数学的な気づきと試行錯誤を伴う課題の評価方法について

梅野　善雄*
(一関工業高等専門学校)

The Method of Evaluating Assignments that Require Mathematical Awareness and Trial-And-Error

UMENO　Yoshio
(Ichinoseki National College of Technology)

It is helpful to become aware of something in any activities that need creativity. To help the students gain such awareness in mathematics, we gave them several assignments, which needed mathematical trial-and-error, with graphing calculators. The reports on the open-ended assignment, which were submitted by the students, were better than expected; thus it was very difficult for the teachers to evaluate them in a general assessment method.

We shall propose a useful evaluation method by analyzing the mathematical attainment level of the reports from various angles. The method seems to assess not only the attainment level in mathematics but also the degree of students' senses of accomplishment at having experienced the mathematical awareness.

KEYWORDS: evaluating method, creativity, open-ended problem

1. はじめに

科学技術立国を目指す我が国にとって，理工系学生の創造力を育成することは最重要課題である。そのような創造力は，一つの問題を考え続けて，まず「何かに気づく」ことが最初の出発点になろう。漠然とした問題の中から何か一般性のある性質を見出したときの喜びは，通常の問題を解いた時とは比較できない喜びがある。

著者は，学生にそのような「気づき」を得させるために，解答の仕方が一通りとは限らず，さらに数学的な試行錯誤を伴う課題を「自由研究」として学生に課してきた ?)?)。試行錯誤を行うための補助ツールとしては，数式処理のできるグラフ電卓を利用させた。この課題に対して，学生は自由な発想をして実に多様な内容のレポートを提出してきた。中には，教師が思いもしない考え方をしてきた学生も少なくない。

しかし，レポートが提出された後は，その多様な内容を含むレポートをどのように評価すべきかについて教師は頭を悩ませることになる。以下では，このような解答の仕方が一通りとは限らないような課題に対して提出されたレポートを，どのように評価すべきかについて考察する。

2. 試行錯誤を伴う数学課題

高専における通常の数学の授業は，最初に概念や例題等を解説し，その後は定型的な問題を解かせるスタイルで行なわれる。総合的な応用問題を考えさせたくとも，そのような時間はなかなか取れないのが現状と思われる。また，成績下位の学生にとっては，分からない問題は友人や教員に聞く以外に解決策はない場合が多い。

このような状況の一つの改善策として，著者は数式処理のできるグラフ電卓を貸与した授業を行っている。単純計算や単なるグラフ表示を電卓側に任せてしまえば，計算時間を縮めると同時に，個々の学生のもつ数学に関する能力差の問題もある程度解消することができる。

さらには，その電卓を利用して数学に関する試行錯誤を行わさせることにより，何らかの数学的法則に気づかせる課題を課すことも可能になる。その課題の概要については本誌でもすでに報告済みであるが，学生は与えられたテーマにつき自分

*一般教科自然科学系　umesan@ichinoseki.ac.jp

の考えを発展させ，教師が予想した以上の考察を行っている[7)]。

表 1 は，そのような課題の中で「三平方の定理」に関して学生から指摘された事項をまとめたものである[7)]。課題の内容は，三平方の定理を成立させる自然数をできるだけたくさん見つけ，そのような自然数はどのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考察させるものである。この課題は，1 年生の冬季休業の課題で提示した 3 課題のうちの 1 題である。167 名中 92 名が三平方の定理の課題を選択し，表 1 にあるような 35 の事項を指摘してきた。一人で最大 8 つの事項を指摘した学生もいる。これらの指摘事項をもとに，レポートの評価方法について考察する。

3. 試行錯誤を伴う課題の評価

文献 1) では，提出された学生のレポート内容の数学としてみた到達度を 3 段階で評価した。「よくそこまで気づいた」という内容を到達度が「高い」，ちょっと考えればすぐ気づく内容を到達度が「低い」，それ以外の指摘を「中間」としたが，この評価は実際にはレポートの中で指摘されている事項のうち，1 つの主要な指摘事項に対する評価であったといえる。学生によっては多数の事項を指摘した学生もいる。考察にかなりの時間をかけている学生もいるので，もう少し細かく評価することが望ましいと思われる。

また，教師にとっては平易な内容でも，学生にとっては一大発見としての内容であるかもしれない。たとえば，$a^2 + b^2 = c^2$ が成立すれば $(na)^2 + (nb)^2 = (nc)^2$ も成立することを，n の値を次々に変えながらレポート用紙 5 枚にわたって書いてきた学生もいる。この学生にとっては，このことを確かめながら「$n = 2$ でも成立する」「$n = 3$ でも成立する」という高揚感があったのではないかと推察される。数学としての到達度ばかりではなく，このような個々の学生の「気づき」のようなものも大事にしたい。そこで，数学としての到達度ばかりではなく，他に評価項目にできそうなものがないかを模索すべく，以下の内容を設定して検討した。

(1) 到達度・到達値・到達区分

指摘された事項の数は，どれだけ多くのことに気づいたかを示すものである。しかし，平易な内容を沢山指摘した場合と，指摘数は少くともその内容が数学的に秀れた内容である場合とは区別されるべきであろう。

そこで，個々の指摘事項の数学的な到達度について検討し，それを 3 段階で区分した。ちょっと考えるとすぐ分かる内容を「到達度 1」，一般的な規則性について言及したり証明や式変形を伴う形で記述された内容は「到達度 3」，それ以外を「到達度 2」とした。表 1 の右端の値は，各指摘事項についてその到達度を判定したものである。

そして，個々の学生ごとに指摘事項の到達度の合計を求め，その値を学生の「到達値」とした。到達値は 1 から 22 までの分布であり，平均は 5.39 である。その到達値の高低をもとに全体を 4 つに区分し，それぞれ到達値が「低い (1～2，23 名)」「やや低い (3～5，28 名)」「やや高い (6～7，20 名)」「高い (8 以上，23 名)」として区分した。

(2) 希少度・希少値・希少区分

誰もが気づく内容の指摘と，他の誰も気づかなかった内容の指摘とは区別されるべきと思われる。「他に誰も気づかなかった指摘」の判断は，指摘事項の数の総数で行った。具体的には，表 1 の (1)～(2) のように半数以上の者が気づいた内容を「希少度 1」，表 1 の (7) 以降のように 10 名以下の者しか気づかなかった内容を「希少度 3」とし，それ以外の指摘を「希少度 2」として区別した。個々の学生の指摘事項ごとに希少度の合計を求め，その値を学生の「希少値」とした。その値は 1 から 20 までの分布で平均は 5.95 である。そして，その高低をもとに全体を 3 つに区分し，それぞれ希少値が「低い (1～3，20 名)」「中間 (4～7，36 名)」「高い (8 以上，28 名)」として区分した。

(3) 一般化の程度

数学の定理・公式は，できるだけ一般化して抽象的な形で書かれている。そこで，自分の気づいた結果をそのような形で表現しようとしているかどうかを 3 段階で区分した。記述にそのような意図が見られないものは「傾向無し (25 名)」，部分的にそのような傾向が認められるものを「傾向有り (42 名)」，そして一般的な形でまとめようと明確に判断されるものを「一般化 (27 名)」とした。

例えば，具体例を多数あげて何らかの性質を述べただけのものは「傾向無し」，その性質を文字を使って表現しようとしている場合が，その表現内容により「傾向有り」や「一般化」とした。文字式を使って証明している場合は「一般化」と判断した。また，三平方の定理を成立させる a, b, c の求め方について述べている場合も「一般化」とした。

表 1 三平方の定理に関する学生の発見

No	三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ に関する学生の発見	数	到達度
(1)	$a^2+b^2=c^2$ が成立すれば，$(na)^2+(nb)^2=(nc)^2$ も成立する	48	1
(2)	a,b,c が連続するのは，$a=3,\ b=4,\ c=5$ のときしかない	44	
	到達度は，単なる指摘は 2，証明つきで指摘した場合は 3 とした		
(3)	b,c が連続するとき，a は奇数である	32	1
(4)	b,c が連続するとき，それらは 4 の倍数ずつ増えていく	26	2
(5)	b,c が連続するとき，$a^2=b+c$ である	20	2
(6)	b,c が連続するとき，a,b,c のうちの 2 つの数は奇数である	14	2
(7)	b,c が連続するのは，奇数 a に対して $b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$ のときである	8	3
(8)	b,c が連続するのは，a^2 を 2 で割った商を b とすればよい	5	3
(9)	連続する 2 数の平方の差は奇数である	3	2
(10)	b,c が連続する場合として，次の場合がある $(2n+1)^2+(2(n^2+n))^2=(2(n^2+n)+1)^2$	3	3
(11)	a,b が奇数のとき，$a^2+b^2=c^2$ は成立しない	3	3
(12)	a,b が連続するとき，$c^2=2ab+1$ である	2	3
(13)	b,c が連続するとき，次のことが成立する $(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+\cdots+1))^2=(4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$	1	3
(14)	b,c が連続するとき，$(a-3)/2+1=n$ とおくと，$b=$ (前の式の b) $+4n$ である	1	3
(15)	b,c が連続するとき，$3^2+4^2=5^2$ から数えて k 段目の式の b は，$b=ak+k$ である。たとえば $a=9$ は 4 段目なので $b=9\times4+4=40$ である	1	3
(16)	b,c が連続するとき，b は a を 2 で何回割れたかを $a+1$ に掛けた値である。たとえば，$17/2=8.5$ なので，$b=(17+1)\times8=144$ より，$17^2+144^2=145^2$ である	1	3
(17)	$a^2+b^2=(b+1)^2$ に対して，その次の式を $(a+2)^2+B^2=(B+1)^2$ とすると，$B=b+((a+2)^2-a^2)/2$ である	1	3
(18)	$a^2+b^2=c^2$ で a,b が連続するとき，a が小さい順に式を書くとき n 番目の式を $a_n^2+b_n^2=c_n^2$ $(a_n<b_n)$ とすると，$a_{n+1}=6a_n-(a_{n-1}-2)$ である	1	3
(19)	$3^2+4^2=5^2$ が成立するので，$333^2+444^2=555^2$ や $3333^2+4444^2=5555^2$ なども成立する	1	3
(20)	どんなときでも，$a^2+1^2=b^2$ $(a\fallingdotseq 0)$ は成立しない	1	2
(21)	a,b,c の中には，一定量ずつ増えているものがある。$6^2+8^2=10^2$ は 2 ずつ増えている。12 ずつ増えるのは，$a^2+(a+12)^2=(a+24)^2$ を解いて $a=36$	1	3
(22)	b,c が連続するとき，$a+b+c$ の第 2 階差は 8 である	1	3
(23)	b,c が連続するとき，$a>3$ であれば $b>2a$ である	1	2
(24)	b の 1 の位が 1,3,6,8 のとき，b,c が連続するようにはできない	1	3
(25)	b,c が連続するのは，b の 1 の位の数が 0,2,4 のときだけである	1	3
(26)	$3a=b+c$ のとき，$a:b:c=3:4:5$ である	1	3
(27)	$3a=b+c,\ 4a=b+c,\ 5a=b+c$ となるものが存在するので，$na=b+c$ となるものが存在するはずである	1	3
(28)	$a+b-c$ は 2 の倍数である	1	3
(29)	b,c が連続するとき，abc は 60 の倍数である	1	3
	(以下，省略する。指摘事項の総数は 35 である。)		

(4) 思考の流れ

課題を考えるにあたり，自分で思考を発展させて，与えられた内容ばかりではなくいろいろなケースについて考えようとしているかどうかを 3 段階で区分した。単に個々の結果を指摘しただけのものは「指摘だけ (14 名)」，別な場合はどうなるかを自分で問題設定して考えているものは「単発的 (38 名)」，いろいろなケースを次々に調べようとしているものは「連鎖的 (42 名)」とした。

連鎖的と判断した例として，例えばある学生は，1 から 50 までの自然数の平方を計算して三平方の定理が成立する自然数の組を多数発見する (この指摘だけで終わっていれば「指摘だけ」の判断になる)。それを 3 数が連続する場合，2 数が連続する場合，どの 2 数も連続しない場合に分類して，b と c が連続する場合は $a^2 = b + c$ であることに気づく。次に，$b + c = 3a, 4a, 5a$ となる例があることにも気づき，一般に $na = b + c$ となる場合があるのではないかと予想する。そして，$6a = b+c$ となる例を新たに発見するが，$2a = b + c$ となるものは見つけられなかった。そのことより，$na = b+c$ となる場合があるのは $n > 2$ のときであろうと予想している。

(5) 証明の有無

一般的な規則性を発見しても，その後の証明が数学では重要である。そこで，自分が指摘した事項の証明を与えているかどうかで 2 つに区分した。「証明有り (22 名)」と「証明無し (72 名)」である。多数の指摘事項があるときは，そのうちの 1 つでも証明している場合は「証明有り」とした。

(6) 推測と確認

幾つかの具体例に共通する性質を見い出したとしても，その性質は他の例では成立しない場合がある。そのようなとき，その性質は一般性のある性質とはいえない。そこで，自分が指摘した事項が正しいかどうかを，別な形で確認しているかどうかで 2 つに区分した。「確認有り (44 名)」「確認無し (50 名)」である。

(7) 成績区分

成績との関連性を見るため，定期試験 (4 回) の成績の平均値により全体を 4 つに区分し，「成績上位 (27 名)」「成績中上 (24 名)」「成績中下 (22 名)」「成績下位 (21 名)」と区分した。

(8) 「発見」認知の有無

試行錯誤を伴う課題を考えることで「数学的な事で新しい発見があった」という思いがあったかどうかについて，学年末にアンケート調査を行った。三平方の定理を選択した学生 (94 名) のこの問への回答を 3 段階で区分し，「そうである (57 名)」を「肯定」，「どちらともいえない (25 名)」を「中間」，そして「そうではない (12 名)」を「否定」とする。他の課題を考えることでこのような思いが得られた場合も考えられるが，アンケート調査の直近に取り組んだ課題は三平方の定理であるので，この回答は三平方の定理を考えることで得られた場合が多いと推測される。

4. 分析項目別にみた到達値

ここでは，前節の分析項目ごとに，三平方の定理に関して提出されたレポートの数学上の到達値 (各指摘事項の到達度の和) について分析する。

表 2 により学年末の成績を到達区分別にみると，ある程度成績との関連性が認められるがそれほど強いものではない。到達値と成績との相関係数を求めると 0.142 である。到達値には試験で測定される数学の成績とは異なる性質が含まれているのではないかと思われる。SD は標準偏差である。

表 3 は到達値と希少値との関係をみたものである。これらの間には強い関連性が認められるが，到達値が高い者ほど誰もがあまり気づかないことを多く指摘してきているので当然の結果と思われる。両者の相関係数は 0.896 である。

表 4 は，到達値と証明や確認の有無との関係をみたものである。到達値は，証明の有無との関連性は認められるが，確認の有無との関連性はみられない。

表 2　到達区分と成績

		到達度区分			
	全体	低い	やや底	やや高	高い
数	94	23	28	20	23
成績	50.8	48.7	50.6	50.2	53.6
SD	9.27	8.38	8.41	9.81	10.5

表 3　到達区分と希少値

		到達度区分			
	全体	低い	やや低	やや高	高い
	数	23	28	20	23
希少値	5.95	10.8	4.14	7.05	2.26
SD	3.91	3.43	1.27	1.85	1.82

表4　証明と確認の有無別にみた到達値

		証明の有無		確認の有無	
	全体	有り	無し	有り	無し
	数	22	72	44	50
到達値	5.39	8.05	4.58	5.41	5.38
SD	3.66	4.76	2.84	3.93	3.46

表5　一般化の有無別にみた到達値

		一般化の有無		
	全体	一般化	有り	無し
	数	27	42	25
到達値	5.39	7.78	5.24	3.08
SD	3.66	4.40	2.91	2.14

表6　思考の流れ別にみた到達値

		思考の流れ		
	全体	連鎖	単発	指摘
	数	42	38	14
到達値	5.39	7.29	4.29	2.71
SD	3.66	4.08	2.52	1.59

表5と表6は，一般化をしようとしているかどうか，また思考の流れが連鎖的かどうかで到達値をみたものである。これらの表をみると，いずれも強い関連性が認められる。一般化の傾向が強いほど到達値は高く，思考の流れが連鎖的である場合も同様である。一般性のあるいろいろな性質に気づくにはこのような思考過程が必要になるので，これも当然の結果と思われる。到達値がこれらと強く関連しているということは，この値が数学的な考え方の程度をある程度表しているのではないかと思われる。

さらに，この2つの項目をクロスさせて到達値をみたのが，表7である。一般化の有無と思考の流れをクロスさせて各セルごとに到達値を計算すると，左斜めの方向に一定の傾向がみられる。そこで，各セルを (一般化，思考の流れ) の形で表すとき，(1,1) をグループ1，(1,2)+(2,1) をグループ2，(1,3)+(2,2)+(3,1) をグループ3，(2,3)+(3,2) をグループ4，そして (3,3) をグループ5として新たに区分する。

表7　一般化の有無と思考の流れ別にみた到達値

	思考の流れ			
	指摘	単発	連鎖	全体
無し	2.11(9)	3.82(11)	3.20(5)	3.08
有り	4.00(3)	4.18(22)	6.82(17)	5.24
一般化	3.50(2)	5.80(5)	8.70(20)	7.78
全体	2.71(14)	4.29(38)	7.29(42)	5.39

表8は，この新区分ごとに到達値と成績を調べたものである。この新区分では，到達値がさらにはっきり分離される反面，成績との関連性は逆に弱まっていることが分かる。

このような試行錯誤を通して，学生は普段の数学の学習とは違っていろいろなことに気づいている。そのような気づきを得ることでどのような感想を持ったかを調べるため，年度末にアンケート調査 (記名式) を行った。

表9は，自由研究で新しい発見があったかどうかを問う質問項目への回答をみたものである。グループ番号が上がるほど肯定的な回答が増え,「新しい発見があった」と感じる者が増えている。思

表8　新区分による到達値の平均

グループ	1	2	3	4	5	全体
数	9	14	29	22	20	94
到達値	2.11	3.86	3.97	6.59	8.70	5.39
SD	1.05	2.25	2.69	2.28	4.71	3.66
成績	50.0	49.6	49.5	51.4	53.2	50.8
SD	7.77	10.7	8.53	11.1	7.87	9.28

表9　数学的なことで新しい発見があった

項目		否定	中間	肯定	%(数)
	全体	12.8 (12)	26.6 (25)	60.6 (57)	100.0 (94)
到達区分	低い	8.7 (2)	30.4 (7)	60.9 (14)	100.0 (23)
	やや低	21.4 (6)	25.0 (7)	53.6 (15)	100.0 (28)
	やや高	5.0 (1)	30.0 (6)	65.0 (13)	100.0 (20)
	高い	13.0 (3)	21.7 (5)	65.2 (15)	100.0 (23)
新区分	1	22.2 (2)	44.4 (4)	33.3 (3)	100.0 (9)
	2	21.4 (3)	35.7 (5)	42.8 (6)	100.0 (14)
	3	10.3 (3)	31.0 (9)	58.6 (17)	100.0 (29)
	4	13.6 (3)	18.2 (4)	68.2 (15)	100.0 (22)
	5	5.0 (1)	15.0 (3)	80.0 (16)	100.0 (20)

考を次々に発展させて一般性のある規則性を探そうとした者ほど，発見の喜びを感じることができたのではないかと思われる。その意味では，この到達度に関する新区分は，到達値による到達区分よりも，新たな気づきがあったかどうかの認識を反映したものになっているように思われる。

5. まとめ

数学的な試行錯誤を伴いながら数学に関する「気づき」を得させて，それをレポートにまとめさせる自由研究を学生に課した。レポートの内容は多様な記述の仕方になり一通りの解答があるわけではない。それをどのように評価すべきかについて分析した。

その結果，数学の成績との関連性が弱く，レポートをまとめることで数学に関する気づきを得たかどうかの認知とも関連すると思われる一つの評価方法を提案することができた。それは，一般性のある記述の仕方をしようとしているかどうか，そして，次々に思考を連鎖させて考えようとしているかどうかについて，それぞれ3段階で判定する。そして，2つの項目の合計点で評価するものである。指摘された事項の数を数える必要もなければ，指摘事項の数学としてみた場合の到達度を判定する必要もない。レポートの考察の進め方について，一般性のある記述をしようとしているかどうか，また，思考の展開が次々に発展しているかどうかをみるだけである。判定者の主観がかなり混じる部分ではあるが，数学に関する部分の判定であるので，見る人による誤差にそれほど大きなものは現れにくいように思われる。

しかし，この評価方法は，三平方の定理に関するレポートだけをもとにした方法である。また,「新しい発見があった」とする学生の回答も年間を通しての感想であり，必ずしも三平方の定理に関して得られたものとは限らない。この評価方法を他の課題に対して行っても同様の傾向が見られるかどうかついては，今後さらに検討を加えていきたい。

【付記】本研究の一部は平成 16〜17 年度科学研究費補助金・基盤研究 (C) 課題番号 16500566 (研究代表者：梅野善雄) による支援を受けている。

参考文献

1) 梅野善雄：数学教育における創造力を育む試み，論文集「高専教育」，Vol.29，pp.135–140 (2006)
2) 梅野善雄：試行錯誤で「三平方の定理」を考える，数学教育研究，Vol.8，pp.113–125 (2006)
3) 梅野善雄：3次・4次関数に関する高専1年生の発見，T^3Japan 第8回年会講演集，pp.160–165 (2004)
4) 公庄庸三：数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる，日本数学教育学会高専大学部会論文誌，Vol.7，No.1，pp.146–150 (2000)
5) 阿蘇和寿：高専の授業における学生の探究活動–テクノロジーの効果的な活用に向けて–，日本数学教育学会高専大学部会論文誌，Vol.9，No.1，pp.31–50 (2002)
6) 島田茂編：新訂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」，東洋館出版，1996 年
7) 澤田利夫・橋本吉彦：数学科での評価，p.97，共立出版 (1990)