

数式処理電卓は工学教育に何をもたらすか？

What Do Algebraic Calculators Contribute To Engineering Education?

梅野善雄
Yoshio UMENO

現在、グラフ電卓と呼ばれているものの中には、数式処理機能を持つものがある。高専や大学教養課程程度の数学は、すべてこの電卓のキー操作だけで求められるといっても過言ではない。海外ではグラフ電卓が教育現場に急速に普及しつつあるのに比べて、日本では数式処理可能な電卓の存在すらあまり知られていない。この電卓の機能の概要を紹介すると共に、数学教育や工学教育の中で活用する場合の意義や問題点などについて考察したい。

キーワード：数式処理電卓，工学教育，数学教育

As some latest graphing calculators have a feature of computer algebra system, they are called algebraic calculators. They cover mathematics in technical colleges or in general education courses at universities. It can be said that we can solve mathematics only by pushing some keys of these calculators. The use of algebraic calculators is becoming widespread rapidly in mathematics classes all over the world, although they are not popular among mathematics teachers in Japan, even though some graphing calculators possess a feature of computer algebra system.

In this paper, we will introduce the summary of algebraic calculators, then consider the significance and some problems with their use in engineering or mathematics education.

Keywords: Algebraic Calculator, Engineering Education, Mathematics Education.

1. はじめに

高専では、実験・実習を重視した工学系高等教育が行われている。学生は必要なデータを得るために放課後まで実験を行い、その結果や考察をレポートにまとめなければならない。実験によっては、かなり複雑な計算を経て結果が導出される。卒業研究では数学的に高度な計算が必要になる場合がある。学年が上がるにつれ実験内容は高度になり、数学部分の難度も増す。特に、数学の計算に、学生はかなり苦勞しているように見える。文字式を含む複雑な計算や微分方程式の解法を関数電卓のように電卓で行うことができれば、学生は複雑な計算から解放され工学現象の解析そのものに集中できるであろう。

最近の「グラフ電卓」には、数式処理可能なものがある。それは、関数のグラフ描画や文字式・微分積分の計算のみならず、微分方程式の解析解でさえ求めることが

できる。高専や大学教養課程の数学は、すべてこの電卓で行うことができるといっても過言ではない。

以下では、数式処理機能を持つグラフ電卓(数式処理電卓)の概要を説明すると共に、この電卓の利用が工学教育や数学教育にどのような効果をもたらすかを考察したい。なお、単にグラフ電卓という場合は、数式処理機能を持たない場合も含む総称として用いるものとする。

2. 数式処理電卓

カシオのグラフ電卓CFX-9970G, algebra FX 2.0, テキサスインスツルメント社のグラフ電卓TI-92Plus, TI-89, ならびにヒューレット・パッカド社のグラフ電卓HP-49Gは数式処理を行なうことができる[1]。

最初に、これらの電卓は具体的にどのようなことが可能であるかを概観したい。

2.1 機能の概要

TI-89を例にとり、数式処理電卓の機能について概説する。この電卓は縦183mm, 横82mm, 厚さ20mmの大きさであるが、その中にはパソコン用の数式処理ソフトDERIVEの機能が詰め込まれている。

メモリーは500Kバイト以上あり、ユーザーエリアは約188Kバイト。約384KバイトのフラッシュROMを内蔵している。単4アルカリ電池4本とリチウム電池1個で稼働する。関数電卓などと比べると高価(定価29,800円)であるが、昨今の学生であれば十分に個人でも購入可能な範囲内にあると思われる。

この電卓の機能は多岐にわたるが、例えば微分・積分関連では以下のような機能がある。

数列の和の計算(無限和も可能)、関数や数列の極限

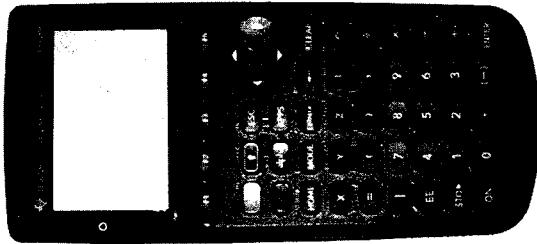


図1 数式処理電卓TI-89

値、微分係数の値、(偏)導関数の計算、(高次)導関数の計算、接線の方程式、極値、変曲点、テイラー展開、指定された範囲における関数の最大値と最小値、不定積分、定積分、面積、長さ、多重積分、特異積分、数値積分。

他にも、数(複素数を含む)と式の計算、方程式(高次、連立)の解法、線形代数(固有値のみならず、QR分解、LU分解も可能)、集合演算、統計解析(10種類の回帰モデルがあり箱ひげ図も表示可能)、表計算等に関して多くの機能を持つ。

表計算は最大99列まで扱うことができ、各列は最大999個の要素を持てる。自動計算機能があり、表計算ソフトと同様の計算ができる。文字列操作や単位付きの数値計算もできる。その単位は自分で定義でき、重要な理化学関係の定数(20個)や単位(100以上)が定義済みである。

局所変数と大域変数との区別ができ、If文、For文、While文、Loop文などによる構造化プログラミングが可能である。パソコンとのデータ通信機能があるので、

WWW上で入手した様々なプログラムを電卓に転送することもできる。

別売オプションのデータ収集器CBL(Calculator-Based Laboratory)を利用すれば、いろいろなセンサーを通して実データを収集し、それらに統計処理を施して即座にグラフ化することができる。距離、音、温度、PH、力、圧力、速度、加速度、磁界、光、生物圧力等のセンサーが別売されている。最大毎秒10,000点の速さで512点までのデータを収集でき、幾つかのチャンネルを通してデータの同時収集が可能である。データ収集速度が毎秒14点までの場合は、収集データをリアルタイムでグラフ表示する。6個のチャンネルを持ち、アナログ用が3個、デジタル入出力用が各1個ずつ、そして距離センサー入力用が1個ある。

2.2 幾つかの画面例

数式処理電卓は計算結果をどのように表示するかを見るため、表示画面の大きいTI-92Plusについて幾つかの画面例を上げる。TI-89でも同じ画面が表示されるが、式によっては一画面に表示できずに横スクロールしなければならないことがある。TI-92Plusの液晶画面の大きさは48×87(mm)、TI-89の場合は38×61(mm)である。なおTI-89はTI-92Plusから幾何機能(カブリジオメトリ)を除いたものである。

図2では、複素指数関数の分数式 $(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) / (e^{i\omega} + e^{-i\omega})$ の計算や分数方程式の解法が行なわれている。

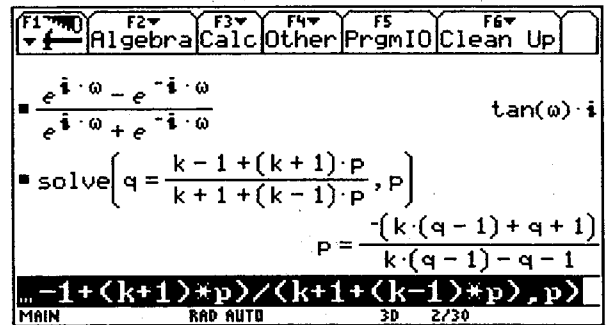


図2 複素数の計算と方程式の解法

i は虚数単位である。ギリシア文字を使用できる。分数式は「見たまま」の表示がなされ、方程式の解法では実数と複素数の場合との解法を区別できる。高次方程式

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -\pi) \\ 1 & (-\pi \leq x < 0) \\ -1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x) \end{cases}$$

のみならず、非線形連立方程式も解法可能である。

図3の右側では、
のグラフと、そのフーリエ級数の第2項までのグラフ
が示されている。画面は上下にも分割できる。この画面
のまま、最大値・最小値・x軸との交点のx座標・指定

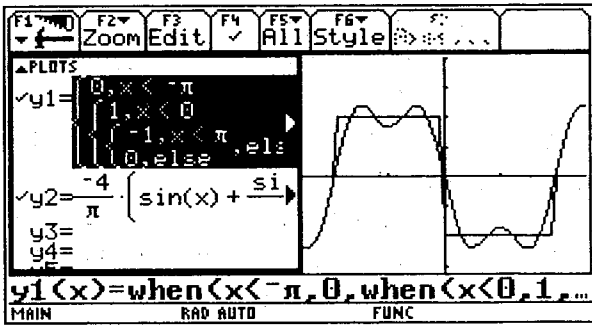


図3 関数の定義画面とグラフ表示

された点における微分係数・接線の方程式・変曲点・x
軸とで囲まれた部分の面積・曲線の長さなどが簡単なキ
ー操作で求められ、座標データは即座に表データに変換
できる。左側は関数の定義画面である。場合分けされた
関数は左括弧で囲って表示される。媒介変数や極座標
で表された関数のグラフも描画できる。

図4では微積分の計算がなされている。左側の式に対

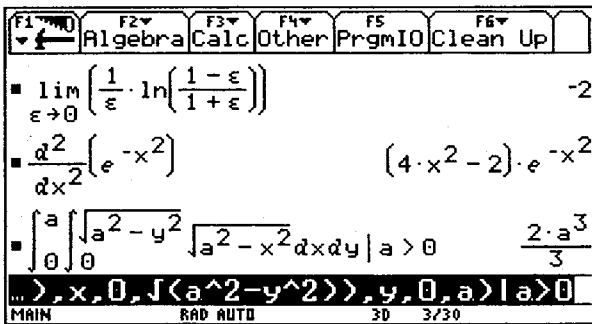


図4 微分・積分の計算

する解が右側に示される。極限值が正の無限大に発散
するときは∞が返される。この例のように、高階の導関
数や偏導関数・多重積分も計算できる。最後の例では
文字定数が使用され「a>0の場合に計算せよ」という条
件が付されている。計算結果を分数や無理数で表すこと
ができるときはそのような表示がなされ、電卓の能力で
数値的にしか求められないときは自動的に数値解が計算

される。例えば、 $\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$ の値は $\sqrt{\pi}/2$ であるが、
この電卓は8秒間計算した後0.886227を返す。

図5では、双曲線関数cosh xの4次の項までのマク

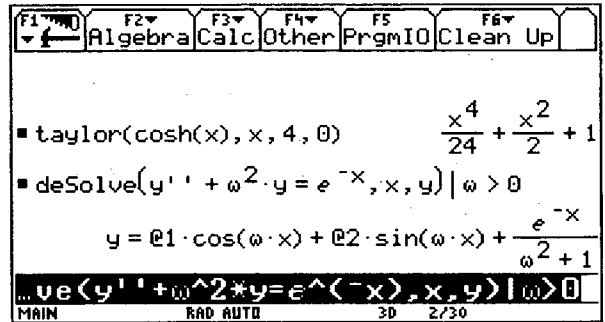


図5 テイラー展開・微分方程式

ローリン展開と2階定数係数線形微分方程式 $y'' + \omega^2 y = e^{-x}$
($\omega > 0$)の一般解が求められている。@1や@2は任
意定数である。展開された整関数は即座にグラフ表示
できる。微分方程式に初期条件や境界条件を付すこと
もできる。3階以上の微分方程式の解析解は求められ
ないが、1階の連立微分方程式に変換すれば解曲線が描
画できる。

図6は、

$$f(x,y) = \frac{5\cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{1+x^2+y^2}$$

のグラフを $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$ の範囲で表示した
ものである。x, yの分割数を20(標準では14)にとり計算
し、表示までに約70秒を要した。この曲面を拡大・縮
小・回転させることも容易である。幾つかのグラフ画面
を保存してそれらを連続的に表示させる動画機能まで
ある。

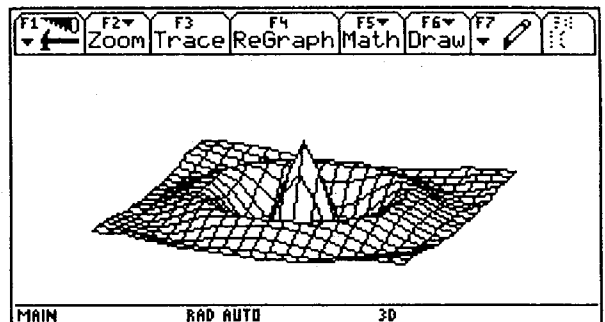


図6 曲面の表示

図 6 の左側では、van der Polの微分方程式を

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

$dx/dt=y$, $dy/dt=-\varepsilon(x^2-1)y-x$ と一階連立微分方程式に直し, $\varepsilon=-0.2$, $x(0)=1$, $y(0)=1$ の場合のxy平面におけるベクトル場と解曲線が示されている。ベクトル場だけであれば約9秒で表示される。右側では個々の曲線 $x=x(t)$, $y=y(t)$ が示されている。高階の微分方程式も同様の手法で解曲線を表示できる。デフォルトではルンゲ・クッタ法で近似解が求められるが, オイラー法で求めさせることもできる。

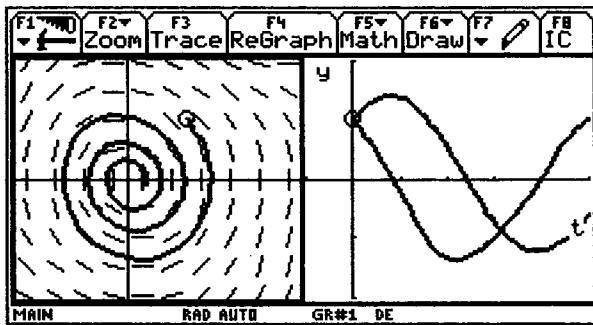


図7 ベクトル場と解曲線

以上の機能をユーザープログラムに利用できるので, 相当高度の数学問題を解法可能である。Mathematica等の数式処理ソフトがその能力を競う国際コンペにおいて, TI-92はMathematicaと並んで首位タイになったことがある[2]。そこでは, 積分方程式

$$\int_0^1 \exp(x+y+x^2+xy+y^2+x^2y^2) f(y) dy = \lambda f(x)$$

を満たす最大の λ を求める問題などがあり, この電卓の機能が単なる教育用には止まらないことを示している。

3. 数式処理電卓と工学教育

3.1 従来の工学教育における数学

高専や大学の工学系専門科目では数学が駆使される。特に, 微積分や微分方程式等, いわゆる解析系の計算ができることが必須である。

数学を駆使せざるを得ない専門科目では, 学生は必要な数学を事前に学んでおかなければならない。しかし, 学生は, 数学の授業で学んだことを専門科目で使われるときまで覚えているとは限らない。最近, 文系のみならず理工系大学入学生の数学基礎学力の低下が指摘さ

れており[3], 従前のような数学を駆使した授業や実験等は, 徐々に困難になりつつあるのが現状と思われる。数学の使用頻度が高い科目では, 学生の計算力では行間を埋めることができないからといって一つ一つの数式に数学的な説明を加えてはきりがない。そのような場合は, 授業進度の上から「幾つかの式から, こういう関係式が導出できることが知られている」という形の授業にならざるをえないのではないだろうか。数学的な飛躍を避けるため, できるだけ数式を含まない内容で授業をする場合があると聞く。小・中・高の学校五日制が完全実施された場合には, 以上の状況がさらに拡大することも懸念されている。

理工系の学校における数学の授業では, 単にいろいろな式や微積分の計算ができ, 微分方程式が解ければよいというものではないであろう。「微分」「積分」「微分方程式」の数学的な意味を正しく理解して基本的な計算ができた上に, さらにそれらを様々な工学現象の解析に応用できる能力こそが重要である。

その意味でも, 数式処理を行い, 微分方程式の一般解を求め, そのベクトル場や2変数関数のグラフまでも描画する電卓は, 工学教育のみならず数学教育にとっても革命的なツールとなりうる可能性がある。

3.2 数式処理電卓が可能にする工学教育

工学では, 数学は一つの道具として, あるいは一つの言葉として使用されている。そこでは, 数学理論にあてはめた単なる結果が必要なだけの場合が多いであろう。座学や実験等で必要とされる工学上の計算の多くは, この電卓のキーを押すだけですむ場合が多いのではないだろうか。

たとえば, 複素数や繁分数式の計算, 高次方程式や連立方程式, 関数のグラフ, 数列・級数の和, 極限値の計算, (多変数も含む)微分・積分の計算, 関数の級数展開, 微分方程式, 行列の積や逆行列, 行列式, いろいろな統計解析, 単位変換を伴う計算等々。数式処理電卓は, これらの計算を容易に行い結果を表示する。関数のグラフのみならず, 微分方程式のベクトル場やその解曲線さえも即座に描画する。計算結果の視覚的な理解を通して, 学生は計算やその結果の意味について理解を深めることができるであろう。

この電卓は, 計算ばかりではなく, 一つの「思考ツール」として利用することができる。ある問題を考えていて「この場合はどうなるのか?」と思っても, その計算が相当の困難を伴うのであれば, 学生はそれ以上の計算をあきらめざるをえない。学生の思考は, そこで停止することになる。しかし, 数式処理電卓は即座にその解答を表示する。学生は, その先の思考に難なく進むことができる。これは学生自身の計算力だけではなし得ない

ことである。あるいは、ある関数の変化の仕方を知る必要があるとき、それが学生には描画困難なグラフであったとしても、この電卓は容易にそのグラフを表示する。しかも、その画面上から接線の方程式、軸との交点の座標、そして定積分の値などまでもが簡単なキー操作だけで求められる。この電卓のいろいろな機能を活用すれば、簡単なシミュレーションを自分で行うことも可能であろう。従来は電子計算機室の数式処理ソフトを利用しなければできなかったことが、ハンドヘルドの電卓で可能になることの意義は大きい。

この電卓を利用すれば、数学や工学における単なる「計算問題」はもはや問題とはなりえない。これまでかなりの時間を占めていた単純計算のための時間が大幅に節約でき、その時間はいろいろな問題の定式化や工学そのものの解析に費すことができる。そこでは、「考えること」こそがより重要である。学生に電卓を利用させて、法則や性質等を自分で発見するようにしむけることも可能であろう。そして、このような思考訓練に多くの時間を費やせば、工学現象を自分で解析してモデル式を定式化したり、あるいはその背後の法則性を見い出させたり、その理論的な証明を考えさせるといようなことが十分可能になるのではないだろうか。

つまり、この電卓を有効に活用すれば、学生の思考を工学上の問題の本質に集中させることができ、「思考」に重点を置いて「数学」を自在に使いこなせる人材の教育が、十分可能になるのではないと思われる。

3.3 電卓使用に関する幾つかの問題点

このような数式処理まで可能な電卓の使用については、おそらく幾つかの懸念が出されるであろう。最大の懸念は、「電卓の使用は、基礎的計算力や数学的思考力の低下につながるのではないか」というものだと思われる。

確かに、現状の教育体系のまま学生に安易にこの電卓を利用させることは、多少の問題があるかもしれない。学生は数式処理電卓を単なる「解答表示機能付き電卓」と理解し、自らの計算意欲を停止させる可能性は十分に考えられる。

しかし、これは全くの杞憂と思われる。学生がこの電卓を手にしてその機能に触れたときに受ける感動は、それを単なる「解答表示機能付き電卓」には終わらせないであろう。この電卓は、学生のいろいろな疑問に即座に解答を示すことができる。係数を少し変えただけで計算量が倍増するような式でも、この電卓は難なくその解答を表示する。文字式の計算や複雑な関数であっても、その計算結果やグラフはキー一発で表示される。方程式の解を即座にグラフ表示させることもできる。しかも、それを数値データとして表形式で表示させることも容易で

ある。式の計算、グラフ表示、そして表データとの間の往来が自在にできるので、学生は計算やその結果の意味を多角的に理解するようになるであろう。

では、学生はもはや計算の必要はないのだろうか。単純計算はキー一発で求められるとはいっても、基本的な計算ができなくてもよいということにはならない。基本的なものを自分で計算できることは当然必要である。したがって、授業の中で実際に利用させるには、どのようなときに電卓を使い、どのようなときに手計算で求めさせる必要があるかについて相当な吟味が必要となるであろう。つまり、数式処理電卓を実際に利用させるにあたっては、単に教育内容をそのままにして漠然と使用させるのではなく、その教育内容の理解を深めさせるにはどのような使用のさせ方をすべきかを事前に十分検討することが必要となる。

特に、数学では、問題演習の多くがいろいろな計算問題で占められる。それらの多くは、この電卓を利用すれば単なるキーの押し方の問題になりかねない。しかし、この電卓を有効に活用すれば、数学の本質的な概念を学生にストレートに理解させ、「計算」よりも「思考」に重点を置いた教育が可能である。この電卓は、「学生に教授しなければならない数学とは何か？」を根本から見直すことを求めているともいえる。その意味で、数式処理電卓の出現は「数学教育の革命」を引き起こす可能性がある。というより、世界各国ではこの革命が現在すでに急速に進行中である。

次節で述べられるように、グラフ電卓を活用した数学教育は現在世界各国で活発に研究されており、その活用法や功罪について数多くの研究がなされている。それらの結果によれば、このような電卓の使用が「罪」であるとの結果は少なく、むしろ「功」に関して多くのこと報告されている。

たとえば、「電卓の使用は学生の数学への興味・関心を引き起こす」「電卓の使用は、学生の数学概念や関数の理解度、あるいは問題解決能力を向上させる」「電卓を使用しないで授業を受けた場合と比較して、(電卓を使用しないテストにおいても)基礎的計算力の向上が見られる」などが報告されている[4]。

以上のことを総合すると、この電卓の使用により計算力や思考力が落ちる可能性よりも、適切に使用すれば、むしろ総合的な数学力が高まる可能性の方が高いと思われる。「適切な使用のさせ方」が問題であるが、これは試行錯誤を繰り返すなかで見出すしかないであろう。それを関心を持った個々の教師が行うのでは極めて非効率的であるので、何らかの組織だった研究が必要になってくるとと思われる。

米国では、数学力の向上が国力向上に繋がるという

明確な目的のもとに、すでに10年程前からグラフ電卓を利用して数学的思考力を重視した数学教育が積極的に行われている[5]。逆に、日本では数学の時間を減少させようとしており、大学受験においても数学が受験科目から敬遠される傾向にある。その結果は、「分数ができない大学生」として問題になっている。現在社会では、理工系のみならず様々な分野で数学の必要性が求められているにも拘らず、日本のこの現状には肌寒いものがある。

特に、数学教育に電卓の利用を積極的に押し進めて数学的思考力の強化に努めている米国との差がこのまま拡大すれば、両国の数学力の差は、ひいては国力の差はとんでもないことになるのではないかという危機感が感じられてならない。欧米諸国では、数式処理電卓を含むグラフ電卓を利用した教育実践のノウハウがすでに十分すぎるほど蓄積されている。今や、この電卓の使用法に関する研究は、数学のみならず工学においても急務といえるのではないだろうか。

4. 世界におけるグラフ電卓普及状況

グラフ電卓(数式処理電卓を含む)を使用した数学教育は、欧米各国を中心に急速に普及しつつあり、アジア各国でもそれらを活用した数学教育に取り組みつつある。

特に、この教育改革の発祥地である米国では、州予算でグラフ電卓を購入して州内の全生徒に貸与することを決めた州もあるなど、数学の授業でグラフ電卓の使用が常識化していると言われる[6]。米国高校数学の最上位レベルにあり大学数学の単位を高校在学中に取得できるAP Calculusの講座ではグラフ電卓の浸透率が90%にも及び、日常的に電卓を活用した教育が行われている。そして、高校でグラフ電卓を使いこなして進学してきた学生に押される形で、大学の側もそれに対応せざるを得なくなっているという[7]。

他にも、フランス、オーストリア、デンマーク、北欧三国、スペイン、ポルトガル、カナダなど多くの国が、グラフ電卓の活用に取り組んでいる。特に、スウェーデン、デンマーク、ポルトガル、そしてフランスでは、国家試験でグラフ電卓が必要とされる[8]。アジアのシンガポール、マレーシア、タイでも関心を高め、一部の学校では電卓を活用した教育実践が始まっている。韓国や中国でもテクノロジーの活用に向け真剣な検討が行われつつあるという[6]。

これに対して日本では、わずかに、この電卓の意義を理解した教育現場や教育センター、あるいは教育系大学の一部の人々によって、情熱的な実践や研究が行われているにすぎない。数式処理可能なグラフ電卓が存在することさえあまり知られておらず、このような日本での関

心の薄さからカシオの数式処理機能を持つグラフ電卓は日本では発売されていない。高校や大学への「受験」に向けた教育を行わざるをえない日本の教育現場は、この数式処理電卓がいかに画期的なものであったとしても、受験のあり様が変わらない限り、このような電卓を活用した教育には躊躇するであろう。

しかし、世界におけるグラフ電卓の普及状況は、今や指数関数の急勾配部分にさしかかっていると言われている[8]。関数電卓の出現で我々はもはや数表や計算尺を必要とはしなくなった。文字式の計算や2変数関数のグラフ描画が可能で微分方程式の解析解まで求めてくれる電卓があるのであれば、それを利用しない手はない。世界におけるグラフ電卓の浸透状況を見ると、この電卓の活用法に関する研究は、もはや一時の猶予もならない状況にあるのではないだろうか。

5. おわりに

現代テクノロジーは数式処理ソフトをハンドヘルドの電卓に詰め込むことを可能にし、今や微分方程式の解析解ですら電卓のキー操作だけで解法可能な時代になった。

著者が数式処理電卓を手にしたのは1年半程前のことである。その機能に驚嘆すると共に、その後、海外の教育現場では急速に普及しつつあることを知った。日本におけるこの電卓の知名度の低さや、「分数ができない大学生」が話題となるような昨今の状況をみると、国家レベルでの数学力の行く末には悲観的な思いにならざるをえない。数学力の差は、技術開発力の差に直結する問題である。

この電卓は、単に数学教育の「教育ツール」や工学における「計算ツール」として理解されるべきではない。技術立国を唱えるには数学的思考力を向上させることが不可欠である。数式処理電卓をそのための「国家戦略上のツール」として位置付け、早急な対策が必要な状況にあると思われる。

参 考 文 献

- [1] 各電卓の詳細は、以下のURLを参照されたい。
<http://www.casio.com/calculators/>
<http://www.naoco.com/>
<http://www.hp.com/calculators/>
- [2] TI-92 Wins System Challenge at Math Software Conference, <http://www.ti.com/calc/docs/swh/ti92wins.htm>
- [3] 岡部恒治, 戸瀬信之, 西村和雄: 分数ができない大学生, 東洋経済新報社, 1999
- [4] Heidri Pomerantz: The Role of Calculators in

Math Education, 1997

<http://www.ti.com/calc/docs/therole.htm>

- [5] Franklin Demana and Bert K.Waits: The Evolution of Instructional Use of Hand Held Technology. What we wanted? What we got.

<http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/papers.html>

- [6] 「いま, 世界のくにぐにでは・・・」, T.I.M.E, vol. 14, テキサスインスツルメント社, 1999

<http://www.naoco.com/calc/time.htm>

- [7] 渡邊信: 「米国大学教育界の苦悩」, T.I.M.E, vol. 13, テキサスインスツルメント社, 1999

<http://www.naoco.com/calc/time.htm>

- [8] Bert K.Waits and Franklin Demana: Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present, and Future.

<http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/papers.html>

著者紹介

梅野 善雄

1949年 12月生まれ

1974年 東北大学大学院理学研究科修士課程修了

現在 一関工業高等専門学校助教授
岩手大学工学部非常勤講師



