3 次関数の性質に関する高専 1 年生の自由研究

梅野　善雄 *
一関工業高等専門学校

1　はじめに

通常の数学の授業では，まず教師が数学的概念を説明する。そして，幾つかの例題をやってみせた上で学生に類似の問題を課す形の授業が多い。ある程度の理解が得られたときは，さらに応用問題を課して理解の定着と深化を図ることになる。いずれにおいても，学生は「〜を解け。」「〜を証明せよ。」という形で，教師から与えられた問題を考えることになる。限られた範囲の問題を多数こなしていく中では，幾つかの解答パターンが見えてくる場合もある。そうすると，今度は，効率的に解答するために「その解答パターンを覚える」という形で学習する学生も現れてくる。それは，短期的に乗り超えなければならない学習目標がある場合は，極めて効率的な学習方法であるということもできよう。

一方,「数学をする」という立場に立つと，何らかの試行錯誤を伴う問題を考えさせることが有効と思われるが，そのような課題を課すことは現実にはなかなか難しいものがある。特に，基礎力ができていない学生の場合はなおさらである。十分に能力のある学生であっても，相当の計算力や思考力がないと，それを実行するのはなかなか困難であろう。

しかし，計算や複雑な関数のグラフ表示など，学生にとって困難な部分を数式処理機能に任せてしまえば，ある程度の試行錯誤を行わさせることが可能になる。本校では，学生に数式処理可能なグラフ電卓 (テキサスインスツルメント社，TI–89) を貸与している。この電卓の機能を利用すると，関数の式を定義するだけでグラフが表示される。その描画範囲を変更したり，x 軸との共有点や極値を与える点の座標も簡単に求められる。また，数式処理機能を利用すると，式の展開・因数分解や方程式の解法などもキー操作だけで可能である。

以下では，平成 15 年度の本校 1 年生がグラフ電卓を利用して行った自由研究の内容について紹介する。学生は，3 次関数のグラフの性質に関して，成績の上下によらず何らかの規則性がないかどうかを考察した。基礎力に難のある学生であっても，グラフ電卓が表示するグラフから何かを考えることができる。成績上位の学生の場合は，自分で思考を押し進めて数学の世界にはまっていく学生も出てきた。数学教育におけるグラフ電卓の意義や有効性について，再認識させられた思いがある。

なお，この論考は,「数学教育の会，2004 年夏の集会」(学習院大学，2004.9) における発表と，T^{3}Japan 第 8 回年会 (筑波大学附属駒場中・高等学校，2004.8) における発表をもとに，加筆修正したものである。

*021–8511　岩手県一関市萩荘字高梨、　http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

2　3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ に関する自由研究

2.1　学生に与えた課題

平成 15 年度の本校 1 年生 (163 名) に，夏季休業の課題として，通常の問題練習の他に次のような課題を出した。

(1) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフは，a, b, c がどのようなときにグラフがどのようになるか，できるだけ一般的な性質を見い出せ。

(2) $y = f(x)$ と $y = |f(x)|$ のグラフとの関係はどのようになっているかを考察せよ。

(3) $y = 1/(x^2 + ax + b)$ のグラフはどのようになるか，できるだけ一般的な性質を見出せ。

(4) $(x+1)^n$ の展開式を調べて，それらの係数の間にどのような関係があるかを考察せよ。

この課題を出した時点で，2 次関数，$y = x^n$ のタイプのべき関数，分数関数，無理関数，そして逆関数について学生は学習済みである。この中から 1 問を選択させたが，大部分の学生は (4) を選択した。(1) を選択したものは 12 名，(2) は 11 名，そして (3) は 4 名だけであった。

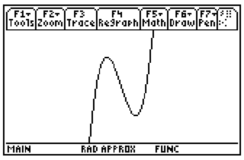


図 1

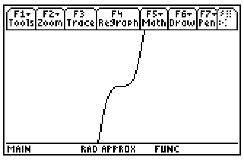


図 2

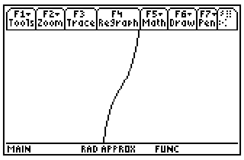


図 3

課題 (1) の意図は，a, b, c にいろいろな値をいれてグラフを表示させることにより，3 次関数のグラフには基本的に 3 つのパターンがあることに気づかせようとすることにあった。3 次関数の増加・減少や極値を調べることは微分法を学習する 2 年まで待たなければならないが，単に係数をいろいろ変えながらグラフを表示させるだけで，学生は次のようなことを指摘してきた。以下では，(1) を選択した 12 名の学生のレポートの概略を紹介する。

2.2　係数 a の意味

図 1 のタイプはどのようなときかに関して，「a の値を大きくしていくと山が大きくなる。」というような表現で係数 a の役割が指摘されている。ある学生は，「b, c を固定して a を増加させていくと左側に山ができ，反対に a を減少させていくと右側に谷ができる。」(図 4, 図 5) ことに気づいている。

この指摘は正しい。実際，$y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと，$y' = 3x^2 + 2ax + b$ より，極値を持つのは $D/4 = a^2 - 3b > 0$ のときである。したがって，b を固定して $|a|$ を増加させて

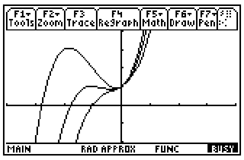


図 4
$a = 1, 2, 3$
$b = c = 1$

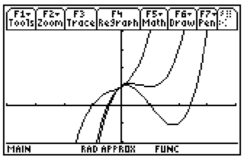


図 5
$a = 1, -2, -3$
$b = c = 1$

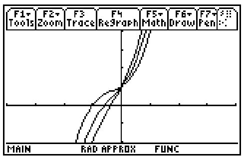


図 6
$b = 1, 2, 3$
$a = c = 1$

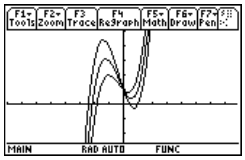


図 7
$b = -1, -2, -3$
$a = c = 1$

いくと $D>0$ となり $f(x)$ は極値を持つようになる。$x=\alpha,\beta$ のときに極値を取るとすると，$|f(\alpha)-f(\beta)|=\dfrac{4}{27}\sqrt{(a^2-3b)^3}$ であることより，b を固定して $|a|$ を増加させていくと極大値と極小値との差は増加していく。また，極大値・極小値の一方があまり変化しないことは，微分法を利用すると次のようにして確認できる。

今，b,c を固定して a を変化させる場合を考える。$f'(x)=3x^2+2ax+b$ であるから，極小値を取るのは $\alpha=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}$ のときである。そこで，極小値 $f(\alpha)$ を a の関数とみて a で微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{da}f(\alpha) &= 3\alpha^2\frac{d\alpha}{da}+\alpha^2+2a\alpha\frac{d\alpha}{da}+b\frac{d\alpha}{da}\\
&= (3\alpha^2+2a\alpha+b)\frac{d\alpha}{da}+\alpha^2\\
&= \alpha^2 = -\frac{2}{3}a\alpha-\frac{b}{3}\\
&= \frac{2}{9}a\cdot(a-\sqrt{a^2-3b})-\frac{b}{3}
\end{aligned}
$$

これより，$a\to\infty$ のときは，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{da}f(\alpha) &= \frac{2}{9}a\cdot\frac{3b}{a+\sqrt{a^2-3b}}-\frac{b}{3}\\
&= \frac{2}{9}\cdot\frac{3b}{1+\sqrt{1-3b/a^2}}-\frac{b}{3}\to 0
\end{aligned}
$$

である。したがって，$a\to\infty$ となるにつれ，極小値はあまり変化しなくなることが分かる。$a\to-\infty$ のときは，極大値に関して同様である。

多数のグラフを表示させてみる中で，それらのグラフは全て点対称であることに気づいた学生もいる。その学生は,「対称点の位置は $a>0$ のときは x 軸の負の側にあり，$a<0$ のときは x 軸の正の側にある。」ことを指摘している。この指摘も正しい。実際，$y''=6x+2a$ であることから，変曲点の x 座標は $-\dfrac{a}{3}$ である。対称性を指摘してきた学生も，その x 座標を求めようとすればさらに考察が深まったと思われる。

2.3　係数 b の意味

係数 b については,「b の値を大きくすると直線に近づいていく。」(図 6) というような表現で，その役割が指摘されている。ある学生は b だけではなく a との関係にも注目して,「b が大きくて a が小さい場合は直線に近いグラフになる。」としている。実際，b が大きくても，たとえば $a=b=5$ であれば $D>0$ となり極値が現れる。

また，ある学生はグラフ電卓の機能を利用してグラフと x 軸との交点の座標を求めている。そして，b を大きくしていくと交点の x 座標が 0 に近づいていくことなどから,「b が大きくなると y 軸に近づいていく。」としている。反対に，b の値を小さくすると「グラフの波が大きくなる。」(図 7) ことも指摘されている。

これらの指摘も正しい。実際，$y' = 3x^2 + 2ax + b = 0$ の判別式は $D/4 = a^2 - 3b$ であるので，b を正の側に増加させていくと $D < 0$ となる。このとき $y' = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{D}{3} > 0$ であるから，y は単調増加になり b が大きいほど接線の傾きも大きくなる。

逆に，$b \to -\infty$ のときは $D = a^2 - 3b > 0$ となるので，y は極値を持つようになる。今，$x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ のときに極値を取るとすると，α, β は $3x^2 + 2ax + b = 0$ の解であるから，

$$\frac{d}{db}f(\alpha) = \alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \qquad \frac{d}{db}f(\beta) = \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$$

となるので，$b \to -\infty$ につれ極値の変化の割合も大きくなる。つまり，この場合は，極大値と極小値の両方の絶対値が大きくなる。

2.4　学生の考察の仕方

数学の学習で，このような試行錯誤を通して何かを発見するような課題は，学生にとっても初めての体験だったと思われる。その考察の仕方は，大きく分けると次の 3 つパターンに分類できる。

(1) 2 つの係数を固定して残りの 1 つの係数だけを変化させてグラフの変化を調べたたもの。
例えば，$y = x^3 + ax^2 + x + 1$ において a の値を変えてグラフの形状を比較する。

(2) 係数の符号により場合分けして調べたもの。
例えば， 係数はすべて $|a| = |b| = |c| = 1$ の場合だけを考え，それらの符号の違いによるグラフの形状変化を比較する。

(3) 脈絡のないままグラフを表示させて，その特徴を述べたもの。

全般的に，グラフ電卓が表示するグラフの特徴を述べているだけの内容が多かったが，考え方次第では，1 年生でも極値などについて気づくことが可能であったと思われる。たとえば，$y = x^3 + ax^2, y = x^3 + bx, y = x^3 + c$ として，問題を簡易化して考えていけば，x 軸との共有点や極値のあり様について容易に気づくことができたであろう。また，グラフが図 1 と図 2 のタイプに分かれるのは係数がどのようなときであるかを追及していけば，それが $a^2 = 3b$ のときであることを試行錯誤的に突きとめることも可能であったと思われる。

対象学生は微分法をまだ学んでいないので,「何故か？」という部分に考察を進めることはできなかった。また，数学的な考え方自体に慣れていないこともあり，限られた例だけから「$a > 0$ のときは」というような一般的な述べ方をしている者も多かった。また，$y = x^3 + ax^2$ で考える等，問題を限定して考えた学生はいなかった。作業としては，グラフ電卓の表示する内容を単純に眺めるだけのことであるが，それでも学生は次のような感想を書いている。

- 僕は最初，y 軸と交わる点が決まるのは c の値だと予想していたが，全くその通りだったので自分で自分をすごいなあと思いました。
- こういう電卓みたいなものでやっていると，勉強みたいじゃなくて，楽しかったので，これ以上もっと調べてみたいと思った。

教師側が「あたり前」と感じている部分でも，それを学生が自分で気づいた場合は大きな感動として残ることを改めて実感させられる。また，このようなツールを利用することで，楽しみながら数学に触れさせることができることの意義も大きいものがあると思われる。

3　3 次関数 $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ に関する自由研究

前節で与えた関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は，3 つの係数 a, b, c について考えなければならないので，学生はグラフの特徴を捉えにくかったかもしれない。この課題を選択した学生が少かったことも，そのことを暗示しているように思われる。

そこで，今度は，因数分解された形でグラフの特徴を捉えさせることにした。時期は 11 月下旬である。なお，この時期，別な教員の担当する科目では，表を作成することによる高次不等式の解法を扱っている。

3.1　学生に与えた課題

学生に与えた課題は，以下のような内容である。

次のグラフは，a, b, c, d がどのようなときに，どのようなグラフになるか。1 つ以上を選択して，各自の考察結果をまとめて提出せよ。

(1) $y = (x-a)(x-b)(x-c)$　　(2) $y = x(x^2 + ax + b)$

(3) $y = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$　　(4) $y = x^2(x^2 + ax + b)$

この課題には 1ヶ月の考察期間を与えた。これらがどのようなグラフであるかは，授業では一切触れていない。半数以上の学生は (1) を選択した。課題 (1) の意図は，次の 3 点であり，極めて単純なことを意図しただけである。

① いろいろな a, b, c についてグラフを表示させてみることにより，3 次関数のグラフの特徴を捉えてほしいこと。

② $a = b = c$ のとき，$a = b < c$ のとき，$a < b = c$ のとき，$a < b < c$ のときとで場合分けして，そのグラフの特徴 (x 軸と交わるのか接するのか等) を押さえてほしいこと。

③ x 軸との共有点は，$x = a, b, c$ であることを確認してほしいこと。

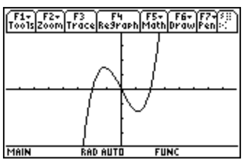


図 8

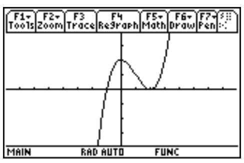


図 9

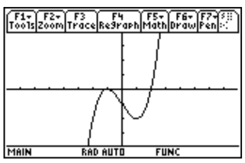


図 10

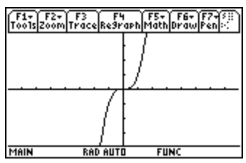


図 11

なお，前節の夏期休業の課題については，出題者側の意図や解説とともに，誰がどのようなことに気づいたか等をプリントにまとめ，学生に配布した。学年末に書かせた自由研究に関する学生の感想を見ると，そのプリントに自分の名前が載っていると励みになったようである。また，他の学生がすごい発見をしているのを見て，次は自分も頑張ろうという気持になったよ

うである。そのようなこともあってか，全般に，レポートの記述内容は，夏期休業の課題のときよりもレベルアップしているように感じられた。

以下は，課題 (1) に関して学生が気づいた内容である。

3.2　学生による指摘事項

グラフ電卓が表示するグラフを見て，そこから一般性のある特徴を見抜くことを求めたが，実に多くのことが指摘されている。式の形を因数分解された形で提示したことにより，グラフの特徴が捉えやすかったためではないかと思われる。その特徴について理由を添えて言及している学生は少なかったが，何かを「発見した」という思いを，成績の良し悪しに関わらず感じさせることができたことの意義は大きいと思われる。

グラフのタイプ

- グラフは，基本的に図 8〜図 11 のパターンしかない。
- $a = b = c$ のときは，$y = x^3$ を x 軸方向に a だけ平行移動したグラフである。
- a, b, c を同じ数だけ変えると，グラフは横にずれる。
- $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ の $x-a, x-b, x-c$ が左端とか中央にあるとかの位置は，グラフの形とは特に関係がない。
- $a < b < c$ で $b-a = c-b = k$(定数) のときは，同じグラフを x 軸方向に平行移動しただけである。
- $a = ki, b = -ki, c = 0$ のときは，$|k|$ が大きくなるにつれグラフの傾きが急になる。
(このとき，$y = (x-ki)(x+ik)x = x(x^2+k^2)$ より，$y' = 3x^2+k^2$ である。)

軸との共有点

- x 軸との共有点の x 座標は $x = a, b, c$ である。
- y 軸との共有点の y 座標は $-abc$ である。
- x 軸との共有点は，a, b, c がすべて等しいときは 1 個，2 つが等しいときは 2 個，すべて異なるときは 3 個である。
- a, b, c のうちどれか 2 つが等しいと，そこで x 軸と接する。
- $a \fallingdotseq b = c$ のときは $x = b = c$ で x 軸に接する。
- $y = x^2(x-a)$ は原点を通り，x 軸との他の共有点は $x = a$ である。
- a, b, c のうちの，どれか一つが 0 だと原点を通る。

グラフの対称性

- $y = (x-a)(x+a)^2$ と $y = (x+a)(x-a)^2$ は，原点に関して点対称である。
(実際，$f(x) = (x-a)(x+a)^2$ のとき，$-f(-x) = (x+a)(x-a)^2$ である。)
- a, b, c の符号をすべて逆にすると，原点に関して対称なグラフになる。
- $y = (x-a)(x+b)(x+c)$ と $y = (x+a)(x-b)(x-c)$，それから $y = (x+a)(x-b)(x+c)$

と $y=(x-a)(x+b)(x-c)$ は，原点に関して対称である。
- $y=x(x-a)(x+a)$ は，原点に関して点対称である。
- 3 次関数のグラフは，すべて点対称である。
- グラフの山の部分や谷の部分は，部分的に y 軸と平行な直線に関して対称に見えるが，そのような対称性はない。
- $y=(a-x)(b-x)(c-x)$ のグラフは，$y=(a-x)(b-x)(c-x)$ のグラフと x 軸に関して対称になる。

山と谷
- $a=b=c$ 以外のときは，必ず山と谷ができる。
- a,b,c の値の増加，減少により，山や谷の大きさが変わる。
- a,b,c が互いに近づくほど，グラフの山と谷との y 座標の差は小さくなる。
- a,b,c の値の差が大きくなるほど，山や谷が大きくなる。
- $a<b<c$ のとき，a の値が小さいほど左側の山が大きくなり，c の値が大きいほど左側の山は小さくなる。
- $a<b<c$ で $b-a=c-b$ のとき，山と谷の y 座標の絶対値は等しい。
- 山が $y<0$，谷が $y>0$ となることはない。
- $a>0$ のとき，$y=x^2(x-a)$ のグラフは，a が大きいほど $y<0$ となる x の範囲が広がり，y の最小値も小さくなる。
- a,b,c を同じ数だけ増減させても，グラフの山と谷の y 座標は変わらない。

その他
- $c=0$ で a,b が複素数のときは，$a=\alpha+\beta i, b=\alpha-\beta i$ の形のとき以外は，グラフが表示されない。
- 3 次不等式でグラフを利用すると，表を書くより簡単に解が求められる。
- $a>b=c$ のとき $b<x<a$ では $y<0$ であり，$a=b>c$ のとき $c<x<b$ では $y>0$ である。
- 定義域や値域は実数全体である。

3.3 極値に関する言及

提出されたレポートの中で，2 名の学生が，この関数の極値を求める方法について言及してきた。ただし,「極値」という術語はまだ学習していないので，学生は山・谷の頂点とか最大値・最小値という言葉で表現しているが，内容的には極値に関する考察になっている。

阿部裕司君のレポート

阿部君は，x 軸との共有点の座標が a,b,c であることや，y 軸との交点は $-abc$ であることに触れた後，グラフの形には，a,b,c がすべて異なるときや，$a=b,\ b=c,\ a=b=c$ のときの 4

つのパターンがあり，$a=b=c$ のときは $y=x^3$ のグラフを x 軸方向に平行移動したものであることをあっさりと見抜く。そして，$b-a=c-b$ のときの極値について考察をすすめる。

まず，$b-a=c-b$ の値 (この値を阿部君は「垣間」と呼んでいる）を少しずつ大きくしながら，極大値をグラフ電卓の機能により求めて表を作成する。そして，3 次関数であることや，垣間が 1 のときの極大値は 0.3849 であることから，他の場合は $0.3849\times(\text{垣間})^3$ ではないかと予想し，表から正しいことを確認する。実際，$0.3849\times 3^3=10.3923$ である。

垣間	極大値
1	0.3849
2	3.0792
3	10.3923
4	24.6336
5	48.1125

次に，極値の y 座標が分かる以上は x 座標も求まるはずであると考え，同じ条件の関数として $y=(x-j)x(x+j)$ を考え，j の値と極大値を与える x 座標との関係を調べる。そして，同様の表を作成する中で，極値を与える点の x 座標は j に比例していて $x=-0.57735j$ であることに気づいている。

j	頂点の x 座標
1	-0.57735
2	-1.1547
3	-1.73205

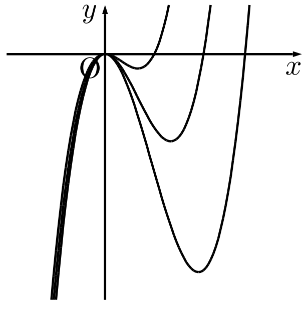
以上を $y=(x-a)(x-b)(x-c), (a<b<c)$ の場合について述べて，次の結論を得る。

$b-a=c-b$ となる式において，
山の頂点の座標は $(b-0.57735(b-a), 0.3849(b-a)^3)$ であり，
谷の最下点の座標は $(b+0.57735(b-a), -0.3849(b-a)^3)$ である。

この結論は正しい。実際，平行移動すれば $y=x(x^2-a^2)=x^3-a^2x$, $(a>0)$ のタイプを考えることになり，$y'=3x^2-a^2$ であることから極値をとるのは $x=\pm a/\sqrt{3}$ のときである。このときの y 座標は $y=\mp(2\sqrt{3}/9)a^3$ である。この値を小数に直すと，$1/\sqrt{3}=0.57735$, $2\sqrt{3}/9=0.3849$ である。

阿部君はこの結論で満足することなく，次には $a=b$ のときの谷の頂点について考察する。問題を簡単にするため $a=b=0$ の場合について考え，$y=x^2(x-c)$, $(c>0)$ の谷の頂点の y 座標と c とを対応させた表を作る。そして，極大値の場合の結果から類推して，容易に x 座標は $0.666667c$ であり，y 座標は $-0.148148c^3$ であることを見抜いている。

c	頂点の x 座標	y の最低値
1	0.666667	-0.148148
2	1.33333	-1.18519
3	2	-4
4	2.66667	-9.48148
5	3.33333	-18.5185
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	$0.666667c$	$-0.148148c^3$



$y=x^2(x-c)$, $c<0$ のときの山の頂点についても同様であることから次の結論を得る。

$y=(x-a)^2(x-b)$，$(a<b)$ となる式において
谷の最低値の座標は $(a+0.66667(b-a), -0.148148(b-a)^3)$ であり，
$y=(x-a)(x-b)^2$，$(a<b)$ となる式において
山の最大値の座標は $(a-0.666667(b-a), 0.148148(b-a)^3)$ である。

この結論も正しい。実際，$y=x^2(x-a)=x^3-ax^2$ の場合，$y'=3x^2-2ax$ であるから，極値を取るのは $x=0, 2a/3$ のときである。このときの y 座標は，$y=0, -4a^3/27$ であり，小数に直すと $2/3=0.666667$，$4/27=0.148148$ である。

阿部君の思考過程を見ると，まず，考えやすいように問題を簡易化し，段階を追って状況をグラフ電卓を利用して調べ，それをもとに類推し，そして正しいことを確認する。確認した後は，さらに別な問題設定をして，同様のことを繰り返すという，まさに数学的思考そのものが行われている。この学生は，成績上位の学生である。

3.4 熊谷一生君のレポート

この学生は，文字式の計算で極値を求める式を発見してきた。熊谷君は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の場合は $y=f(x)=ax^2$ のグラフを適当に平行移動して $y=f(x-p)+q$ の形に表せたことから，この3次関数についても同じような変形ができないだろうか，ということを考える。そして，放物線の場合の変形過程の類似計算を手計算で行うことにより，

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+a\left\{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^2}\right)\right\}$$

を導き，$(x-a)(x-b)(x-c)$ の展開式にあてはめて

$$(*)\qquad (x-a)(x-b)(x-c)=\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^3+\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x \\ +\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

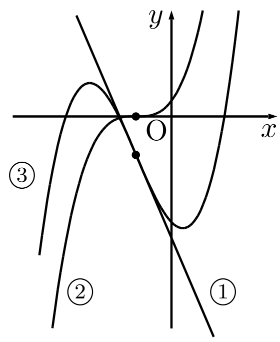
を得る。放物線の場合の類似で考えると，y 軸方向の平行移動が

$$\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

となるが，x が含まれているので，この部分は y 軸方向の平行移動を表すとはいえないことに気づく。そこで，彼は，

$$\begin{cases} y=\dfrac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\dfrac{(a+b+c)^3}{27}-abc & \text{①} \\ y=\left(x-\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 & \text{②} \\ y=(x-a)(x-b)(x-c) & \text{③} \end{cases}$$

の 3 つのグラフを別々に描いてみて，①③のグラフの共有点の x 座標は，②のグラフの x 軸との共有点の x 座標と一致することに気づく。そして，①式に x が含まれているために，それを②式に加えると単なる平行移動ではなくグラフ自体が変わってしまうのだと考える。したがって，3 次関数の波の打ち方には，①の 1 次式の傾きが大きく関わっており，$y=f(x-p)+q$ の式において，$(*)$ 式の右辺の x の 1 次の項は $f(x)$ の方に含めて考えるべきであるとの結論に至る。



そして，$f(x)=x^3+Ax$ の 1 次式の係数 A を求めるため，以下のような変形を行う。

$$A=\frac{a+b+c}{3},\quad B=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}\quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned}(*)\ \text{式の右辺} &= (x-A)^3-Bx+A^3-abc\\ &= (x-A)^3-B(x-A)+A^3-AB-abc\end{aligned}$$

となることから，以下を得る。

$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，

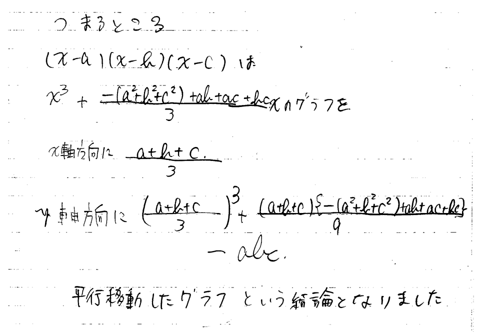
$$y=x^3-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}x$$

のグラフを，x 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$，y 軸方向には

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9}-abc$$

だけ平行移動したものである。

次に，彼は，$y=x^3+\alpha x$ のグラフを考察する。彼は，すでに，3 次関数のグラフの波の打ち方は，この関数の α の値に依ることを知っている。そして，$y=x^3+\alpha x$ のグラフは $\alpha \geqq 0$ のときは波を打たず，$\alpha<0$ のときに波を打つことに気づく。$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の多くのグラフは波を打つことから，この関数の α に相当する式から

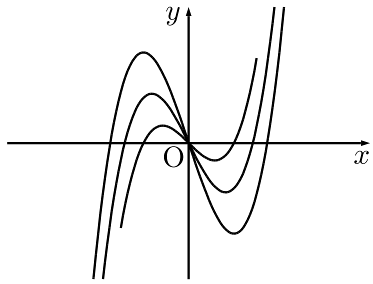


$$-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\leqq 0$$

という仮説を立てるが，彼は証明はできなかった。しかし，周知のように，この不等式は

$$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqq 0$$

と変形できるので，熊谷君の仮説は正しい。



次に，$y = x^3 + \alpha x$ のグラフの極値に関心を寄せ，極小値を与える x 座標をグラフ電卓の機能を利用して求める。そして，$\alpha = -1$ のときの極小値は $x = 0.57735$ のとき，$\alpha = -2$ のときの極小値は $x = 0.816497$ のとき，$\alpha = -3$ のときの極小値は $x = 1$ のときであり，

$$(0.57735)^2 = 0.33333 \fallingdotseq \frac{1}{3}, \quad (0.816497)^2 = 0.66667 \fallingdotseq \frac{2}{3}, \quad 1^2 = 1 = \frac{3}{3}$$

であることから，$\alpha < 0$ のとき $y = x^3 + \alpha x$ の極小値は $x = \sqrt{-\alpha/3}$ のときであるということを発見する。また，多数のグラフを表示させる中で，この関数は点対称であるということも見抜いている。そして，これらを $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ の平行移動に関する事柄と重ね合わせることにより，次の結論を得る。

$X = \dfrac{a+b+c}{3}$，$\alpha = -\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ とおくと，
$y = (x-a)(x-b)(x-c)$ の変曲点の座標は $(X, (X-a)(X-b)(X-c))$ であり，
極大値は $\left(X - \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}},\ \left(X - \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}} - a\right)\left(X - \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}} - b\right)\left(X - \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}} - c\right)\right)$
極小値は $\left(X + \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}},\ \left(X + \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}} - a\right)\left(X + \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}} - b\right)\left(X + \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}} - c\right)\right)$
のときである。

変曲点や極大値・極小値という言葉を彼はまだ学習していないが，グラフの山や谷の頂点の座標と点対称となる中心点の座標を，記号も含めて上記の形で明確に表現している。

この学生も成績上位の学生であるが，手計算を交えながら，グラフ電卓をまさに思考のツールとして利用している。学年末に書かせた感想では,「自由研究は，やっているうちに，どんどんおもしろくなってきて，めちゃくちゃ頑張りました。」と書いている。内容的にも立派な数学を行っているといえよう。

4　自由研究に関する学生の感想

貸与したグラフ電卓が返却される学年末には，自由研究を行った感想について自由記述を求めた。以下は，その自由研究を行った高専１年生の感想である。

- 数学は奥が深いなあと思いました。
- 数学とはおもしろいものだなあと思いました。
- 自由研究を通して，より数学に興味がもてた。
- 規則性をみつけたとき，とてもうれしかったです。
- 問題演習よりやりがいがあった。
- 問題を解くのではなく，自分で発見するところが苦労でもあり楽しかった。

- 通常の課題の倍以上の時間がかかったが，その分，自分で何かを発見できたりするとうれしかった。
- 考えても疑問がまた出てきて，またそれについて考えるのが楽しかった。
- 解説プリントでは，他の人の考え方がのっていて，新しい視点をみつけれた。
- グラフについての特徴，性質などを発見するのが楽しかった。数学とは，調べてみると沢山のことが発見できるんだと思いました。
- グラフの規則性を見つけるのは楽しかったけど，言葉にうまく表せなかった。
- けっこう難しかったが，あたらしい知識を得ることができた。
- どの値がどうなっているときに，どのようなグラフになるかを１つ１つするのが面倒くさいと思ったけど，達成感が得られました。
- 難しかったけど，いろんな発見があった。
- 普段あまりしない「良く見て考える」といったことをする機会になったと思う。
- ただの式だけだとやる気がしない課題でも，数ナビのグラフ機能を使うと分かりやすいし，楽しいのでやりがいがあった。数学の楽しさが分かったような気がした。
- 解説プリントでは，すごい発見をしている人がいることが分かって，自分ももう少し頑張れば良かったと思った。
- まったくできなかったので，とてもつらかった。

5　数学における自由研究の意義

通常の問題演習では，学生は教師から与えられた問題を「解く」ことが中心になる。そこでは正解か誤答しかない。しかし，この自由研究では，提示された課題の中から自分で関心を持ったことを調べて，それに関する自分の思考過程をレポートにまとめることが求められる。グラフを描くことではなく，グラフ電卓に表示されるグラフから何を読み取り，それをどのように考えるかが問われることになる。

ある学生は，単にグラフ電卓の表示する内容を幾つか書いて，その特徴を述べるだけに留まっている。ある学生は，a, b, c のうち２つを固定して，一つの値を少しずつ変えながらグラフを表示させ，その値の意味する内容を汲み取ろうとしている。ある学生は，最初に予想を立て，その予想が正しいことをグラフ電卓を利用して確認しようとしている。また，ある学生は，手計算も交えながら考察を進めようとしている。まさに，学生のレベルに応じた様々なまとめ方がなされている。

そして，学生の感想を見ると，通常の問題解法と比べて,「次々に自分で問題を設定して考える」「自分で何かを発見する」という部分に，おもしろさ，達成感，やりがいを感じたようである。グラフ電卓を利用することで，個々の学生の能力に応じてそれなりの発見があった。教師側が「あたり前」と感じる部分でも，それが「あたり前」ではない学生にとっては大きな発見である。そのことを，成績の上下に関わらず体験させることができたことに，特に大きな意義があると思われる。

また，提出されたレポートにどのようなことが書かれていたかは，後でプリントにまとめて学生に報告した。その中では，学生が指摘してきた事項と共に，それに気づいた学生の氏名も含めた。同じ問題を考える中で，他の学生がどのように考えたのかを自分の考えと比較することができる。そのプリントに自分の名前が載ることは大きな励みであると同時に，自分の気づかなかったことを同学年の他の学生が気づいたということには大きな刺激を受けたと思われる。

なお，学生にグラフ電卓を貸与はしているが，実際の授業の中では積極利用することはあまりなかった。授業の内容は関数についてであるので，学生は必要に応じて関数のグラフを確認することに使用した。日常の授業は，黒板を利用した伝統的な数学の授業である。つまり，これらの課題を与えるにあたって，特段の指導は全くしていないことを強調しておきたい。学生に説明したのはグラフ電卓の使用法だけある。与えられた課題をどのように考えてレポートにまとめるべきかは，すべて学生が自分で考えて行ったことである。

しかし，その一方では,「まったくできなかったので，つらかった」という感想も少なからずあった。これらの学生には，何らかの配慮をすることが必要と感じられた。

6　おわりに

学生に与えた課題自体は，特に新規性のあるものではない。グラフと x 軸との共有点のあり方により，グラフの形状に対する感覚をつかんでもらえればということを意図しただけの課題である。単純な課題であるにも関わらず，提出されたレポートは，それぞれが一般性のある性質を求めて探究を試みており，相当に苦心したことがうかがわれるものばかりであった。自分で問題意識をもち，それを解決しようと試みる行為を，多くの学生が体験した。グラフ電卓なくして，このような体験をさせることはできなかったであろう。既存の単純な課題を与えるだけで，学生の方で勝手に問題を膨らませて数学を楽しんでいる趣がある。グラフ電卓の利用法の裾野の大きさと教育上の限りない効果を，改めて感じさせられた思いがする。

なお，この研究の一部は，平成16･17年度科学研究費補助金･基盤研究 (C)，課題番号 16500566 の支援を受けて行われた。