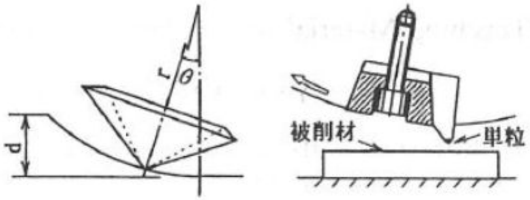
研削加工における数学の利用例

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 研削加工 (Cutting Mechanism) は、機械工学の一分野。
  - 金属の表面に溝をつけるとき、溝の形状について考える。
  - 四角錐状のダイヤモンドで、セラミックスを研削する

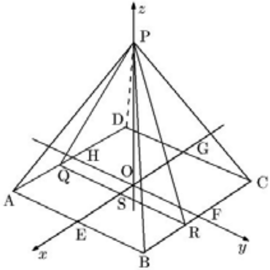


  - 円板の外周の 1 点に固定して、それを回転させることで研削。
  - セラミック板を低速で送るとき、直線状の溝が形成される。
  - その溝の形状は、どのようなものか？

正四角錐の各面の角

- ダイヤモンドの形状を正四角錐として考える。
- 溝の形状を考えるには、各面の角を把握しておくことが必要。
- 底面は１辺が $2k$ の正方形、高さ r の正四角錐とする。
- $\angle\mathrm{OPE}=\omega$ とし、$\cot\omega=a$ とおくと
  - $\mathrm{OP}=ka,\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{2}k,$
    $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=k\sqrt{a^2+2}$
    $\triangle\mathrm{PAB}$ で余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}=\frac{a^2}{a^2+2}$$



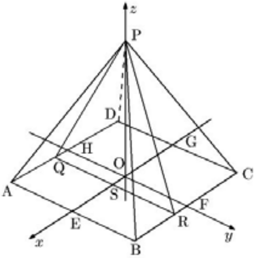
  - 同様にすると、$\cos\angle\mathrm{APC}=\dfrac{a^2-2}{a^2+2}$

切削部分の平面

- 正四角錐が回転することによる切削は，△PQR が △PAB から △PDC まで連続的に移行することにより行われる．
- S$(t,0,0)$，∠QPR $=\rho$, ∠OPS $=\phi$ として $\cos\rho$ を求める。
- A$(k,-k,0)$， B$(k,k,0)$， C$(-k,k,0)$， D$(-k,-k,0)$
- P$(0,0,r)$， Q$(t,-k,0)$， R$(t,k,0)$
  - PQ : $\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{-k}=\dfrac{z-r}{-r}$
  - PR : $\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{k}=\dfrac{z-r}{-r}$
  - $\boldsymbol{u}=(t,-k,-r)$, $\boldsymbol{v}=(t,k,-r)$
  - $\tan\phi=t/r$, $1+\tan^2\phi=\sec^2\phi$, $a=\cot\omega=r/k$

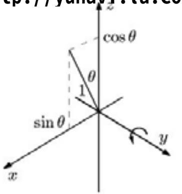
$$\cos\rho=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{t^2-k^2+r^2}{t^2+k^2+r^2}=\frac{\sec^2\phi-\tan^2\omega}{\sec^2\phi+\tan^2\omega}=\frac{a^2-\cos^2\phi}{a^2+\cos^2\phi}$$



正四角錐を y 軸の回りに回転

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/



- 正四角錐を y 軸の回りに回転させる。
- 角 θ だけ回転して点 (x, y, z) が
  点 (x', y', z') に移ると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= x'\cos\theta - z'\sin\theta \\ y &= \qquad y' \\ z &= x'\sin\theta + z'\cos\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{PQ}: \quad \frac{x\cos\theta - z\sin\theta}{t} = -\frac{y}{k} = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta - r}{-r}$$

$$\mathrm{PR}: \quad \frac{x\cos\theta - z\sin\theta}{t} = \frac{y}{k} = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta - r}{-r}$$

溝断面の角度：yz 平面への正射影

- 刻まれる溝の断面の角度は、直線 PQ, PR を yz 平面に正射影してできる直線の角度と等しい。
- 直線 PQ の方程式は

$$\mathrm{PQ}: \quad \frac{x\cos\theta - z\sin\theta}{t} = -\frac{y}{k} = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta - r}{-r}$$

$$\begin{cases} (t\sin\theta + r\cos\theta)x + (t\cos\theta - r\sin\theta)z & = & tr \\ kx\sin\theta + kz\cos\theta & = & kr + ry \end{cases}$$

- x を消去すると　$z = \dfrac{r\cos\theta + t\sin\theta}{k} y + r\cos\theta$
- 直線 PR より同様にして　$z = -\dfrac{r\cos\theta + t\sin\theta}{k} y + r\cos\theta$

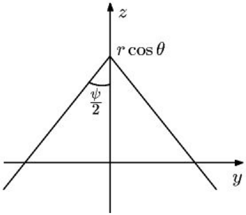
溝断面の角度：yz 平面への正射影(2)

- yz 平面に正射影した直線のなす角を ψ。

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{2}\right)=\frac{r\cos\theta+t\sin\theta}{k}$$

$$\therefore\quad \psi=\pi-2\tan^{-1}\frac{r\cos\theta+t\sin\theta}{k}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{2k\sin\theta}{k^2+(r\cos\theta+t\sin\theta)^2}$$



  - t の範囲は $-k\leq t\leq k$ である。
  - $\theta\geqq 0$ のとき ψ は単調減少。$t=-k$ のときに最大。
    $\theta<0$ のとき ψ は単調増加。$t=k$ のときに最大。

- これは、溝の断面が，$\theta<0$ のときは △PAB により，
  $\theta>0$ のときは △PDC により刻まれることを意味する．

切削される溝の断面曲線

- 正四角錐が回転してできる溝の断面曲線は、直線 PQ, PR が回転することにより生成される.
- その曲線は、
  - 直線 PQ, PR を y 軸の回りに回転させて、
  - それを yz 平面に正射影してできる直線の、
  - θ を媒介変数とする直線群の包絡線として求められる.
- $\theta > 0$ のとき溝の断面は △PDC により生成される。
  - $z = -\dfrac{r\cos\theta - k\sin\theta}{k}y + r\cos\theta$ より
    $ky\sin\theta + r(k-y)\cos\theta = kz$
  - θ で偏微分して　$ky\cos\theta - r(k-y)\sin\theta = 0$
  - $\sin\theta,\quad \cos\theta$ について解いて

$$\sin\theta = \frac{k^2yz}{k^2y^2 + r^2(k-y)^2}, \quad \cos\theta = \frac{kr(k-y)z}{k^2y^2 + r^2(k-y)^2}$$

切削される溝の断面曲線 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して、$a=\cot\omega=r/k$ を利用して変形すると

$$\left(y-\frac{ka^2}{a^2+1}\right)^2-\frac{z^2}{a^2+1}=-\frac{a^2k^2}{(a^2+1)^2}$$

- この双曲線の $y>0,\ z>0$ の部分が溝の断面曲線である.
- 実際の切削は $y=0$ のごく近くで行われる。

$$\begin{aligned} z &= ak\sqrt{1-\frac{2}{k}y+\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)y^2} \\ &= ak\left[1-\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{k}y-\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)y^2\right\}-\frac{1}{8}\frac{4}{k^2}y^2+\cdots\right] \\ &\fallingdotseq r-ay+\frac{y^2}{2r} \end{aligned}$$

研削加工に関する教材の意義

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 高専 3 年前期までの、広範囲な数学が利用されている。
  - 1 年では、分数式の変形、三角関数の各種変形、2 次曲線
  - 2 年では、ベクトルのなす角、方向ベクトル、軸の回りの回転
  - 3 年では、微分、極値、マクローリン展開、包絡線
- 単なる数学の問題ではなく、工学上のあるテーマを達成するための計算であり、その計算の目的や意義は明らかである。
- いろいろな発展性がある。
  - 正四角錐を別な図形で置きかえてみる。
  - 正四角錐の回転速度も考慮する。
  - 切削する板を一定の速度で移動させる。
- 機械系学生への数学の総復習として適材。
- 工学上の特定のテーマに関して、それを考察するために必要な数学を教授するという教授法は可能か？
- 数学的に内容豊富で低学年にも教授可能なテーマを見いだすのは、実際には難しいと思われる。

専門科目での利用：流体力学

- 流体力学では、
  - 気体・液体など、「流れ」を連続体の変形問題として捉える。
  - すべての点 (x, y, z) において、速度 $(\boldsymbol{V})$、圧力 (p)、密度 (ρ) などを、時間の関数として明らかにしたい。
- 基本的な方程式は
  - 質量保存の法則として
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0 \qquad \text{(連続の式)}$$
  - 運動方程式は、$\boldsymbol{V}$ を速度ベクトル、質量力を $\boldsymbol{F}$ として
$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{V} \qquad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$$
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

流体力学での数学：基礎数学

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 使用される文字が多い
  - アルファベットの、ほぼ全文字の大文字・小文字が使われる。
  - ギリシア文字の大文字・小文字についても同様。
  - 添え字の下付き (ζ_{in}, U_∞)、上付き (v^*, ξ', δ^{**}) が頻出。
  - それらが混在する場合もある。$\overline{H}_0$, $\dot{m}_\mathrm{J}$, u^{*2}, e^{-y/δ^*}
  - その中で、式の変形や微分・積分の計算をすることになる。
- 複雑な分数式の変形が頻出する.
  - $\kappa \boldsymbol{M_1}^2 = \dfrac{\dfrac{p_2}{p_1} - 1}{1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}}$ と $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{(\kappa - 1) + (\kappa + 1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{(\kappa + 1) + (\kappa - 1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}$ から

    $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{2\kappa}{\kappa + 1}\boldsymbol{M_1}^2 - \dfrac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$ を導く。

流体力学での数学：基礎数学 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 関数の基本性質を理解した上で複雑な分数式の変形が頻出。
  - 多数の文字を含む中で、独立変数、従属変数が何であるかを常に意識する必要がある。
  - 「関数とは何か」という根本部分の理解が必要とされる。
  - $\dfrac{U}{a_0} = \left(\dfrac{\kappa - 1}{2} + \dfrac{1}{\boldsymbol{M}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ において，$\boldsymbol{M}$ を U/a_0 の関数と見たときのグラフ。
- 多数の変数の比例関係から、特定の変数の比例関係を導く。

$$\frac{Db}{Dt} \approx u\frac{db}{dx} \qquad \frac{Db}{Dt} \propto u_{\max}\frac{db}{dx} \qquad \frac{Db}{Dt} \propto v'$$

$$v' \propto \frac{\partial u}{\partial y} \qquad l \propto b \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \propto \frac{u_{\max}}{b}$$

以上の関係より，$b \propto x$ を導く．

流体力学での数学：基礎数学 (3) [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 基本を押さえた上で、計算や式変形の総合能力が必要。
  - $u = \dfrac{v_*}{\kappa}\ln y + C, \quad C = -\dfrac{v_*}{\kappa}\ln\beta\dfrac{\nu}{v_*}$ より
    $\dfrac{u}{v_*} = \dfrac{1}{\kappa}\left(\ln\dfrac{v_* y}{\nu} - \ln\beta\right)$ を導く。
  - ${\boldsymbol{M_2}}^2 = \dfrac{2 + (\kappa - 1){\boldsymbol{M_1}}^2}{2\kappa {\boldsymbol{M_1}}^2 - (\kappa - 1)}$ において、$\boldsymbol{M_1} > 1$ のとき
    $\boldsymbol{M_2} < 1$ を導く。
  - $\mu = \sin^{-1}\dfrac{1}{\boldsymbol{M}_\infty}$ のとき、$\tan\mu = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{M}_\infty^2 - 1}}$ を導く。
  - $\dfrac{\tan(\beta - \theta)}{\tan\beta} = \dfrac{1}{u_1^2}\left\{a^{*2} - \dfrac{\kappa - 1}{\kappa + 1}v^2\right\}, \quad \dfrac{u_1^2 + v^2}{2} + \dfrac{a_1^2}{\kappa - 1} = \dfrac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}a^{*2}$ より $\dfrac{u_1}{a_1} = \boldsymbol{M_1}\sin\beta$ とおいて
    $\tan\theta = \dfrac{2\cot\beta({\boldsymbol{M_1}}^2\sin^2\beta - 1)}{{\boldsymbol{M_1}}^2(\kappa + \cos 2\beta) + 2}$ を導く。

流体力学での数学：1 変数の微分積分

- 微分の基本部分に対して理解していることを前提として、
  - 多数の文字の中で、どの文字が変数かに注意しながら、
  - 計算の総合能力が必要とされる。
- いろいろな変化率が導関数で定義される。
  - 流体中の小さな面 (面積 ΔA) に働く力で、面に垂直な成分を ΔP、平行な成分を ΔT とすると

$$\text{圧力 } p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}, \quad \text{せん断応力 } \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A}$$

- 微分してゼロなら、その変数について定数である。
  - $\partial p / \partial x = 0,\ \partial p / \partial y = 0$ となることから，圧力 $p = p(x, y, z)$ は x，y 方向には変化せず高さ z のみの関数 $p(z)$ となる．
- 合成関数の微分公式による計算。
  - $\eta = y\sqrt{\dfrac{U_\infty}{\nu x}},\ \psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)$ のとき

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}(\eta f' - f)$$

流体力学：1 変数の微分積分 (2) [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- テイラー展開して、高次の無限小を省略して近似式を導く。
  - $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{(\kappa-1)+(\kappa+1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{(\kappa+1)+(\kappa-1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}$ おいて $\dfrac{p_2}{p_1} = 1+\varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1)$

    のとき $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \dfrac{1}{\kappa}\varepsilon - \dfrac{\kappa-1}{2\kappa^2}\varepsilon^2 + \dfrac{(\kappa-1)^2}{4\kappa^3}\varepsilon^3 + \cdots$
- べき級数を利用した不定形の極限値の計算。
  - $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m}{4\pi\varepsilon} \log \frac{1-\varepsilon/z}{1+\varepsilon/z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m}{4\pi\varepsilon}\left\{-2\left(\frac{\varepsilon}{z}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^3 - \cdots\right\} = -\frac{m}{2\pi}\frac{1}{z}$$

流体力学：1 変数の微分積分 (3)

- 微小量の和としての定積分の理解。
  - 水中に垂直に置かれた平板 (plane) を幅 dY の板片に分ける．横幅を $b(Y)$ とすると，一つの板片に働く力 ΔF は $\Delta F = \rho g b(Y) Y dY$ なので，全圧力は
$$F = \sum_{\text{plane}} \Delta F = \rho g \int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} b(Y) Y dY$$
- 離散的な和が Σ で、連続的な和が $\int$ であることの理解。
  - $x = x_i$ の点に $\mathit{\Gamma}_i$ の循環を持つ渦が分布している渦系に関係する物体に働く揚力 L は $L = -\dfrac{dI}{dt} = -\rho \dfrac{d}{dt} \sum_i \mathit{\Gamma}_i x_i$
渦が連続的に分布しているときは，単位長さ当たりの循環の大きさを $\gamma(x, t)$ とすると $L = -\rho \dfrac{d}{dt} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, t) x dx \right\}$

流体力学：1 変数の微分積分 (4)　[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 多数の変数の中で、置換積分や部分積分の計算力が必要。
  - $u = \dfrac{U(h-y)}{h} - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{y(h-y)}{2}$ のとき
    $$\int_0^h u dy = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$
  - $p - p_0 = \dfrac{6\mu U l}{h_1^2 - h_2^2}\dfrac{(h_1-h)(h-h_2)}{h^2}$ において
    $h = h_1 - \dfrac{(h_1-h_2)x}{l},\ m = \dfrac{h_1}{h_2}$ として次式を導く.
    $$P = \int_0^l (p-p_0)dx = \frac{6\mu U l^2}{(m-1)^2 h_2^2}\left(\ln m - 2\frac{m-1}{m+1}\right)$$
  - $\phi = a\ln(1+b\eta) = a\ln z,\ F(\eta) = a^3\left(\ln^2 z - 2\ln z + 2 - \dfrac{2}{z}\right)$
    $$\Psi(\eta) = \int_0^\eta \frac{F(\eta)}{[\phi(\eta)]^2}d\eta = \frac{a}{b}\left(z + 1 - \frac{2(z-1)}{\ln z}\right)$$

流体力学：(偏) 微分方程式

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 3 階までの、線形・非線形の微分方程式が頻出する。
- その計算を、多数の文字の中で行わなければならない。
  - $\dfrac{dU_r}{d\varphi} = \sqrt{\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}} U_{\max} \sqrt{1-\left(\dfrac{U_r}{U_{\max}}\right)^2}$ を積分して
    $$\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\varphi = \sin^{-1}\frac{U_r}{U_{\max}} + \mathrm{C}$$
  - $\dfrac{U\left(\dfrac{d^2U}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{dU}{dx}\right)^2} = 11$ を解いて、$U = U_0\left(1+100\dfrac{\nu x}{U_0\delta_0^2}\right)^{-0.1}$
  - $F'^2 + FF'' + \dfrac{1}{2}F''' = 0$ を
    $\eta = 0$ のとき $F = 0,\ F' = 1$、$\eta = \infty$ のとき $F' = 0$
    という境界条件のもとで解くと，$F = \tanh\eta$

流体力学における数学の使われ方 [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 多数の文字を含む中での式変形や計算が必要である。
  - x, y に偏った問題だけを扱うのではなく、意図的にいろいろな文字を含む問題に取り組ませた方がよい。
  - 複雑な式変形を伴う問題にも取り組ませたい。
- 多数の文字の中で、独立変数や従属変数がどれであるかを見極めながら計算できる能力も必要である。
  - 変数の間の関係から、一つの変数の変化で他の変数がどのような変化をするのかを、感覚的に把握できることが望ましい。
  - 問題演習を多くこなす中で身についていくと思われる。
- 微分積分のの意味をしっかりと理解しておく必要がある。
  - 微小量の変化率としての微分。和の極限としての定積分。
  - どのようなときに、何のために微分するのか、何のために積分するのか、ということの理解。
- 一つの学習領域だけの問題にとどまらず、学習済みの知識を総動員して考えさせる問題に取り組ませることも必要。

専門科目での利用：反応工学の場合

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 化学工学は、化学プラント工場の設計・運転などを扱う。
- 工場内の反応器では、化学物質が次々に変化する。
- ある物質がどれだけ生成されるかは微分方程式で表される。
- 反応工学では、そのような微分方程式が頻出し、その解析解をさらに詳細に分析する必要がある。
- 変数分離形や１階定数線形が多く現れる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dC_A}{dt} &= -kC_A^n \\
\frac{dC_A}{dt} &= -(k_1 + k_2)C_A^a C_B^b \\
\frac{dC_A}{dt} &= -kC_A(C_{R_0} - bC_{A_0} + bC_A) \\
\frac{dC_R}{dt} &= -k_2 C_R + k_1 C_{A_0} \exp(-k_1 t)
\end{aligned}
$$

変数分離形の微分方程式

- 初期条件 $C_A(0) = C_{A_0}$ を与えて
  $\dfrac{dC_A}{dt} = -kC_A(C_{B_0} - bC_{A_0} + bC_A)$ を解く。
- まず，変数分離をして部分分数に分解して積分する．

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0}}\right)\int_{C_{A_0}}^{C_A}\left(\frac{1}{C_A} - \frac{1}{\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0} + C_A}\right)dC_A = -k\int_0^t dt$$

- この積分を計算して式を整理すると

$$\frac{1}{C_{B_0} - bC_{A_0}}\log\left|\frac{C_A C_{B_0}}{bC_{A_0}\left(\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0} + C_A\right)}\right| = -kt$$

変数分離形の微分方程式 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 絶対値の内部は正として変形すると，指数関数を用いて

$$C_A = \frac{bC_{A_0}}{C_{B_0}} \left(\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0} + C_A \right) \exp\{-kt(C_{B_0} - bC_{A_0})\}$$

$$C_A = \frac{C_{A_0}(C_{B_0} - bC_{A_0})}{C_{B_0} \exp\{kt(C_{B_0} - bC_{A_0})\} - bC_{A_0}}$$

- 物質化学工学科の学生 (4 年生) は、この計算を、多数の添え字つきの文字係数のまま自分で行うことが求められる。
- そこでは、次のような計算を行う必要がある。
  - 部分分数への分解
  - 簡単な分数関数の定積分
  - 対数関数の性質を利用した式の変形
  - 対数を用いた式を、指数関数の式に変換

二分法による数値解法

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 工学の現場では、解析解が求まるだけでは不十分。
- 係数の具体的な値のもとで、目的変数や従属変数の具体的な値を求める必要がある。
- たとえば、$b=1$, $C_{A_0}=3.58$ mol/L, $C_{B_0}=5.22$ mol/L, $k=5.33\times10^{-2}$ L/mol $\cdot$ min であるとき，$C_A=1.03$ mol/L となる t を求めるには
- 次の式を満たす t を求めればよい.

$$1.03=\frac{3.85(5.22-3.58)}{5.22\cdot\exp\left\{5.33\times10^{-2}t(5.22-3.58)\right\}-3.58}$$

二分法による数値解法 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 二分法により解の近似値を求める.
- 右辺と左辺の差を $f(t)$ として，次の手順で近似値を求める.
  - $f(t_1)f(t_2) < 0$ を満たす t_1, t_2 を定める.
  - $(t_1 + t_2)/2 = t_3$ として， $f(t_3)$ の値を求める.
  - s, t を t_1, t_2, t_3 のどれかとし，$f(s)f(t) < 0$ $(s < t)$ となる s, t を新ためて t_1, t_2 として同様のことを繰り返す.
  - 解を含む区間をある程度狭めたら，その後は 10^{-n} 刻みで値を代入して解を求める.
- $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ として考えると $t_3 = 5$ である。
- 7 回目の計算で $f(7.03125) = 0.00994$, $f(7.1875) = -0.0123$ となり、中点 $t_3 = 7.109375$ では $f(t_3) = -0.001264$ である. 実際の値は $t = 7.10049\cdots$ である.

1 階線形微分方程式の解の極値 [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 化学反応で生成される物質の量が最大になるときを求める。
- 反応を表す微分方程式が、次のように表されるとする。

$$\frac{dC_R}{dt} + k_2 C_R = k_1 C_{A_0} \exp(-k_1 t)$$

- この微分方程式の一般解は

$$C_R = C_{R_0} \exp(-k_2 t) + \frac{k_1 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \{\exp(-k_1 t) - \exp(-k_2 t)\}$$

- C_R が最大になる時刻 t は、$\dfrac{dC_R}{dt} = 0$ を解けばよい。

$$\frac{dC_R}{dt} = -k_2 C_{R_0} e^{-k_2 t} + \frac{k_1 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \left(k_2 e^{-k_2 t} - k_1 e^{-k_1 t} \right)$$

- $t = t_{R_{max}}$ のときに最大とすると、

$$\left(-k_2 C_{R_0} + \frac{k_1 k_2 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \right) e^{-k_2 t_{Rmax}} - \left(\frac{k_1^2 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \right) e^{-k_1 t_{Rmax}} = 0$$

1 階線形微分方程式の解の極値 (2)[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 移項すると

$$\left(\frac{k_1^2 C_{A_0}}{k_2 - k_1}\right) e^{-k_1 t_{R_{max}}} = \left(-k_2 C_{R_0} + \frac{k_1 k_2 C_{A_0}}{k_2 - k_1}\right) e^{-k_2 t_{R_{max}}}$$

- 指数関数部分をまとめると

$$\exp((k_2 - k_1) t_{R_{max}}) = \frac{-k_2 C_{R_0}(k_2 - k_1) + k_1 k_2 C_{A_0}}{k_1^2 C_{A_0}}$$

- 両辺の対数をとって

$$t_{R_{max}} = \frac{1}{k_2 - k_1} \ln\left(\frac{-k_2 C_{R_0}(k_2 - k_1) + k_1 k_2 C_{A_0}}{k_1^2 C_{A_0}}\right)$$

- この計算も、学生は自分で行うことが求められる。

専門科目での利用：計測制御工学 [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 多くの工場では、温度・圧力・濃度などを制御して、複雑な製造過程を経て製品が生産される。
- 工業技術者は，制御過程を把握して管理する必要がある．
- そこでは，センサーなどいろいろな検出器や信号増幅の仕組みなど，電気回路に関する知識も求められる．
- 複数のプロセスが連続する場合はラプラス変換が必須であり，伝達関数などをきちんと取り扱えなければならない
- たとえば、化学反応が幾つかのプロセスを経て得られる場合，個々のプロセスの入力と出力の関係は，微分方程式の非斉次項とその解との関係で表される．
- 1 次遅れ系と呼ばれるプロセスでは、次の式が現れる。

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$$

1 次遅れ系の伝達関数

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$$

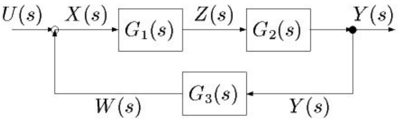
- それぞれの意味は、
  - 出力関数 y は物質の濃度や槽内の温度などを表す.
  - τ はそのプロセスの特性を表す定数である。
  - K は定常状態における入力と出力の比 (出力 / 入力) である.
  - $u(t)$ が初期入力の関数である.
- 初期条件を $y(0) = 0$ としてラプラス変換をする。
- $y(t)$, $u(t)$ のラプラス変換を簡単に $Y(s)$, $U(s)$ と表すと,

$$\tau sY(s) + Y(s) = KU(s), \qquad Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} U(s)$$

- $G(s) = K/(\tau s + 1)$ が，この 1 次遅れ系の伝達関数である.

フィードバック制御の伝達関数

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/



$X(s) = U(s) - W(s)$　　$Z(s) = G_1(s)X(s)$

$Y(s) = G_2(s)Z(s)$　　$W(s) = G_3(s)Y(s)$

- 出力 $Y(s)$ を求めると

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \cdot U(s)$$

- このフィードバック制御の合成伝達関数は、

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

入力関数が周期的なときの出力関数

- 1 次遅れ系で、入力関数が $u(t) = A\sin\omega t$ のときは

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s+1}U(s) = \frac{K}{\tau s+1}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$= \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{\tau\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

- これを逆ラプラス変換して、出力関数 $y(t)$ は

$$y(t) = \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(e^{-t/\tau} + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

1次遅れ系の過渡状態と定常状態 [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

$$y(t) = \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(e^{-t/\tau} + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

- t が十分に大きくはなくて、$e^{-t/\tau}$ 部分の影響を無視できないとき、解は第 1 項の影響を受ける。過渡状態という。
- t が十分に大きいときは、第 1 項を無視して

$$y(t) \fallingdotseq \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(\frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

- 入力関数 $A\sin\omega t$ と比べると、周期は同じであるが、振幅が変化して位相もずれる。
- 特に、ω の値が大きい高周波の入力では、出力関数の振幅が小さくなる。ローパスフィルター特性と呼ばれる。