数学教育での活用 (1)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 問題の答え合わせとしての利用。
  - 「分からない」学生ほど、教師に質問しない傾向がある。
  - 「分からない」学生にとって、「分かるツール」となる。
  - 「表示結果が丸写しされる？」というのは、誤解である。
  - 「数学を分かりたい」と思っているのは学生本人である。
    学生は「数学が分かるためのツール」として利用する。
- 数学的性質を理解させるための利用
  - グラフを利用すると、直感的に理解させることが可能。
  - グラフ上を、座標を表示しながら移動することもできる。
  - (グラフ上の理解) + (数値上の理解) + (式としての理解)
    という 3 つの側面からの理解を得させることができる。
- 数学的性質を発見させるための利用
  - 定理・公式を学生が発見するように仕向けることが可能。
  - 例) 積の微分公式　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - 教授内容によっては、教師が一方的に教える授業から、
    学生自身が発見する授業に転換させることが可能である。

数学教育での活用 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 数学的思考を支援するための利用
  - 「この場合はどうなる？」という疑問を持ったとき、
    複雑な計算が必要になる場合は、その疑問はそのまま残るが
    数式処理機能を利用すると結果を表示させることができる。
  - それにより、「では、この場合はどうなるのか？」と、
    次々に思考を展開していくことができる。
  - 数式処理機能を利用して数学的な性質について考察させ、
    成績下位の学生にも何らかの気づきを得させることができる。
- 数学と実世界との関わりを理解させるための利用
  - センサーにより収集した実データのグラフを見ることで、
    数学と実世界との関わりへの理解を深めることができる。
  - たとえば、距離センサーの利用により
    ボールバウンドと放物線。振り子の揺れと三角関数。
    光センサーと併用して、光度と距離の関係の把握。

答え合わせとしての利用 (1)

- 式の計算　F1
  - 展開 (expand)、因数分解 (factor)
  - 通分 (comDenom)、真分数 (propFrac)、部分分数分解 (expand)
  - 零点 (zeros)
- 方程式の解法　F2
  - 高次方程式と連立方程式 (Solve)
  - 非線形の方程式 (Solve, nSolve)
- 微分積分の計算　F3
  - 極限値 (lim)、和 (Σ)
  - 微分の計算 (d)、テイラー展開 (taylor)、微分方程式の解法 (deSolve)
  - 不定積分・定積分の計算 ($\int$)
  - 広義積分、偏微分、累次積分

答え合わせとしての利用 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 関数のグラフ ♦
  - $y = f(x)$
  - 媒介変数表示 $x = f(t), y = g(t)$
  - 極座標 $r = f(\theta)$
  - 数列 $a_n = f(n)$
  - 散布図
  - 3 次元グラフ $z = f(x, y)$
- 微分方程式の解曲線
  - 1 階微分方程式の勾配場と解曲線
  - 高階微分方程式の位相平面と解曲線
- ベクトルの計算
  - 和、スカラー倍、内積と外積
- 行列と行列式の計算
  - 和、スカラー倍、積
  - 逆行列、行に関する基本変形
  - 行列式の計算

グラフの平行移動・対称移動

- $y = f(x)$ のグラフの平行移動 $y = f(x-p)+q$
  - Home 画面で、$f(x)$ の式を定義する。
  - ♦ F1 で $y1 = f(x)$、$y2 = f(x-p)$、$y3 = f(x)+q$、$y4 = f(x-p)+q$ として、♦ F3 でグラフ描画。
  - $f(x)$ を自分で変えさせて、グラフの変化を観察させる。
  - ♦ F5 によりテーブル表示させて数値の変化も観察させる。
  - どのような場合にグラフがどう変化するかを気づかせる。
- $y = f(x)$ のグラフの対称移動
  - ♦ F1 で $y1 = f(x)$, $y2 = -f(x)$, $y3 = f(-x)$ として、♦ F3 によるグラフを観察させる。
  - どのような場合にグラフがどう変化するかを気づかせる。
- 最初に教員が説明した後で確認をさせるか、または、最初に学生に気づかせておいて、後から教員が解説する。

単位円と三角関数

- 単位上の点 (x, y) の座標の変化が余弦関数、正弦関数であることを簡単に理解させることができる。
- MODE で「Graph」を媒介変数 (parametric) にする。
- 3 つの関数を定義する。
  - $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1.5 \\ y = \sin(t) \end{cases}$
- ♦ F3 により、単位円上の回転、サイン関数のグラフ、そして y 軸方向の振動が同時に表示される。

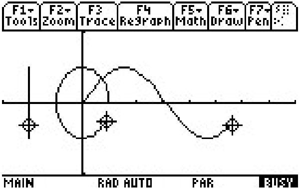


Figure: 単位円上の回転と正弦関数のグラフ

媒介変数表示のグラフ

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 媒介変数表示による関数のグラフでは、グラフ上を動く点の動き方を把握することが重要である。
- 通常は、t を消去した x, y だけの式からグラフ描画。
- そのグラフ上の点の動き方の違いを簡単に見ることができる。
- 画面の範囲を $-4 \leqq x \leqq 4,\ \ -2 \leqq y \leqq 2$、$t$ の範囲を $0 \leqq t \leqq 2\pi$ とするとき、次のような動きをするには、関数をどのように定めれば良いか。
  - 単位円上を、点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに 2 回転する。
  - 単位円上を、点 $(1, 0)$ を出発して時計回りに 1 回転する。
  - 直線 $y = x$ 上を $(0, 0) \to (1, 1) \to (0, 0) \to (-1, -1) \to (0, 0)$
  - 放物線 $y = 1 - x^2$ 上を $(1, 0) \to (1, 1) \to (-1, 0) \to (0, 1) \to (1, 0)$
  - 点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに 2 回転しながら $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

媒介変数表示のグラフ (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 媒介変数表示された関数のグラフをイメージするには、x 軸方向の動きと、y 軸方向の動きをイメージできることが必要。
- その理解を得ると、次のようなグラフアートを作成できる。

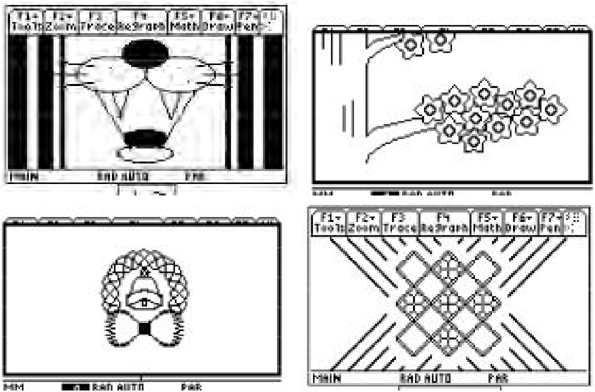


Figure: 学生の作成したグラフアート

極座標によるグラフ

- 極座標による曲線 $r = f(\theta)$ は、$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ により媒介変数表示にすることができるので、$x = f(t)\cos(t), y = f(t)\sin(t)$ として描画させる。
- たとえば、$r = \sin(2\theta)$ は、$x = \sin(2t)\cos(t),\ y = \sin(2t)\sin(t)$ により描画される。$x = t,\ y = \sin(2t)$ のグラフと同時描画させるとよい。
- $r < 0$ のとき、点 (r, θ) は点 $(|r|, \theta + \pi)$ を表す。

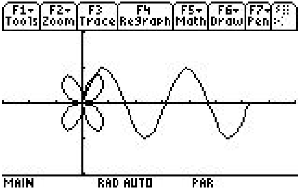
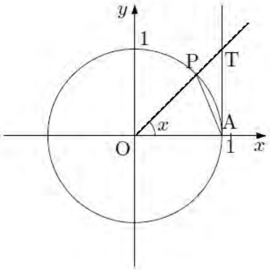


Figure: $r = \sin(2\theta)$ の極座標と直交座標のグラフ

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の説明

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

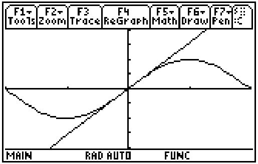
- 教科書の説明は
  - 面積の関係から
    $\triangle$POA $<$ 扇形 OAP $<$ $\triangle$TOA
  - $\sin x < x < \tan x$
  - $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$
  - $x < 0$ のときも同じ不等式が成立。
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

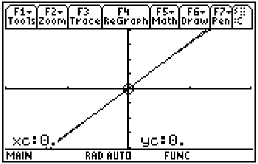


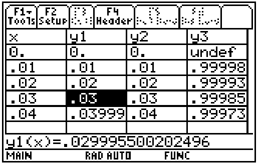
- グラフ電卓を利用すると
  - $y = x,\ y = \sin x$ のグラフを描画する。
  - 原点付近を何度か拡大する。
  - 1 直線に重なったグラフが描画される。
  - そのことから、比が 1 に近づくことは明らか。

$y = x$, $y = \sin x$ のグラフ

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/







- 最初に普通に説明して、確認のためにグラフ拡大してみせる。
- グラフを拡大していくとどうなるかを学生に問いかけて、$\sin x/x$ の極限値を学生に考えさせる。
- 単なるグラフだけではなく、♦ F5 の機能を利用して数値上の確認をさせることもできる。
- 学生は、式計算だけで納得できる者、グラフにより理解できる者、数値の変化で納得する者があり、その理解の仕方は多様である。グラフ電卓は、式計算・グラフ描画・テーブル表示が簡単に切り替えられる。

グラフ電卓使用後の学生の感想

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 主な関数の性質を一通り説明し終えた後で、関数の総復習の問題を解く中でグラフ電卓を使用させた。
- 使用後の学生の感想

質 問 項 目	YES	中 間	NO
授業はおもしろい	79.4	18.8	1.9
家や寮で勉強するときも使った	53.1	20.0	26.9
新しく発見したことがある	37.5	43.1	19.4
数学の理解がさらに深められる	57.5	40.0	2.5
数学が前よりおもしろくなった	43.8	50.6	5.6
数学が前より分かるようになった	51.3	45.6	3.1
難しい内容も簡単に見えてくる	51.9	32.5	15.6
自分で考えなくなる	25.0	46.3	28.8

有効回答は 160 名．(%)

成績と使用頻度との関係

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 成績上位者ほどグラフ電卓の使用法に習熟できている。

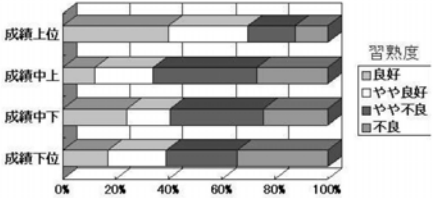


Figure: 成績とグラフ電卓の習熟度

- しかし、使用頻度が高いのは成績下位者の方である。

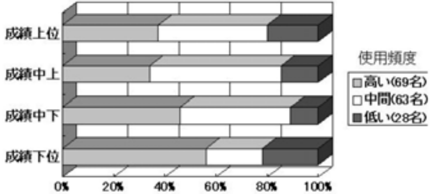


Figure: 成績とグラフ電卓の使用頻度

成績と使用頻度との関係 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 成績下位者ほど、数学上の疑問解決に役立っている。

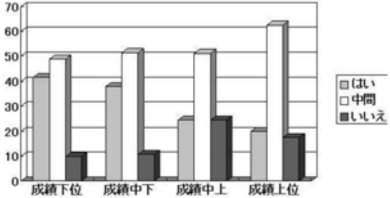


Figure: 成績別：数学上の疑問の解決に役立った

- 使用頻度が高いほど、前より分かるようになった。

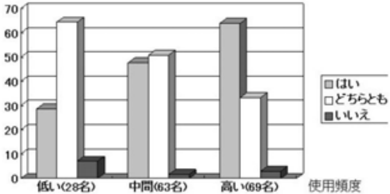


Figure: 使用頻度別：前よりも分かるようになった

成績下位者の使用後の感想

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 成績を平均 50 点、標準偏差 10 点の偏差値に変換したとき、50 点未満の学生の感想。括弧内の数は偏差値。
  - 数ナビはグラフの変化や交点が分かるし，想像しにくかったり分かりにくいグラフもすぐ分かる。使い方が分からないところもあるけど，私にしたら結構「いいもの」です (32)
  - 数ナビを使ったことにより，グラフの移動がとてもよく分かった (37)
  - 今まであいまいだったグラフが，数ナビのおかげで減ったと思う (38)
  - 数ナビは座標や交点などを求めるのが便利で，数ナビを使った授業は，理解や復習に役立ちました (39)
  - 数ナビがあると，自分で答え合わせができるので便利 (40)
  - 数ナビを使って，分からないところが分かるようになってきた (43)
  - 数ナビを使うことで，関数の理解度が高まったと思う (45)

グラフ電卓利用と PC 利用

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- グラフ電卓のキー操作は母国語では書かれていない。
- グラフ電卓の習熟率と、コンピューター操作の習熟率の間には強い関連性がみられ、 コンピューター操作に不慣れな学生は、グラフ電卓の操作にも戸惑う傾向がある。

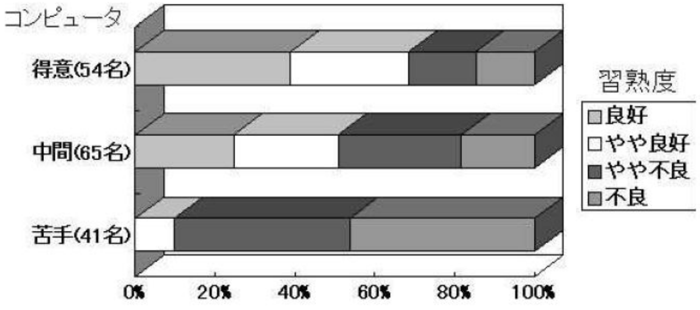


Figure: コンピューターの得意・不得意とグラフ電卓の習熟度

コンピュータ利用が不得意でも …

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- コンピューター操作が不得意な学生でも、「グラフ電卓を利用して、数学が前よりも分かるようになった」ことを半数近くは肯定している。
- 単純な機能だけでも、学生の関数のグラフ理解には十分に寄与していると思われる。

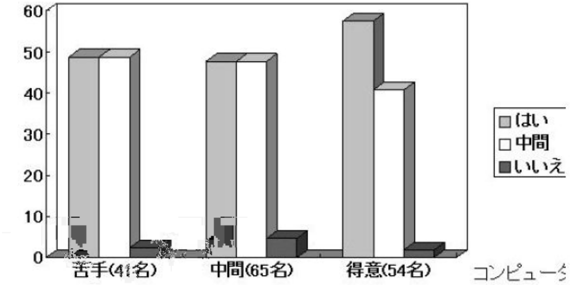


Figure: コンピューターの得意・不得意別：前より分かるようになった

考えなくなることへの懸念

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- グラフ電卓を利用すると、「学生が考えなくなるか？」
- 答えを丸写ししていれば、確かに思考力は低下する。
- そのような使い方をするとどのような試験結果が待っているかは、学生は十分に認識できる。
- この懸念を感じるのは、使用頻度の低い者が多い。

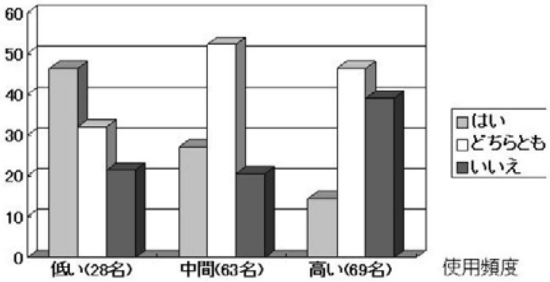


Figure: グラフ電卓の使用頻度別：自分で考えなくなる

微分公式 $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 教員の説明は、増分の記号 Δ や極限を用いた説明となる。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

- 学生がどこまで納得できているかは不明であるが、
  以後は、公式にもとづいた計算練習をさせることになる。
- 数式処理機能で、学生にこの公式を気づかせることができる。
- ただし、$x^n, \sqrt{x}, \dfrac{1}{x}$ の導関数については学んでいるが合成関数の微分法はまだ学んでいないものとする。

公式 $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (2)

- 次のような手順による。
  - 具体的な関数を $y = f(u), u = g(x)$ に分解させる.
    $y = (3x-5)^4$ は、$f(u) = u^4, g(x) = 3x-5$ に分解できる。
  - $y = f(u), u = g(x)$ の導関数を自分で計算させる.
  - $y = f(g(x))$ の導関数をグラフ電卓で求めさせる.
  - 以上のことを幾つかの関数で行わせた上で
    $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dy}{du}, \dfrac{du}{dx}$ の間にどのような関係があるかを考えさせる.
- 約半数の学生が、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ に気づいた。
- 3 つに分解する場合も同様であることに気づいた学生は、自分の発見にほくそ笑んでいた。

微分積分の基本定理

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

- 微分積分の基本定理：$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$
- 簡単な関数で、このことを学生に気づかせることができる。

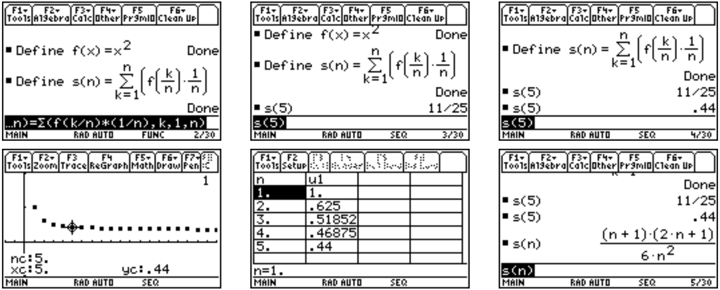


Figure: $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ の定義に基づく計算

微分積分の基本定理 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(n)$ を求めて、$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ の値が求められる。
- 区間 $[0,1]$ を区間 $[0,x]$ に変えて同様のことを行う。
  - $\displaystyle s(n,x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(k\cdot\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n},\quad g(x) = \lim_{n\to\infty} s(n,x)$
  - いろいろな $f(x)$ に対して $g(x)$ を求めさせる。
  - $g(x)$ と $f(x)$ との間にどのような関係があるかを考えさせる．
  - $f(x) = x^n$ のとき $\displaystyle g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ に，かなりの学生が気づいた．

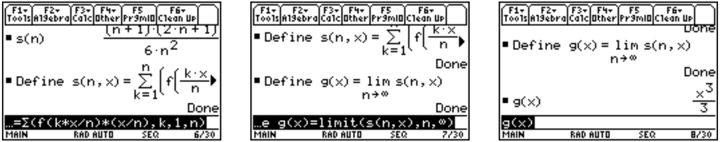


Figure: $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt = x^2$ であることへの気づき

数学に関する自由研究

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 数学で「この場合はどうなる？」という疑問を持ったとき、複雑な計算が必要になる場合は、その疑問はそのまま残るが数式処理機能を利用すると結果を表示させることができる。
- それにより、「では、この場合はどうなるのか？」と、次々に思考を展開していくことができる。
- このような形で数式処理機能を利用すると、
  - 一般的な問題を与えて数学的性質を考察させることができ、
  - 試行錯誤で何らかの数学性質を発見したときの喜びは、通常の問題を解けたときの喜びとは比較にならないものがある。
  - 数式処理機能を利用することで、その喜びを成績下位の学生にも味合わせることができる。
- 多様な解答の仕方がある問題は「自由研究」と呼ばれ、おもに社会や理科などの調査や実験などの場合に行われるが、数式処理機能を利用させることで、数学でも自由研究を課すことが可能である。

$(x+1)^n$ の展開式と指数 n との関係

- n を自然数とする。$(x+1)^n$ の展開式について、n と展開式の係数との間の関連性について考察せよ。

$$
\begin{aligned}
(x+1)^1 &= x+1\\
(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\
(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\
(x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1\\
(x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\\
(x+1)^6 &= x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1\\
(x+1)^7 &= x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1\\
(x+1)^8 &= x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1\\
(x+1)^9 &= x^9+9x^8+36x^7+84x^6+126x^5+126x^4+84x^3+36x^2+9x+1
\end{aligned}
$$

二項係数の書き出し方

- ピラミッド状

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

- 下三角状

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

展開式に関する学生の気づき

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 多数の展開式を書き出し、係数と指数 n との間の関連性について考察して、次のようなことが指摘されてきた。
  - 左から 3 番目の項 x^{n-2} の係数は $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ である。
  - x^m を左半分の項とすると，その係数は x^{m+1} の係数を $\dfrac{1}{n-m}$ 倍して $m+1$ をかけたものである。
  - 左から数えて k 番目の項の係数と指数をかけて k で割ると，次の項の係数になる。たとえば，$(x+1)^4$ の展開式の 2 番目の項 $4x^3$ では $4\times 3\div 2=6$ が 3 番目の項の係数である。
  - $(x+1)^n$ の係数の和は 2^n である。
  - 斜めに係数を加えると，右下の係数がその和になる。たとえば，$1+3+6=10$,
    $1+4+10=15$ であり，10, 15 はいずれも右下にある。
  - $n=4$ までは，係数を繋げてできる数は 11^n である。たとえば，$11^2=121$，$11^3=1331$ である。

$x^n - 1$ の因数分解と指数 n との関係

- $x^n - 1$ の因数分解の式がどのようになるかを調べて、分解された式と指数 n の間の関係について考察せよ。

$$
\begin{aligned}
x^1 - 1 &= x - 1\\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1)\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)\\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\\
x^7 - 1 &= (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^8 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\\
x^9 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\\
x^{10} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\\
x^{11} - 1 &= (x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^{12} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}
$$

因数分解の式に関する学生の気づき

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 多数の因数分解の式を書き出して、その式と指数 n との間の関連性について考察して、次のようなことが指摘されてきた。
  - n が 3 の倍数のときは，x^2+x+1 が必ず含まれる。
  - $x^{3n}-1=(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)$ である。
  - n が 4 の倍数のときは，$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ が含まれる。
  - 指数が nm の形の式は，x^m-1 を因数にもつ。
  - n が素数のときは，$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ である。
  - 指数が 2^n のときは，$x^{2^n}-1=(x-1)(x+1)\underline{(x^2+1)(x^4+1)\cdots}$ となり，下線部は $n-1$ 個の積である。
  - 指数が 3^n のときは，$x^{3^n}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)\cdots$ の形である。
  - n の約数の数と，因数分解された式の因数の数とは一致する。

三平方の定理

- 三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ が成り立つような自然数 a,b,c について、$3,4,5$ や $5,12,13$ のような数がありますが、他にどのような数があるか。また、3 つの数のうち 2 つの数が連続するようなものは、他にあるか。
- この課題は、グラフ電卓がなくても考察可能である。
- 学生からは、次のようなことが指摘されてきた。
  - $A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x について，x の 1 の位の数は 0,2,4 のときに限られる。
  - $a^2+b^2=c^2$ において b,c が連続する場合は，

$$3^2+(4\times 1)^2=\{(4\times 1)+1\}^2 \qquad (4=3+1)$$
$$5^2+(6\times 2)^2=\{(6\times 2)+1\}^2 \qquad (6=5+1)$$
$$7^2+(8\times 3)^2=\{(8\times 3)+1\}^2 \qquad (8=7+1)$$

つまり，a は必ず奇数 $(a\geqq 3)$ で，b は a を 2 で何回割れたかという回数を $a+1$ に掛けた数である。

三平方の定理に関する学生の気づき

- b, c が連続するとき，次のことが成立する。
  $(2n+1)^2 + (4(n+(n-1)+\cdots+1))^2$
  $= (4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$。
- b, c が連続するとき，a, b, c は，60 の倍数になっている。
- b, c が連続する a, b, c の和 $a+b+c$ の第 2 階差は 8 になる。
- a, b が連続する場合として

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$20^2 + 21^2 = 29^2$$

$$119^2 + 120^2 = 169^2$$

n 段目の式を $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$ とすると，

$$a_n = 6 \times a_{n-1} - (a_{n-2} - 2), \quad c_n = 6 \times c_{n-1} - c_{n-2}$$

という関係がある。

3次関数の性質に関する考察

- 1年生の夏休みに、計算問題の他に次の課題を与えた。
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは、a,b,c がどのようなときに、どのようになるかを考察して結果をまとめて提出せよ。
- 出題者側の意図は、単純な理解を得て欲しいことにある。
    - 3次関数のグラフの特徴を捉えて欲しい。
    - $x=a,b,c$ が共有点になること。
    - $a=b$ 等の場合に x 軸に接することを把握して欲しい。
- 多数の学生は、教員側の想定内の内容を指摘してきた。
    - グラフと x 軸との交点は $x=a,b,c$ のときである。
    - a,b,c のどれか2つが等しいと、そこで x 軸に接する。
    - a,b,c の符号を全て逆にすると原点に関して対称になる。
    - $a=b=c$ 以外は、必ず、山と谷ができる。

学生 A (1 年生) の考察

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 学生 A は、いろいろなグラフを鑑賞した上で、次のことを見抜く。
  - グラフのパターンには、$a = b, b = c, a = b = c$、全て異なるときの 4 つのパターンしかない。
  - $a = b = c$ のときは、$y = x^3$ を x 軸方向に平行移動したもの。
- さらに、$b - a = c - b$ の場合に関心を持った。
  - $b - a$ の値を増やしながら、極大値の変化を調べた。
  - 3 次関数であり、$b - a = 1$ のときは 0.3849 なので、他の場合は $0.3849 \times (b - a)^3$ ではないか？
  - 表を作ってみて、それを確認する。

垣間	極大値
1	0.3849
2	3.0792
3	10.3923
4	24.6336
5	48.1125

学生 A の考察 (2)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- y 座標が求まる以上は、x 座標も求まるはずである。
  - 問題を簡易化して
    $y=(x-j)x(x+j)$ で考察する。
  - j と極大値の x 座標の表を作る。
  - x 座標は j に比例している。

j	頂点の x 座標
1	-0.57735
2	-1.1547
3	-1.73205

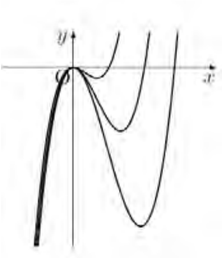
- 以上より、次の結論を得る。
  - $b-a=c-b$ となる式において
    山の頂点の座標は $(b-0.57735(b-a), 0.3849(b-a)^3)$,
    谷の最下点の座標は $(b+0.57735(b-a), -0.3849(b-a)^3)$
- この結論は正しい！
  - 平行移動すれば $y=x(x^2-a^2)=x^3-a^2x,\ (a>0)$
  - $y'=3x^2-a^2$ より、極値をとるのは $x=\pm a/\sqrt{3}$ のとき。
  - このときの y 座標は $y=\mp(2\sqrt{3}/9)a^3$。
  - 小数に直すと，$1/\sqrt{3}=0.57735,\ 2\sqrt{3}/9=0.3849$ である。

学生 A の考察 (3)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 次に、$a = b$ として $y = (x-a)^2(x-c)$, $(a < b)$ を考察する。
  - 問題を簡易化して、$y = x^2(x-c)$ $(c > 0)$ を考える。
  - 頂点の y 座標と c を対応させた表を作成。
  - 前の考察と同様に考えて、
    x 座標は $0.66667c$、y 座標は $-0.148148c^3$ を見抜く。

c	x	y
1	0.666667	-0.148148
2	1.33333	-1.18519
3	2	-4
4	2.66667	-9.48148
5	3.33333	-18.5185
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	$0.666667c$	$-0.148148c^3$



学生 A の考察 (4)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 以上より、次の結論を得る。
  - 谷の最低値の座標は $(a+0.66667(b-a), -0.148148(b-a)^3)$
- 同様にして、$y=(x-a)(x-b)^2$, $(a<b)$ となる式では、
  - 山の最大値の座標は $(a-0.666667(b-a), 0.148148(b-a)^3)$。
- この結論も正しい！
  - $y=x^2(x-a)=x^3-ax^2$ では，$y'=3x^2-2ax$
  - 極値を取るのは $x=0, 2a/3$ のとき。
  - そのときの y 座標は，$y=0, -4a^3/27$
  - 小数に直すと $2/3=0.666667$，$4/27=0.148148$ である。
- 学生 A の思考過程を見ると，
  - 考えやすいように問題を簡易化
  - 状況をグラフ電卓で 調べ，類推し，正しいことを確認。
  - 確認後は，別な問題設定をして同様のことを繰り返す。
  - まさに数学的思考そのものが行われている。

学生 K (1 年生) の考察

- 学生 K は、放物線は $y=f(x)=ax^2$ のグラフを平行移動して $y=f(x-p)+q$ の形に表ることから，3 次関数についても同じような変形ができないだろうかを考える。
- 2 次関数の場合と同様の計算を行うことで、次の式を導く。

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3 \\ &\quad + a\left\{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^2}\right)\right\} \end{aligned}$$

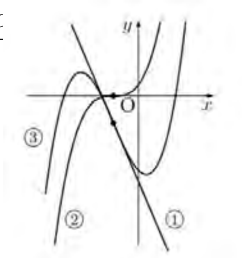
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の場合にあてはめて次を導く。

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c) &= \left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x \\ &\quad + \frac{(a+b+c)^3}{27}-abc \end{aligned}$$

学生 K の考察 (2)

- y 軸方向の平行移動部分に x が含まれている。
- そこで、次の 3 つの関数のグラフを考察する。

$$\begin{cases} y = \dfrac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+c}{3} \\ \quad +\dfrac{(a+b+c)^3}{27} - abc \quad ① \\ y = \left(x - \dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad ② \\ y = (x-a)(x-b)(x-c) \quad ③ \end{cases}$$



- 次のことに気づく。
  - ①③のグラフの共有点の x 座標は，②のグラフの x 軸との共有点の x 座標と一致する。
  - ①式に x が含まれているために，それを②式に加えるとグラフ自体が変わってしまう。
  - 3 次関数のグラフは，①の 1 次式の傾きが大きく関わっており、x の 1 次の項は $f(x)$ の方に含めて考えるべきである。

学生 K の結論

- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，

$$y=x^3-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}x$$

のグラフを，x 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$，y 軸方向には

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9}-abc$$

だけ平行移動したものである。

- 学生 K は、$y=x^3+\alpha x$ の極値について調べることにより、$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の極値を与える座標についても、文字式で正確に記述している。
- 最後の感想で、「自由研究はやっているうちどんどん面白くなってきて、メチャクチャ頑張りました。」と書いている。

「自由研究」に対する学生の感想

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 数学は奥が深いなあと思いました。
- 数学とはおもしろいものだなあと思いました。
- 問題を解くのではなく，自分で発見するところが苦労でもあり楽しかった。
- 考えても疑問がまた出てきて，またそれについて考えるのが楽しかった。
- 解説プリントでは，他の人の考え方がのっていて，新しい視点をみつけれた。
- 数学は，調べてみると沢山のことが発見できるんだと思った。
- 普段あまりしない「良く見て考える」といったことをする機会になったと思う。
- ただの式だけだとやる気がしない課題でも，数ナビのグラフ機能を使うと分かりやすいし，楽しいのでやりがいがあった。
- まったくできなかったので，とてもつらかった。

学生の感想（成績別)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 学生の感想を、4 つに区分した。
  (1) 楽しかった、面白かった、良かった
  (2) 勉強になった、理解が深まった
  (3) 大変だった・面倒だったが、面白かった・勉強になった
  (4) 分からなかった、難しかった
  (5) その他

成績	自由研究に関する感想 (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
上位	17	6	9	5	3	40
中上	12	7	9	10	1	39
中下	11	6	5	5	4	31
下位	11	3	10	7	1	32
計	51	22	33	27	9	142
%	35.9	15.5	23.2	19.0	6.3	100

学生の感想（成績別）

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

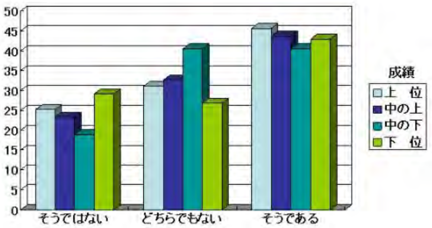


Figure: 成績別：自由研究は面白かった

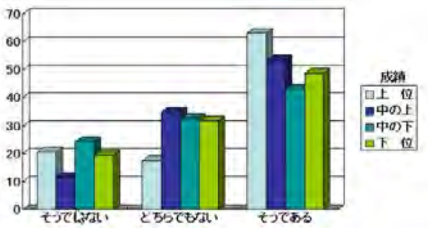


Figure: 成績別：自由研究で新しい発見があった

数学における「自由研究」の意義 [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

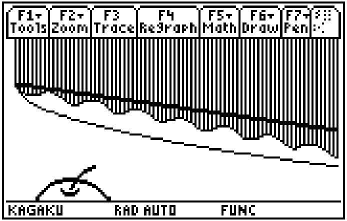
- 通常の問題演習は，教師から与えられた問題を「解く」だけ。
- 自由研究では，
  - 提示された課題から関心を持ったことを調べて，
  - 自分の思考過程をレポートにまとめる。
  - グラフ電卓に表示されるグラフから何を読み取り，それをどのように考えるかが問われる。
  - そこでは様々なまとめ方がなされており、正解はない。
- 学生の感想を見ると,「次々に自分で問題を設定して考える」「自分で何かを発見する」部分に，おもしろさ，達成感，やりがいを感じたようである。
- グラフ電卓の利用で，
  - 個々の学生の能力に応じて何らかの発見があった。
  - 教師側が「あたり前」と感じる部分でも,「あたり前」ではない学生にとっては大きな発見である。
  - 成績の上下に関わらず数学上の発見体験させることができた。

グラフアートの作成

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- グラフ電卓を利用すると、関数のグラフをつなぎ合わせて絵 (アート) を作成させることができる。
- それを作成するには、次のことを自分で決める必要がある。
  - どんな「絵」を描くか。
  - 絵の線はどのような関数のグラフで実現できるか。
  - そのグラフの、どの範囲を利用すべきか。
- 境界線を実現できる関数をイメージできないときは
  - いろいろな関数のグラフを表示させて、
  - 係数を変えるとグラフがどのように変わるかを見ることで
  - 関数の式とグラフの形との対応関係が自然に把握される。
- 作成するには、ある程度の時間が必要なので、グラフ電卓を自由に使える環境を用意する必要がある。
- 関数のグラフの総復習の場として、非常に有意義である。

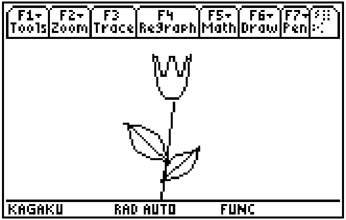
学生の作品例-1 ($y = f(x)$、1 年) [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/



$$y1 = -\sqrt{x + 7.5} + 1.7$$
$$y2 = -1/7 \cdot x + 0.7 \mid x > -7.7$$
$$y3 = \frac{-x}{5} + 1/5 \cdot \sin(3 \cdot x) \mid x > -7.6$$
$$y4 = \sqrt{2^2 - (x + 4.8)^2} - 4.8$$
$$y5 = (x + 4.9)^2 - 3.5 \mid -5.5 < x < -4.4$$
$$y6 = \sqrt{x + 4.9} - 3.3 \mid x < -3.5$$

学生の作品例-2 ($y = f(x)$、1 年)

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/



(1) $y = 2x^4 + 1.5$
$-1.2 < x < 1.2$

(2) $y = 10x \qquad x < 0.3$

(3) $y = \cos(2\pi x) + 4$
$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2.7}$

(4) $y = \dfrac{1}{x} \qquad -3 < x < -0.2$

(5) $y = \dfrac{1}{x+3} - 3.5$
$-2.8 < x < 0.1$

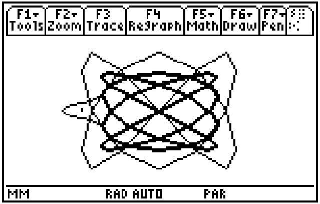
(6) $y = -\dfrac{3.5}{3}x - 3.5$
$-2.8 < x < 0$

(7) $y = \dfrac{1}{x+1} - 2$
$-0.8 < x < 1.8$

(8) $y = -\dfrac{1}{x-2} - 5$
$-0.5 < x < 1.8$

(9) $y = \dfrac{3.5}{3}x - 4$
$-0.5 < x < 1.8$

学生の作品例-3 (媒介変数: 2 年) [URL] http://yunavi.la.coocan.jp/



$$(1)\quad \begin{cases} x = 4\sin(4t) \\ y = 3\sin(6t) \end{cases}$$

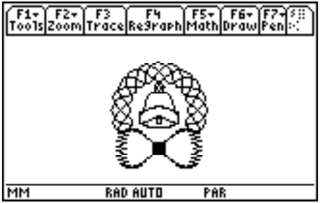
$$(2)\quad \begin{cases} x = -\cos(4t) - 4 \\ y = t \mid t < 4/5 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x = 3\sin(4t) \\ y = 2\sin(3t) \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} x = -\cos(4t) - 4 \\ y = -t \mid t < 4/5 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1/7 \end{cases}$$

学生の作品例-4 (媒介変数: 2 年)　[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/



全部で、14 組の媒介変数表示の関数が利用されている。

上の柄の部分は 3 組が使用され、1 組は次の式である。

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\cdot\cos(t) + 2\cos(t) \\ y = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\cdot\sin(t) + 2\sin(t) \end{cases}$$

リボンの右側は次の関数である。

$$\begin{cases} x = 2\sin(t/2) + \dfrac{1}{4}\sin(23.5t) \\ y = \sin(t) - 2 \end{cases}$$

グラフアートの意義

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 通常の問題をやるだけでは、このような作品は作れない。
- 関数の式と実際の点の動きとの対応関係を把握できるようになることが重要であり、グラフ電卓で多数のグラフを描画させていくうちにそのような理解が得られていく。
- 三角関数までを終えた 12 月中旬に電卓を貸与して、3 時間の説明をしただけで、グラフアートを作成させた。
    - 1 時間目：基本の使い方。関数定義、グラフ描画のさせ方。
    - 2 時間目は、グラフの拡大・縮小。交点や最大・最小の求め方。
    - 3 時間目は、範囲やグラフの描画スタイルの指定方法。
- 学生は、自分のイメージ通りの絵を作成するには、次のことを試行錯誤的に行う必要がある。
    - どの関数のグラフを使用すべきか。
    - 必要な箇所にそのグラフが表示されるようにするには、どのような平行移動・対称移動をすべきか、あるいは係数をどのように定めるべきか。

作成後の学生の感想

[URL] http://yunavi.la.coocan.jp/

- 忘れかけていた指数・対数・無理関数を使ってできたので，思い出せたし，関数の楽しみが分った。
- 時間がかかったけど，思ったようなグラフが描けるとなかなかうれしいものがある。
- 描いているときはめんどうくさかったけど，勉強にもなったし，楽しかったので良かった。
- 関数を使ってグラフ・アートをすることによって，今まで習ったいろいろな関数を振り返ることができて良かった。
- 超めんどくさいと思っていたけど，自分が知っている範囲の簡単な関数でもできたのでうれしかった。作成しているときが，一番勉強しているという実感がわいた。
- 根気のいる作業だと思った。でも，完成した時には達成感があり，これを自分で作ったんだなあと思うと，うれしくなった。

グラフ電卓を利用して分かったこと

- 貸与後の感想では、90%以上が、グラフ電卓は「グラフを理解する上で役に立つ」と回答している。
- どのような理解に役だったかを聞くと
  - $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $2\sin(x)$ など変化させてグラフにすると，グラフの違いが分かってためになるし理解も深まった。
  - 三角関数の合成が良く分った。
  - $y = |f(x)|$ のグラフは，$y < 0$ の部分を x 軸に関して対称移動したものであること。
  - $f(2x)$ と $2f(x)$ の違いや，$f(-x)$ と $-f(x)$ の違いが分からなかったけど理解できるようになった。
  - いろいろな関数のグラフが，こんなグラフになるんだ，と何度もやっているうちに分かるようになった。
  - 数種類のグラフの特徴を見分けるのに，細かい数値を出してくれてとても分かりやすかった。

数学教育でのグラフ電卓利用の意義

- 関数のグラフに対する理解が深められ、
  - どのような式がどのようなグラフになるのか，
  - 各係数の意味を理解することも容易
  - 座標データを通して理解することもできる
  - 各自の関心の持ち方により，いろいろな角度からの理解が可能である。
- 自分で問題を解決できるようになる。
  - 分からない箇所を質問に来る学生は一部。
  - そのまま放置してしまう学生が多い。
  - 自分の分からない部分を，グラフ電卓で試行錯誤しながら追及することができる。
- 数学の授業が分かる楽しさや，数学的なことについて何かに気付く機会が増える。