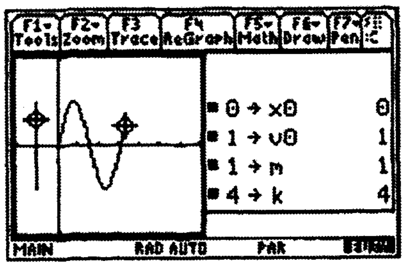

図8　ばねの振動

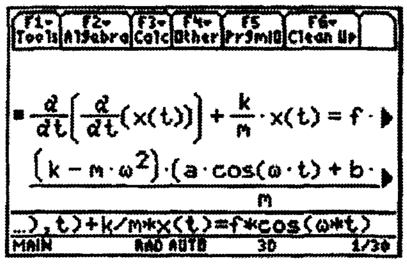

図9　微分の計算

が表示されている．両辺の係数を比較すると，

$$a = \frac{m \cdot f}{k - m \cdot \omega^2}\ ,\ b = 0$$

であるから，（２）の特殊解として次式が得られる．

$$x(t) = \frac{m \cdot f}{k - m \cdot \omega^2}\ \cos \omega t = \frac{f}{k/m - \omega^2}\ \cos \omega t$$

数式処理機能を利用して微分方程式（２）の一般解を直接求めることもできるが，ここではそのような使い方はしていない．特殊解の設定や係数比較などは学生に行わさせている．その特殊解を（２）に代入する計算で数式処理機能を利用したにすぎない．最終結果を表示させるだけでなく，このような形で数式処理機能を利用させることは，計算手順をしっかり理解させる上で有効と思われる．数式処理電卓の使わせ方の一つの典型例である．

この特殊解の形から，$\omega^2 \fallingdotseq p^2$（$p^2 = k / m$）のときは，解の様子が尋常ではないことが予想される．数式処理電卓を利用すれば，いろいろなp, ωに対してその解曲線を観察させて，「うなり」を学生に発見させることができる．

図10では，$x'' + 4x = \cos(\omega \cdot t)$ を $x(0) = 0, x'(0) = 1$ の条件で解いた解曲線を，画面を上下に分割してωの値を変えながら表示させている．「うなり」が現れていることが分かる．画面上から，振幅の最大値や時間軸との交点の座標も求めることができる．図10では，振幅の最大値が表示されている．うなりの周期について考察させることも可能であろう．このような考察をさせた後に教師が説明すれば，このような運動に対する学生の興味・関心が大きく向上することが期待される．

工学では，このような微分方程式が頻出する．学生は，主にその解析解の求め方を教授されることが多いが，実際問題では，いつでもそのような解析解が求められるとは限らない．解の大域的な状況を把握することも必要になってくる．そのためには，勾配場や位相平面としての理解も必要であろう．しかし，従来の微分方程式の授業では，そのような理解を得させることは難しいものがあった．勾配場や位相平面を，そう簡単には描けないからである．

数式処理電卓は，与えられた微分方程式の勾配場や位相平面を描画する機能を持つ．図11は，微分方程式

$$x'' + 4x = \cos(2.2t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$$

を，連立微分方程式

$$(3) \qquad \frac{dy_1}{dt} = y_2,\quad \frac{dy_2}{dt} = \cos(2.2t) - 4y_1$$

に直したときの位相平面である．$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ のときの解曲線（$y_1(t)$，$y_2(t)$）も描画されている．解曲線の描画には多少の時間がかかるが，位相平面だけならば数秒で描画される．高階の微分方程式や非線形の微分方程式でも，このような連立微分方程式に直して位相平面を描画できる．もちろん，描画範囲は自由に設定できる．

図12では，微分方程式（３）の解曲線$y = y_1(t)$ とその数値解とが表示されている．$y_2(t)$ のグラフや数値解を表示させることもできる．表では５行分しか表示されていないが，カーソルを下げることにより，その先をどこまでも表示できる．

このように，数式処理電卓は，解析的な解を求めるばかりではなく勾配場や位相平面も描画でき，解析解が求められない場合は数値解として求めることができる．微分方程式の解を様々な角度から容易に追及することができるので，工学では必須の微分方程式に対する学生の理解が大きく進展することが期待される．

４．予想される教育効果

数式処理電卓の応数と応物での利用例を述べたが，この電卓の数式処理機能やグラフ機能は，高専や大学工学部での実用に十分に耐えうるレベルにあることが分かる．これらの例から，この電卓の主な利用法は次のように分類できるだろう．

（１）自分の計算をチェックするための利用
（２）繁雑な単純計算を行わさせるための利用
（３）いろいろなグラフを描画させるための利用
（４）いろいろな試行錯誤を通して，何かを発見させるための利用
（５）いろいろな試行錯誤を通して，自分の思考を推し進めるための利用

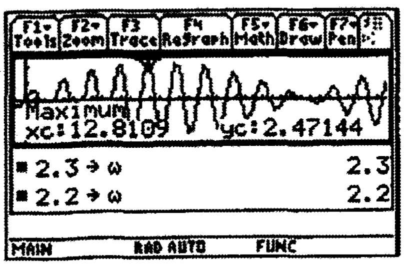

図10 うなり

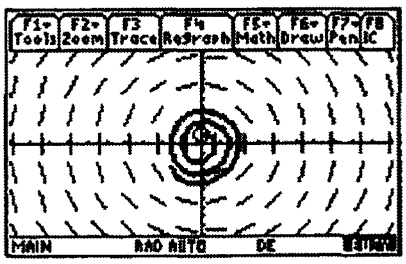

図11 位相平面

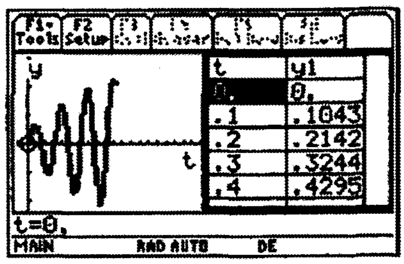

図12 解曲線と数値解

工学の学生が，このような数式処理電卓を自在に活用しながら専門科目を学んだ場合，相当画期的な効果があるだろうことが期待される．以下では，工学教育で活用した場合に予想される教育効果について，具体的に述べたい．

ただし，単に学生に購入させてそのまま放置した場合は，学生は(2)(3)の使い方しかしない場合も考えられる．その場合は，学生の思考力は停止し，学生はますます考えなくなっていくだろう．教師側の適切な指導・助言が不可欠であることに留意すべきである．

4．1　簡便であることの意義

MathematicaやMapleなどの数式処理ソフトは，工学の授業や専門研究にも使用されている．端末室や研究室で使用可能な状況にある高専や大学も多いであろう．しかし，それを使用するためには，パソコンやWSのある部屋に行き，その前に座ることが必要になる．また，いろいろなコマンドの使い方を習得しておかなければならない．

数式処理電卓は，Mathematicaほどではなくとも，それと同様の機能が納められている．しかも，いろいろな機能は，コマンドを入力することなく幾つかのキーを押すだけで実現できる．これにより，あるレベル以上の学生の場合は，数学上の何かのアイデアが浮かんだとき，それを即座に試してみることができる．自分でプログラムを組んで，数式処理を含むシミュレーションを行うことも可能になろう．繁雑な計算を伴う場合は，その計算時間を短縮して工学の本質部分に思考を集中させることができることになる．

これは，むしろ教師側にとって意義深いかもしれない．数学部分を含む研究上のアイデアが浮かんだとき，アイデアの内容によっては，パソコンやWSの前に座らずとも，ノートパソコンを広げずとも，思いついたときにいつでもどこでもそれをチェックできることになる．場合によっては，論文の読解や作成に要していた時間が相当効率化されることも期待される．

4．2　関数グラフへの理解

この電卓は，いろいろな関数のグラフを簡単に描画できる．媒介変数表示された関数でも即座にグラフを確認でき，グラフ上から極値や軸との交点の座標を求めることもできる．グラフの拡大・縮小も簡単にでき，$10^{-6} \leqq x \leqq 10^{-5}$のときの状況や，逆に$0 \leqq x \leqq 10^{6}$のときの状況なども簡単に描画する．関数の局所的・大域的な状況の把握が容易になり，関数の理解を深める上で極めて有効と思われる．

工学の教科書などではいろいろな関数が現れる．工学上のいろいろな見通しを得るには，それらの関数に対する理解力・洞察力が不可欠であろう．この電卓のグラフ機能を使いこなすことができれば，関数に対する理解力が大きく向上することが期待される．

4．3　微積分計算の補助としての利用

工学の専門科目や論文では，微積に関するいろいろな計算が必要になる．細かな計算過程は読み手がフォローすることが求められ，単なる結果のみが表示されることも多い．それが繁雑な計算の積み重ねで得られている場合は，この電卓の数式処理機能で簡単にチェックできる．

また，微積分を学習中の学生は，この電卓の数式処理機能を計算問題の答合わせや，途中計算の確認に利用できるだろう．単なる微分・積分の計算のみならず，テイラー展開，偏微分・重積分の計算，そして微分方程式の解法などにも利用できるので，工学で現れる微積分全般で活用できる．特に，高校で微分・積分の習得が十分でなかった学生においては，その復習の補助として利用させることができる．グラフ描画が簡単にできるので，微積分を視覚的に理解させるときに有効と思われる．

この電卓は，2階の定数係数線形微分方程式であれば，その解析解を求めることができる．高階や非線形の方程式の場合でも，数値解から解曲線を描画できる．勾配場や位相平面図の描画機能もあり，工学で頻出する微分方程式をさまざまな角度から扱うことができる．これは，工学上のいろいろな見通しを得る場合に極めて有効な機能と思われる．

4．4　代数計算の補助としての利用

工学では，繁雑な式の変形や，いろいろな方程式の解法が必要になる．そこでは，数学の演習問題のように簡単な答になるとは限らない．特に，非線形の方程式のような場合は，学生はお手上げであろう．

この電卓は，高次方程式や連立方程式の解も求めることができる．高次方程式では実数解と複素数解とを区別し，正しく求められないときは自動的に数値解を求めようとする．ある程度は文字係数の方程式の解も解法可能である．また，工学では線形代数のいろいろな計算も頻出するが，この電卓は30×30行列のような大きな行列の固有値も計算できるので，線形代数に関する繁雑な計算が相当効率化されることが期待される．

方程式の解法に限らず，文字式を含む分数式など，いろいろな式の変形にも利用できるので，そのような場合の計算を効率的に行うことができる．教科書や論文にある式のみならず，自分の計算のチェックにも利用できるので，いろいろな計算の確実性を増すことができるだろう．

4．5　プログラム教育での利用

この電卓のプログラム言語は，通常の構造化言語とほとんど同様である．パソコン上で作成したアセンブ

リ言語プログラムを，この電卓に転送して実行することもできる．特に，この電卓の数式処理機能をプログラムの中に利用できるので，機能的には通常のプログラム言語より強力といえるであろう．グラフ機能や数式処理機能を活用したプログラミングができるので，瑣末な部分に足を取られることなく，プログラミングの本道に焦点を絞った考察が可能になる．この電卓でプログラムを組むことができれば，CやFORTRAN等の構造化言語のプログラムは容易に組むことができる．また，その逆もいえる．プログラム作りは細かい試行錯誤的な部分も多いので，思いついたときに，いつでもどこでもチェックできることは，プログラムを習得する上では非常に重要と思われる．

4．6　データ解析ツールとしての利用

オプション機器のCBLを利用すると，いろいろなセンサーを通して実データを収集できる．収集されたデータは表データとして蓄積され，そのデータに対してさまざまな統計解析を行うことができる．エクセルのような表計算機能があり，そこでは数式処理を含めた計算が可能である．センサーに合わせたプログラム作成・データ収集・データ解析という一連の作業を，この電卓と附属の機器だけで行わさせることができるので，工学実験の入門的な部分で利用すれば効果的かもしれない．ただし，最大毎秒10,000点の速さで512点までのデータしか収集できないので，本格的な工学実験には適さないであろう．

データ収集力に限りがあるとはいえ，表計算では数式処理を含めた計算が可能であるので，エクセルで行っているようなシミュレーションの幅が大きく広がることになる．本格的な工学実験で得られたデータをこの電卓に転送すれば，エクセルよりも強力なデータ解析ツールとして利用できるかもしれない．その解析を，パソコンに向かわずとも，いつでもどこでも行うことができることの利点は大きい．ただし，表計算で扱えるデータは999行99列に限られる．

4．7　不適切な使用によるマイナス効果

数式処理電卓を，特に注意もせずに学生に使用させた場合には，学生はいろいろな計算問題を電卓のキー操作だけで行おうとするかもしれない．その場合，学生の計算力は確実に低下するであろう．グラフも簡単に表示されるので，放置すれば学生はますます考えなくなるかもしれない．

勿論，それは望ましいことではない．この電卓を使用させるにあたっては，そのような使い方にならないような配慮が必要となる．計算力の低下を防ぐには，この電卓の持ち込みを禁じた試験を行うことも必要である．自分の思考のツールとして使いこなすようにさせるには，定理・公式・原理のようなものをこの電卓を使って発見させ，自ら気付くことの喜びを数多く体験させることが効果的であろう．学生をそのような方向に仕向けるには，この電卓をどのような場面でどのように使わせるべきか，教師は事前に思考実験することが必要となる．

その意味では，教師側には従前にも増した授業の準備が必要とされるであろう．この電卓の効果を最大限に引き出すには，教師側の努力なしには得られないことに留意すべきである．しかし，そのような努力で得られる教育効果は，これまでには得られなかったような画期的なものとなるだろうことが予見されるのである．

5．おわりに

ハンドヘルドの電卓で，関数のグラフ描画，数式処理，表計算，そしてプログラミングまでが可能になったことの意義は大きい．入学時に，この電卓の使用法に関する演習科目を設けて使い方を徹底的にマスターさせ，他の科目ではこの電卓の使用を前提とした授業を行うことができれば，そこには全く新しい工学教育の世界があるように思えてならない．場合によっては，最近の学力低下の一つの有効な対応策となりうるのではないだろうか．工学教育にとっての意義は大きく，積極的な活用が図られるべきである．

参考文献

［1］梅野善雄：グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，7，1，1（2000.6）

［2］梅野善雄：数式処理電卓は工学教育に何をもたらすか？，工学教育，48，4，9（2000.7）

［3］梅野善雄：数式処理電卓による微積分教育の改善，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，8，1，13（2001.6）

［4］http://www.naoco.com/

（平成13年8月23日受付）

著者紹介

梅野　善雄

1974年　東北大学大学院理学研究科修士課程修了

現　在　一関工業高等専門学校教授
岩手大学工学部非常勤講師