グラフ電卓を利用したグラフ・アートと関数理解

梅野　善雄 *
(一関工業高等専門学校)

Graphic Arts and Understanding of Function by The Use of Graphing Calculators

UMENO Yoshio
(Ichinoseki National College of Technology)

Abstract:
We lent algebraic calulators(TI–89) to our first-year students in the class of function from mid-December to the end of February. We gave students the work to create the graphic arts by the use of graphing calculators, in winter holidays. They must consider what type of a function is the best to apply to their figure, and what range of the function is desirable, and so on. We show some their graphic arts and functions used in their arts. We made students describe what contents they learned to understand about the graph of a function by the use of graphing calculators. They gained a variety of understanding. And it was observed that the possibility to solve mathematics problems for themselves increased, and that an opportuniny to feel the amusingness of mathematics increased, too.

It would be sure that graphing calculators were effective in the class of function, and we could expect more effectiveness in case of a long-term use.

Keyword: algebraic calculator, function, short-term use, mathematical understanding

1. はじめに

高専においていろいろな工学現象を取り扱うには基本的な関数の性質を熟知していることが必要である。その意味でも高専における関数教育は極めて重要であり，その基本的な性質を学生に定着させるために多くの試みがなされている。

中でも，近年，グラフ電卓の利用例が報告され始めた。石川高専では，数式処理可能なグラフ電卓を入学時から 2 年間学生に貸与し，その電卓を活用したいろいろな探求活動を行っている [1]。福井高専では新入生全員に数式処理電卓を購入させている [2]。その中では，たとえば，教師が説明すべき 2 次関数の主要な性質のほとんどを，学生 (新入生) に指摘されたことが報告されている [3]。

著者も，微積分の授業で数式処理電卓を長期貸与し，授業内容への理解度の高まりや，電卓を貸与しないクラスと比べて数学の授業に対する不安感が有意に減少するなどの効果を得ている [4)5)]。

また，平成 13 年度はグラフ電卓を 1 年生に貸与 (1ヶ月間) して関数の授業を行い，単純な答え合わせとして使用させた。短期間の，しかも単純な使用のさせ方にもかかわらず，学生の感想は極めて好意的であった。関数のグラフに対して理解が深められたと答える者が多く，成績下位の学生ほど数学が前よりも分かるようになったと答えている [6]。しかし，この電卓の利用で学生がどのような理解を得たのか，その具体的な内容までは調査しなかった。この学生の理解の内容を具体的に知ることは，この電卓の利用効果を考える上では極めて重要なことである。

そこで，ここでは，グラフ電卓の効果的な活用法を探ると共に，学生が得た理解の内容を調査し，関数教育における効果や意義について考察したい。

* 一般教科，umesan@ichinoseki.ac.jp

2. グラフ電卓を貸与した授業

2.1　グラフ電卓

学生に貸与したのは，テキサスインスツルメント社のグラフ電卓 (TI–89) である。この電卓は，関数のグラフを簡単に描画できるのみならず，高度の数式処理や統計処理を行うこともできる。特に，99 個の関数を定義でき，その一つ一つの関数に描画範囲を指定できる。学校所有の台数では 1 学年全員に貸与するには不足するので，一部にメーカーの無償貸与制度を利用した。なお，この電卓 (TI–89) の機能の詳細は，メーカーの HP[7) を参照されたい。

2.2　電卓を貸与した授業の概要

この調査の対象とする学生は，平成 14 年度の本校 1 年生（4 クラス，169 名）である。授業科目は著者の担当する「基礎数学 II(3 単位)」であり，関数を主たる学習内容とする。

グラフ電卓は，三角関数のグラフを終えた 12 月中旬に学生に貸与し，貸与直後の 3 時間でグラフ機能の使い方を説明した。表 1 は，その時間で説明した内容をまとめたものである。

それ以前の授業は，黒板を利用した普通の授業である。冬季休業前に貸与したのは，休業中に自由に使わせて電卓の使用方法に習熟させようとしたからである。そのため，その電卓を使用しなければならないよう，関数のグラフをつないでできる絵 (グラフ・アート) の作成を冬季休業の課題とした。

冬季休業以降の授業内容は，加法定理と三角形の性質である。この中では，電卓を必要とする場面は特にない。2 月上旬には教科書を終え，その後は関数のグラフの総復習を行った。問題の内容は通常の問題であるので，必ずしも電卓を必要とするものではない。前年度と同じ使用方法とするため，通常の授業の中での答え合わせとして使用させた。学生は，必要に応じて，問題の答え合わせとして，あるいは思考の補助としてこの電卓を使用した。

そして，電卓の返却時 (2 月下旬) にはアンケート調査を行い，グラフ電卓の利用でどのような理解を得たのか，学生の理解の内容を自由に記述させた。以下では，その内容をもとに，関数教育におけるグラフ電卓の効果や意義について考察する。

表 1: 学生に説明した電卓の機能

1 時間目	主要なキーの使い方，通常の関数電卓としての使い方，関数定義の仕方，グラフの描画方法，x と y の範囲の定め方
2 時間目	グラフの拡大・縮小の仕方，x 軸との交点の求め方，最大値・最小値の求め方，座標を表形式で表示する方法
3 時間目	個々の関数の描画範囲の指定方法，グラフの描画スタイルの指定方法，ファイルの保存方法

3. グラフ・アート

3.1　グラフ・アートの目的

「グラフ・アート」は，関数のグラフを繋ぎ合わせて絵 (アート) を作成するものである。高専では金沢高専で最初に行われ，他にも幾つかの高専で実施されている。本校でも平成 12 年度に行ったことがあるが，いずれも教師側の予想をはるかに上回る作品が作成されている [8)。

グラフ・アートを作成するには，学生はいろいろな関数やその描画範囲を自分で主体的に決定しなければならない。それを作成させることは，既習の関数グラフの総復習としての意味合いがある。その作成にはある程度の試行錯誤を伴い，まとまった時間も必要になってくる。平常の授業の中で作成させることは困難と思われることから，冬季休業の課題としたものである。

3.3　学生の作品

休業明けの 1 月上旬には，学生の作成したグラフ・アートを教師側のグラフ電卓にファイルをコピーする形で提出させた。提出率は 97%である。学生に対しては，提出された全作品の鑑賞会も行っている。

以下に，学生の作成した幾つかの作品と，それを構成している個々の関数を示す。作成時間は，構想を考えてから作品が完成するまでに要した時間であり，学生が自己申告した時間である。

図 1 では，べき関数，無理関数，指数関数，対数関数，そして正接関数など，実に多様な関数が使用

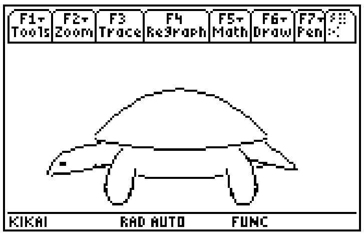

図 1: KAME

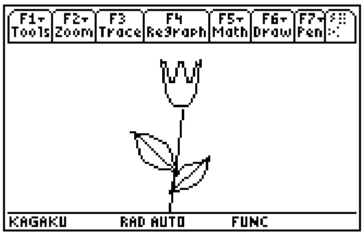

図 2: チューリップ

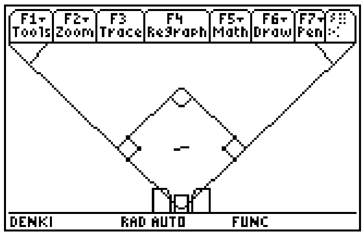

図 3: 野球グランド

図 1: KAME　(作成時間は 2 時間 10 分)

(1) $y = -\frac{1}{7}x^2 + 4.5$　　$-5 < x < 5$

(2) $y = \frac{1}{30}x^2 - 0.2$　　$-0.5 < x < 5$

(3) $y = \frac{3}{2}\log(x + 7.8) - \frac{1}{2},$　　$-7.75 < x < -4.5$

(4) $y = \frac{1}{2}x + 2.2$　　$-7 < x < -6.5$

(5) $y = 1.3^{x+5.5} - 2.8$　　$-7.6 < x < -4$

(6) $y = \tan(x)$　　$-4.5 < x < -3282$

(7) $y = \tan(x + 1.6)$　　$-3 < x < -2.45$

(8) $y = 4(x + 3.65)^4 - 4.5$　　$-4.6 < x < -2.8$

(9) $y = -\tan(x - 1.6)$　　$2.45 < x < 3$

(10) $y = -\tan(x)$　　$3.282 < x < 4.5$

(11) $y = 4(x - 3.65)^4 - 4.5$　　$2.8 < x < 4.6$

(12) $y = -\sqrt{x - 2.5} + 0.25$　　$3.9 < x < 6.759$

(13) $y = 2.5\sqrt{-x + 7.3} - 3.6$　　$4.7 < x < 6.759$

(14) $y = \frac{1}{30}x^2 - 2.3$　　$-4.23 < x < -5$

(15) $y = \frac{1}{30}x^2 - 2.5$　　$-2.51 < x < 2.51$

(16) $y = \frac{1}{30}x^2 - 2.3$　　$4.22 < x < 5.2$

図 2: チューリップ　(作成時間は 5 時間)

(1) $y = 2x^4 + 1.5$　　$-1.2 < x < 1.2$

(2) $y = 10x$　　$x < 0.3$

(3) $y = \cos(2\pi x) + 4$　　$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2.7}$

(4) $y = \frac{1}{x}$　　$-3 < x < -0.2$

(5) $y = \frac{1}{x + 3} - 3.5$　　$-2.8 < x < 0.1$

(6) $y = -\frac{3.5}{3}x - 3.5$　　$-2.8 < x < 0$

(7) $y = \frac{1}{x + 1} - 2$　　$-0.8 < x < 1.8$

(8) $y = -\frac{1}{x - 2} - 5$　　$-0.5 < x < 1.8$

(9) $y = \frac{3.5}{3}x - 4$　　$-0.5 < x < 1.8$

図 3: 野球グランド　(作成時間は 2 時間)

(1) $y = \left|\frac{1}{2}x\right| - 4$

(2) $y = -\left|\frac{1}{2}x\right| + 2$　　$-6 < x < 6$

(3) $y = \frac{1}{2}x - 3$　　$3.8 < x < 5.2$

(4) $y = -\frac{1}{2}x + 1$　　$3.5 < x < 5.2$

(5) $y = \frac{1}{2}x + 1$　　$-5.2 < x < -3.8$

(6) $y = -\frac{1}{2}x - 3$　　$-5.2 < x < -3.8$

(7) $y = \left|\frac{1}{2}x\right| + 1$　　$-1.2 < x < 1.2$

(8) $y = -x^{100} - 3.3$　　$-1.05 < x < 1.05$

(9) $y = -(x - 2)^{100} - 3$

(10) $y = -(x + 2)^{100} - 3$

(11) $y = \frac{1}{100000}x - 1$　　$-1 < x < 1$

(12) $y = 8\cos\left(\frac{1}{12}x\right)$　　$-14 < x < 14$

され，それらのグラフに対して平行移動や対称移動が行われている。対数関数は首の先端部分，正接関数は足の部分である。関数の形や範囲の指定をみても，思い通りの曲線を得るまでに，いろいろな関数について相当試行錯誤したであろうことがうかがわれる。学生の感想には,「イメージ通りに作るのが難しかった」とある。成績は上位の学生である。

図 2 は，花芯の部分が 4 次関数と余弦関数，そして葉の部分は分数関数であり，$y = \frac{1}{x}$ のグラフを平行移動している。学生の感想には,「葉っぱの部分を作るのにいろんなグラフを使ってみたが，双曲線が最もよかった」とあり，葉の形を決めるまでの苦心がうかがわれる。余弦関数の周期にも工夫がみられる。成績は下位の学生である。

図 3 は，一見すると単純な直線を組み合わせているように見えるが，絶対値関数を利用して効率よく作成されている。ホームベースから 1・3 塁にいたるライン，内野のライン，そしてセカンドベースは絶対値関数である。バッターボックスは，100 乗のべき関数，外野のラインは余弦関数である。いずれにおいても，基本的な関数のグラフを平行移動している。また，余弦関数の周期について理解していることもうかがわれる。成績は中位の学生である。

なお，図 3 の (11) の関数は，x 軸と平行な直線を描くためのものである。使用したグラフ電卓は，水平線 ($y =$ (定数) の形) には描画範囲を指定できないので，それを傾きの小さい直線で代用した。この方法は学生にも説明してある。

3.4 学生の感想

グラフ･アートの作成は，電卓の使い方に関して 3 時間の説明を加えただけで課したものである。説明時間が短かったので，どの程度のものが提出されるか不安もあったが，全くの杞憂に終わった。完成までに 27 時間をかけたものや，80 個以上の関数により作成されているものもある。アートとしての完成度にも目をみはるものが多く，学生の感性とテクノロジー操作の飲み込みの速さには驚かされた。課題提出時には，この作業の感想も書かせている。ここでは，その中から学生の幾つかの感想を紹介したい。

- 忘れかけていた指数・対数・無理関数を使ってできたので，思い出せたし，関数の楽しみが分った。
- 時間がかかったけど，思ったようなグラフが描けるとなかなかうれしいものがある。
- 描いているときはめんどうくさかったけど，勉強にもなったし，楽しかったので良かった。
- 関数を使ってグラフ・アートをすることによって，今まで習ったいろいろな関数を振り返ることができて良かった。
- 超めんどくさいと思っていたけど，自分が知っている範囲の簡単な関数でもできたのでうれしかった。作成しているときが，一番勉強しているという実感がわいた。
- 根気のいる作業だと思った。でも，完成した時には達成感があり，これを自分で作ったんだなあと思うと，うれしくなった。

「意味がない」「関数の勉強とは関係がない」という感想を書く学生も数名あったが，大部分の学生は，「大変だったけどおもしろかった」「勉強になった」「達成感があった」「つかれた」などという感想をのべている。代表的な感想は，概ね上記でつくされると思われる。

3.5 グラフ・アートと教育上の意義

通常の授業では，教師が与えた問題を学生に解かせることにより，関数についていろいろな理解を得させようとする。しかし，グラフ・アートの作成では，学生は作成しようとする図柄と共に，以下の事柄を自分で考えなければならない。

(i) 作成しようとする図形の構成曲線は，どのようなタイプの関数のグラフかを判断すること。
(ii) そのグラフが図形の該当部分に表示されるようにするには，どのような平行移動や対称移動を行えばよいかを考えること。
(iii) 係数等を適切に決めて，その関数の式を具体的に決定すること。
(iv) 複数のグラフで構成されるときは，その接続箇所の座標を決めること。

(i) の判断を行うには，どのような曲線がどのような関数のグラフであるかを知っていなければならない。その基本となる関数のタイプが分かれば，(ii)(iii) の具体的な式を書き下すために，係数の調整，対称移動の有無，あるいは平行移動の量の調整などを何度も試行錯誤することになる。そこでは，グラフ電卓の機能がフルに活用できる。(iv) の接続箇所は，グラフ電卓の機能を利用すれば簡単に求められるが，その機能を使いこなした学生は少数と思われ，大多数の学生は試行錯誤で求めたと思われる。

以上の作業を，紙と鉛筆の作業で行うのは容易なことではない。しかし，グラフ電卓を利用することで，学生は自分の定義した関数のグラフを即座に確認できる。係数や描画範囲などを調整して関数の定義とグラフの確認作業を何度も繰り返しながら図形が作成されていく。単なる「お絵描き」のように見えながらも，その作業の中で学生は関数のグラフ，その対称移動の有無，そして平行移動の量を自分で意図的に決めていかなければならない。

作業を行いながら，図形が作成されていく様子が具体的に見えるので，どの程度のことを自分が行ったのか，どの程度の作業がまだ残っているのかも明確である。「面倒くさかったけど」「完成したときの達成感があり」「関数の復習や勉強にもなり」「楽しかった」という学生の感想は，まさに，このグラフ・アートの教育上の意義を物語るものであろう。

4. 学生の反応と理解の内容

4.1 グラフ電卓利用に対する学生の反応

グラフ電卓を貸与されたことによる学生の使用の形態はさまざまである。単純にグラフを表示するだけの学生がいれば，それを拡大・縮小して詳細を見ようとする学生もいる。座標を表形式で表示さて，数値上の確認をする学生もいる。多くの学生は，問

表 2: グラフ電卓の利用に対する学生の反応

質問項目	は い	中 間	いいえ
(1) 数ナビはグラフを理解する上で役に立つ	92.2	7.8	0
(2) 数ナビを使う授業はおもしろい	68.3	29.3	2.4
(3) 数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる	65.9	29.9	4.2
(4) 数ナビを家や寮でも利用した	64.1	18.6	17.4
(5) 数ナビを使って数学が前よりも分かるようになった	49.1	45.5	5.4
(6) 数ナビのおかげで数学が前よりおもしろくなった	40.7	50.3	9.0

(%)

題を考える上でのヒントを得たり，自分の考えた解答の答え合わせとして利用した。短期間の貸与であるため，電卓を利用しなければ解けないような問題は課していない。電卓を全く使用しないで問題演習を行う学生もあった。

電卓の返却時には，このような形の授業に対する感想を質問紙で調査をした。表 2 は，主な項目に対する学生の反応である。回答は「はい」「どちらでもない」「いいえ」の 3 件法で求めた。回答総数は 167 名である。なお，この電卓を，学生には「数ナビ」と呼ばせている。石川高専の阿蘇和寿教授は，この電卓を数学上の思考のツールとして「数学ナビゲータ」と呼ぶことを提唱している。「数ナビ」は，その略称である [9)]。

表 2 を見ると，否定的な反応は極めて少数であり，肯定的な反応が多いことが分かる。特に,「(1) 数ナビはグラフを理解する上で役に立つ (92.2%)」「(3) 数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる (65.9%)」「(5) 数ナビを利用して数学が前よりも分かるようになった (49.1%)」とあるように,「分かる」という方向で強い反応が現れている。この反応は，既存の調査結果とも一致している [4)]。

また，この調査の自由記入欄には,「理解に役立った」という声ばかりではなく,「今まで分からないところが分かるようになった」「授業が楽しくなった」という記述も多く見られ，関数の授業に対する興味関心が高まったことを示していると思われる。

4.2　グラフ電卓の利用と理解の内容

グラフ電卓の利用で「数学の理解がさらに深められる」と答える学生が多いが，具体的にはどのような理解を得たのだろうか。学生の理解の内容を知るために，電卓回収時に行った質問紙調査では，以下の内容について自由記述を求めた。

［A］数ナビを使って,「とても良く分かった！」ということがあれば，その分かった内容を具体的に書いてください

［B］数ナビが無ければ理解できなかっただろう，ということがあれば，どのようなことが理解できないと思うかを具体的に書いてください

約 40%の学生から何らかの記述が得られた。ただし，記述されている内容は学生により異なり，一般的な傾向は見出せなかった。以下に，学生の記述内容を幾つか上げておく。

[A] 電卓を利用して，よく分った内容

(1) $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $2\sin(x)$ など変化させてグラフにすると，グラフの違いが分かってためになるし理解も深まった。

(2) 三角関数の合成が良く分った。

(3) $y = |f(x)|$ のグラフは，$y < 0$ の部分を x 軸に関して対称移動したものであること。

(4) $f(2x)$ と $2f(x)$ の違いや，$f(-x)$ と $-f(x)$ の違いが分からなかったけど，数ナビのグラフを使って理解できるようになった。

(5) $f(x)$ の x への値の代入の仕方が分かった。

(6) いろいろな関数のグラフが，こんなグラフになるんだ，と何度もやっているうちに分かるようになった。

(7) 数種類のグラフの特徴を見分けるのに，細かい数値を出してくれてとても分かりやすかった。

[B] 電卓を利用しなければ分からなかった内容

(1) 絶対値関数のグラフ

(2) グラフの平行移動や対称移動

(3) $f(x)$ と $f(2x)$ や $2f(x)$ のグラフとの関係

(4) $x \cdot \sin x$ や $\dfrac{1}{x^2+1}$ のグラフのような，関数どうしの和，差，積，商のグラフ

(5) 三角関数の周期
(6) 三角関数と円上の点の動きとの関係
(7) $y = -f(x) + 1$ は，y 軸方向に 1 だけ平行移動してから x 軸に関して対称移動するのか，対称移動してから y 軸方向に 1 だけ平行移動するのか分からなかったが，数ナビが参考になりました。

[A](5) は，$f(x)$ の式を与えて，$f(a-1)$ などの式を求めさせたときのことを述べていると思われる。この電卓は，グラフ上の点の座標を表形式で表示できる。[A](7) は，その機能を利用して理解を得た学生の感想と思われる。

いずれにおいても，その記述内容は三者三様であり，特定の傾向のようなものは見出せなかった。また，学生が「電卓を利用して分かったこと」として記述している内容は，授業中にすでに説明ずみの内容である。同じ説明は何度も繰り返しているが，それでも理解できずにいる学生もいる。理解できないでいる部分は個々の学生により異なると思われるので，そのことが一般的な傾向として抽出できない理由ではないかと思われる。

5. 関数教育におけるグラフ電卓の意義

学生にグラフ電卓を貸与したが，グラフ・アートの課題を除けば，単に電卓を貸与して，後は各自の使用に任せただけである。学生は，答え合わせや解答のヒントを得るために使用した。

極めて単純な貸与方法であるにもかかわらず，学生の反応は極めて好意的である (表 2)。学生の理解の内容を問う自由記述の内容などを総合すると，関数教育でグラフ電卓を利用することの意義は次のことにあるのではないかと思われる。

第一に，関数のグラフに対する理解が容易に深められることである。式を定義するだけで即座にグラフが表示される。どのような式がどのようなグラフになるのか，また各係数の意味などを理解することも容易であろう。しかも，それらを座標データを通して理解することもできるので，各自の関心の持ち方により，いろいろな角度からの理解が可能になる。

第二に，自分で問題を解決できるようになることである。分からない箇所を質問に来る学生は一部であり，そのまま放置してしまう学生が多い中で，学生は自分の分からない部分を，グラフ電卓で試行錯誤しながら追及することができる。これを紙と鉛筆の世界で行うことは，成績下位の学生ほど非常な困難を伴うであろう。

第三には，数学の授業が分かる楽しさや，数学的なことについて何かに気付く機会が増えるだろうことである。自由記述の学生の感想からも，そのことがうかがわれる。

6. おわりに

約 2ヶ月間のグラフ電卓の貸与であったが，単純な使用法にもかかわらず，学生の感想をみると，数学上の疑問を自分で解決できる可能性が高まったことや，数学のおもしろさを感じる機会が増えたであろうことがうかがわれる。この電卓を 1 年間，あるいはさらに長期間の貸与をした場合は，一体どのような効果が得られるのだろうか。その効果を引き続き検証していきたい。

参考文献

(1) 阿蘇和寿：数学の授業における学生の探究活動—テクノロジーの効果的な活用に向けて—, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 9 巻, 第 1 号, pp.31–50(2002)
(2) 長水壽寛他 6 名：テクノロジーを用いた数学教育の理論と実践, 論文集「高専教育」, 第 26 号, pp.339–344(2003)
(3) 井之上和代：TI–89 を利用した 2 次関数の学習から見る高専の数学教育, 福井工業高等専門学校研究紀要 自然科学・工学, 第 34 巻, pp.95–105(2000)
(4) 梅野善雄：数式処理電卓を用いた微積分教育の改善, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 8 巻, 第 1 号, pp.13–30(2001)
(5) 梅野善雄：数式処理電卓の利用による数学に対する学生の意識変化, 論文集「高専教育」, 第 25 号, pp.175–180(2002)
(6) 梅野善雄：数式処理電卓の短期利用とその効果, 日本数学教育学会誌第 84 回総会特集号, 第 84 巻 (臨時増刊)，pp.454(2002)
(7) http://www.naoco.com/
(8) http://www.mathnavi.org/contest/index.htm
(9) http://www.mathnavi.org/profiel/index.htm