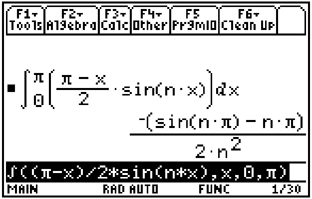
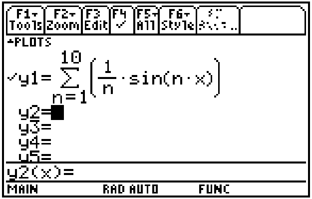
フーリエ級数

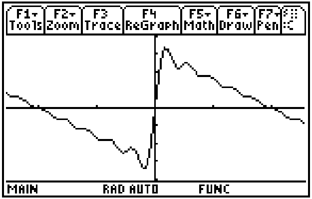
[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

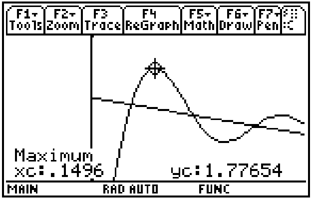
- $$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)/2 & (-\pi \leqq x < 0) \\ (\pi - x)/2 & (0 \leqq < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{n}$$







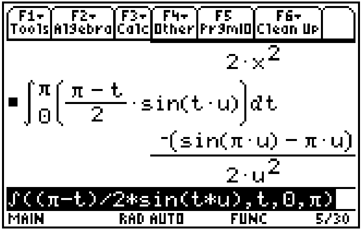


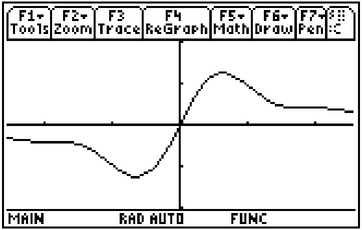
フーリエ積分

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)/2 & (-\pi \leqq x < 0) \\ (\pi - x)/2 & (0 \leqq x < \pi) \\ 0 & (x < -\pi, \pi \leqq x) \end{cases}$$
  - $$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(u) \cos ux + B(u) \sin ux\} du$$
  - $$A(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt = 0$$
    $$B(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi u - \sin \pi u}{2u^2}$$
  - $$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi u - \sin \pi u}{u^2} \sin ux \, du$$

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

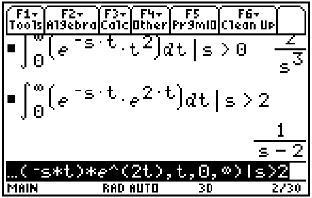
- 

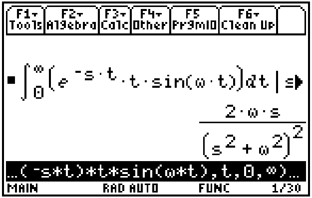
- 

ラプラス変換と逆ラプラス変換

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
  - 一般論では s は複素数であるが、s を実数として範囲を指定すると、ラプラス変換の式を求めることができる。
  - 下記では、t^2, e^{2t}, $t \sin \omega t$ のラプラス変換を求めている。





- 逆ラプラス変換は、複素関数の留数の計算はまだ学んでいないので、部分分数に分解することにより計算する。

部分分数分解による逆ラプラス変換

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{17s}{(2s-1)(s^2+4)}\right]$ の計算
  - $\dfrac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} = \dfrac{a}{2s-1} + \dfrac{bs+c}{s^2+4}$ より a, b, c を求める。
  - 分母を払うと、$17s = (a+2b)s^2 - (b-2c)s + 4a - c$
  - 係数を比較して、次の連立方程式を得る。
    $$a + 2b = 0,\quad -b + 2c = 17,\ 4a - c = 0$$
  - 連立方程式を解いて、$a = 2,\ b = -1,\ c = 8$ が得られる。
  - 以上より、次のような部分分数に分解される。

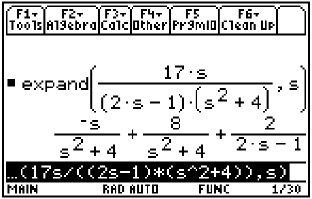
$$\begin{aligned}\frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} &= \frac{2}{2s-1} + \frac{-s+8}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \frac{s}{s^2+4} + 4\cdot\frac{2}{s^2+4}\end{aligned}$$

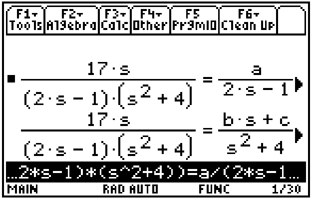
  - 逆ラプラス変換の公式にあてはめる。

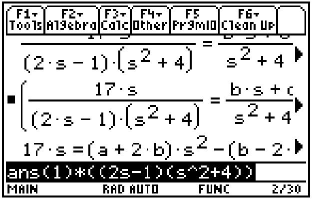
部分分数分解の計算

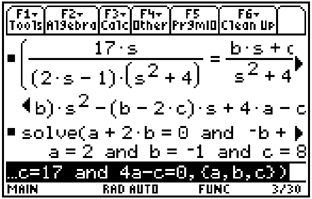
[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 部分分数分解は、 $\boxed{\text{F2}}$ [3: expand] を利用すればよい。
- 部分分数分解を学生自身に行わさせることも必要であり、その際、個々の変形過程を確認しながら計算することもできる。





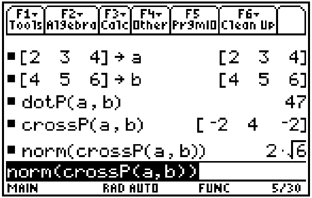


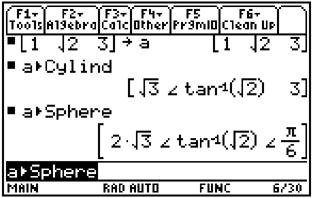


ベクトルの諸計算

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $\boldsymbol{a} = (2,3,4)$, $\boldsymbol{b} = (4,5,6)$ のとき、
  - 内積は、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 47$
  - 外積は、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-2,4,-2)$
  - 外積の大きさは、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 2\sqrt{6}$
- $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{2}, 3)$ のとき、
  - 円柱座標は、$(r,\theta,z) = \left(\sqrt{3}, \tan^{-1}\sqrt{2}, 3\right)$
  - 球座標は、$(r,\theta,\phi) = \left(2\sqrt{3}, \tan^{-1}\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

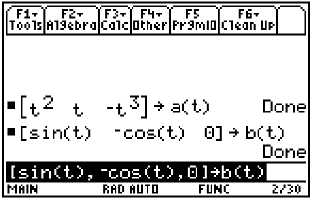


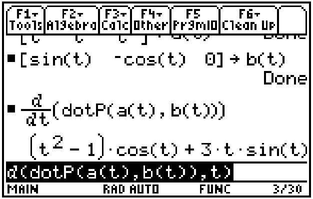


ベクトル関数の微分

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $\boldsymbol{a}(t) = (t^2, t, -t^3), \boldsymbol{b}(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ のとき、
  - 内積は、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = t^2 \sin t - t \cos t$
  - t で微分すると、$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t)) = (t^2 - 1)\cos t + 3t \sin t$

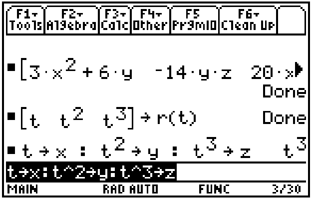


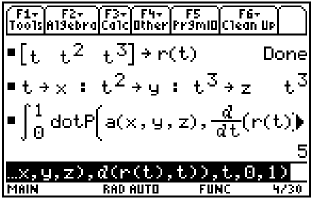


ベクトル関数の積分

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(x,y,z) = (3x^2+6y, -14yz, 20xz^2)$ の、曲線 C : $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $(0 \leqq t \leqq 1)$ 上の線積分は、
  - C 上では、$\boldsymbol{a}(t,t^2,t^3) = (9t^2, -14t^5, 20t^7)$
  - $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = 9t^2 - 28t^6 + 60t^9$
  - $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \Big[3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big]_0^1 = 5$

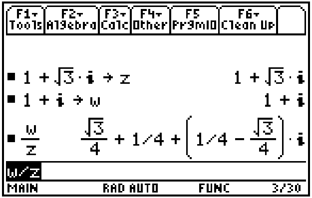


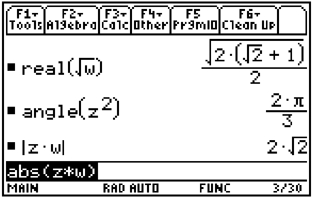


複素数の計算

- $z = 1 + \sqrt{3}i,\ w = 1 + i$ のとき、
  - $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i} = \dfrac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{1+3} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}i$
  - $zw = (1+\sqrt{3}i)(1+i) = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$

    $|zw| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
  - $w = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
  - $z^2 = (1+\sqrt{3}i)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$





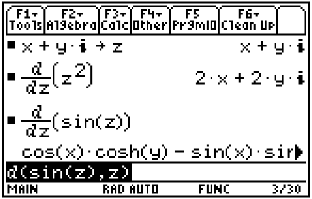
複素関数の微分

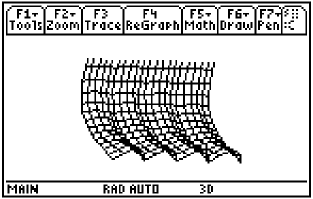
[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $z = x + iy$ のとき、
  - $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$
  - $\dfrac{d}{dz}(z^2) = 2z = 2x + 2yi$

    $\dfrac{d}{dz}(z^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \dfrac{\partial}{\partial x}(2xyi) = 2x + 2yi$
  - $\sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

    右下の図は、$|\sin z|$ のグラフ。(40 秒で表示)
  - $\dfrac{d}{dz} \sin z = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
- 形式的に微分するので、別途、正則性の確認が必要。

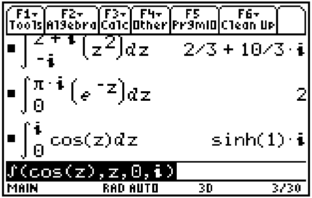


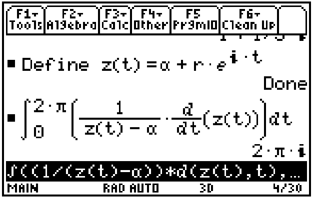


複素関数の積分

- 複素関数も、原始関数が存在するときは普通に計算できる。
  - $\displaystyle\int_0^{\pi i} e^{-z}\,dz = \Big[-e^{-z}\Big]_0^{\pi i} = -e^{-\pi i} + e^0 = -\cos\pi + 1 = 2$
- $C : z = z(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ に沿う $f(z)$ の積分は、
  - $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,\frac{dz}{dt}\,dt$ により計算する。
  - $C : z(t) = \alpha + re^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のとき

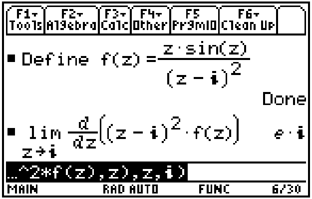
$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$





複素関数：留数の計算

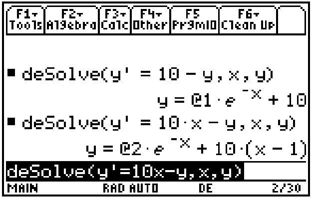
- 複素関数 $f(z)$ が、$z=\alpha$ を n 位の極として持つとき、
  - 留数は、$\mathrm{Res}(f,n)=\lim_{z\to\alpha}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-\alpha)^n f(z)$ により計算。
  - $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(z-i)^2}$ は、$z=i$ を 2 位の極として持つ。
  - $$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,2)&=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z\sin z)\\&=\lim_{z\to i}(\sin z+z\cos z)=\sin i+i\cos i\\&=-i\cdot\frac{e^{-1}-e}{2}+i\cdot\frac{e^{-1}+e}{2}=ei\end{aligned}$$

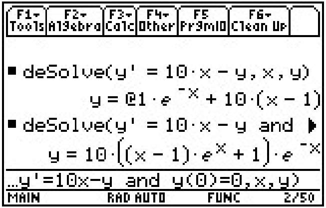


1 階微分方程式 F3 [C: deSolve]

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 大部分の 1 階微分方程式は、解析解を求めることができる。
  - 変数分離形 $y' = 10 - y$ の一般解は、$y = Ce^{-x} + 10$。
  - 1 階線形 $y' = 10x - y$ の一般解は、$y = Ce^{-x} + 10(x - 1)$。
  - 微分方程式の後に初期条件を追加することもできる。
    上記で $y(0) = 0$ を満たす解は、$y = 10(e^{-x} + x - 1)$
    TI-89 では、$y = 10((x - 1)e^{x} + 1)e^{-x}$ が表示される。
  - $@1, @2$ は積分定数。deSolve の実行ごとに番号が増える。

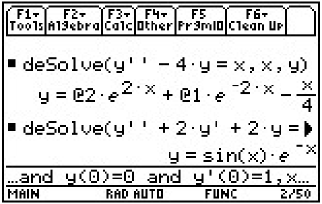


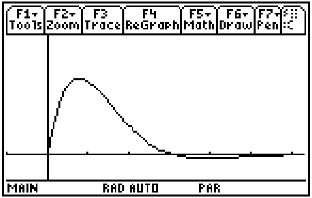


2 階微分方程式 F3 [C: deSolve]

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 2 階定数係数線形微分方程式の解析解も求められる。
  - 非同次線形 $y'' - 4y = x$ の一般解は、
    $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \dfrac{x}{4}$。
  - 同次線形 $y'' + 2y' + 2y = 0$ の一般解は、
    $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$。
  - 上記の、$y(0) = 0, y'(0) = 1$ のもとでの特殊解は $y = e^{-x} \sin x$
  - 右図は、$0 \leqq x \leqq 2\pi$,　$-0.1 \leqq y \leqq 0.5$ のグラフ。
- 一般解を求められないときは、方程式がそのまま返される。

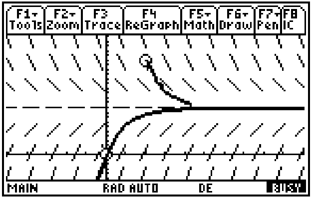


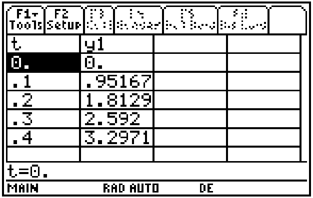


1 階微分方程式の勾配場

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 解の大域的な状況を示す勾配場も描画できる。
  - 1 階微分方程式の勾配場は、格子点 (x, y) を通る接線の断片を $y' = f(x, y)$ から計算して描画する。
  - 勾配場上の適当な点を通る解曲線を描画することができる。独立変数としては t を使用する。
  - 左図は $y' = 10 - y$ の勾配場と $y(0) = 0$ の解曲線であり、右図は、t の刻み幅を 0.1 としたときの数値解である。




F1 Tools F2 Setup

t	y1
0.	0.
.1	.95167
.2	1.8129
.3	2.592
.4	3.2971

t=0.

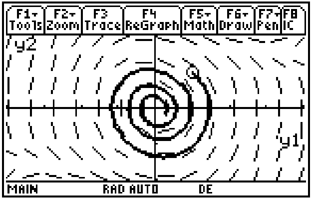
MAIN RAD AUTO DE

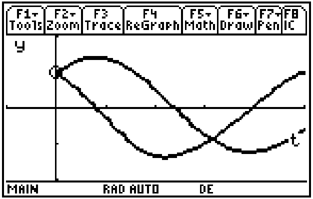
2 階微分方程式の位相平面

- 2 階以上の微分方程式の位相平面や解曲線も描画できる。
  - von del Pol Equation $y'' - 0.2(y^2 - 1)y' + y = 0$ を考える。
  - $y_1 = y,\ y_2 = y_1'$ とおくと、この微分方程式は

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0.2(y_1^2 - 1)y_2 - y_1 \end{cases}$$

    という 1 階連立微分方程式で表すことができる。
  - 左図は y_1 を横軸、y_2 を縦軸とする位相平面と、$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ を満たす解曲線、右図はそれぞれのグラフである。

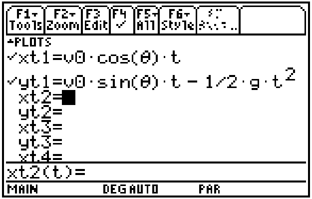


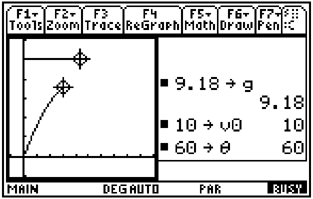


放物運動

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 原点から水平角 θ、初速度 v_0 で投げ上げられた物体の、t 秒後の変位は $x = (v_0 \cos\theta)t,\ y = (v_0 \sin\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2$ である。
  - 媒介変数を利用すると、このグラフが描画できる。
  - 画面を分割し、角の単位を度にして、運動の様子を具体的に見ることができる。
  - 水平飛行物体と衝突させるには、初速度 v_0 や角度 θ をどのように定めればよいかを実験的に確かめさせることもできる。

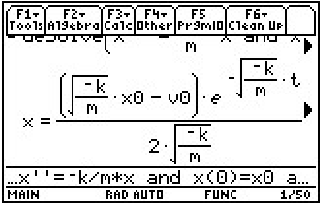


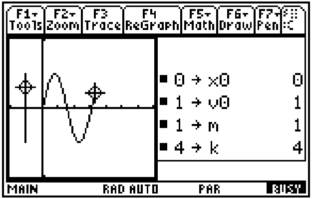


バネの振動

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

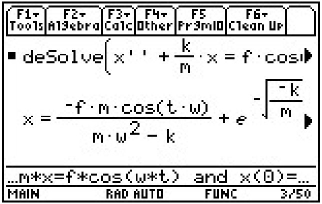
- ばね定数 k のコイルばねに質量 m の物体をつけた振動。
  - 運動方程式は $\dfrac{dx^2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$ である。
  - 初期変位 $x(0) = x_0, \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0$ を与えると、
    その解は $x = A\cos pt + B\sin pt\ (p^2 = k/m)$ である。
  - 左図は、$x_0 = 0, v_0 = 1, m = 1, k = 4$ としたときの振動の様子である。垂直方向の動きと、時間軸を横軸にとったときのグラフとを同時表示した。

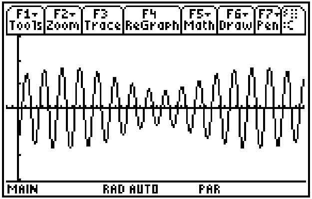




強制振動

- バネの振動に強制的な外力 $F\cos\omega t$ を与える。
  - 運動方程式は、$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=F\cos\omega t$
  - この微分方程式の特殊解は $\dfrac{F}{\dfrac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t$
  - $p\doteqdot\omega$ のときは「うなり」を生じる。
    右図は、$\dfrac{k}{m}=4,\ \omega=2.2,\ F=1$ の場合である。





方程式 $f(x)=0$ の数値解を求める [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 方程式の実数解は Solve を利用すると求められる。
- 実数解を求める方法を理解させるために、実数解を二分法で求めるプログラムを作成させることも有益である。
- $f(x)$ は定義済みで、$[a,b]$ 内に実数解を 1 つもとものとする。
  - 最初に $f(x_1)f(x_2)<0$ となる区間 $[x_1,x_2]$ を与える。
  - $x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ として、$f(x_1)f(x_3)$ の符号を調べる。
    $f(x_1)f(x_3)>0$ ならば、x_1 を x_3 で置きかえる。
    $f(x_1)f(x_3)<0$ ならば、x_2 を x_3 で置きかえる。
  - 再び $x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ として、$f(x_3)$ の値が指定した誤差内に納まるまで同様のことを繰り返す。

$f(x) = 0$ の実数解を求めるプログラム

: kai(a,b)	kai はプログラム名。引数は区間 $[a, b]$
: Func	関数であることを宣言
: Local aa, bb, ee, mm, yy	ローカル変数の宣言
: a→aa	a の値を aa に代入する
: b→bb	b の値を bb に代入する
: (a+b)/2→mm	$(a+b)/2$ の値を mm に代入する
: 10 ^ (−6)→ee	誤差の限界を 10^{-6} にして ee に代入する
: While abs(f(mm))>ee	$\|f(mm)\| > ee$ ならば以下を実行する
: 　If f(aa)∗f(mm)>0 Then	同符号ならば以下を実行する
: 　　mm→aa	mm の値を aa に代入する
: 　Else	同符号でないときは、以下を実行する
: 　　mm→bb	mm の値を bb に代入する
: 　EndIf	If 文終わり
: 　(aa+bb)/2→mm	$(aa+bb)/2$ を mm に代入する
: EndWhile	While 文終わり
: Return approx(mm)	誤差 10^{-6} 以内で求めた実数解 mm を返す
: EndFunc	関数定義の終了