～モンゴル3高専における教員研修会での講演～

# 数学と工学におけるグラフ電卓の活用

一関工業高等専門学校
名誉教授　梅野　善雄

2017.12.11～2017.12.22

# 一関工業高等専門学校

- 1964 年に設立された。JABEE 認定校。

- 所在は、岩手県一関市。人口は 12.3 万人。
  平均気温は –0.5 度〜24.0 度。年平均では 11.3 度。
- モンゴルからの留学生は 8 名 (男子 6 名、女子 2 名)。
  現在 4・5 年に各 1 名（機械・化学）在学中。

# 一関工業高等専門学校

- 学科構成は 4 学科。
  - 機械・制御情報・電気情報・物質化学＋専攻科
  - 現在の学生総数は 859 名（留学生は 6 名）。
- 2017 年度より、未来創造工学科の 1 学科で学生募集。
  - 2 年より 4 コースに分かれる。
- 高専ロボコンでは、全国大会出場の常連校になっている。2017 年度の大会では、準決勝まで進みました。
- 周辺には、
  - 世界遺産「平泉」、トヨタの大規模自動車工場。
  - 国際リニアコライダー (ILC) の建設予定候補地。付近の北上山地が世界の中での有力候補。地下 100m に約 50Km の直線トンネルでの素粒子衝突実験装置。

# グラフ電卓との出会い (1)

- [1998 年]　「第 3 回：数学教育におけるテクノロジーに関するアジア会議」（筑波大学で開催）
  - 数式処理のできるグラフ電卓の存在を知った。
  - 帰校後、研究費で TI-92(現在の voyage200) を購入した。
- [1999 年]　数学教育で使用した場合の教育効果のイメージ
  - 日本数学教育学会の高専・大学部会で発表した。
- [2000 年] この電卓のアピール活動。
  - 工学教育でも有用であることを、工学部の教員や企業関係者を読者対象とする「工学教育」で発表した。
  - グラフ電卓に関する海外での状況を紹介し、日本での活用促進を訴える論考を投稿して読売新聞に掲載された。
  - 文部省から、教育効果についての問い合わせがあった。

# グラフ電卓との出会い (2)

- [2001 年〜2009 年]　グラフ電卓 TI-89 を貸与した授業実践。
  - 授業担当クラスに、1ヶ月〜1 年間の長期貸与。
  - その教育効果等を様々な角度から調査分析して発表。
  - 成績下位の学生には「数学が分かるツール」となる。
    成績上位の学生では「数学上の思考のツール」となりうる。
  - 単なる答え合わせとしての使用ばかりではなく、
    グラフアートの作成や数学に関する自由研究でも活用。
- [2010 年〜2014 年] 物質化学工学科教員との共同研究。
  - この学科では、学生に TI-89Titanium を購入させている。
  - 工学実験におけるグラフ電卓とセンサーの活用の有効性を実証した。現在も、4 年の工学実験で活用されている。
  - 信号を電圧変動で伝えるセンサーであれば、汎用のセンサーの信号でも読み取ることが可能あることを確認した。
- [2015 年 3 月] 一関高専を退職。非常勤講師。

## 数学教育での利用 (1)

- 問題の答え合わせとしての利用。
  - 「分からない」学生ほど、教師に質問しない傾向がある。
  - 「分からない」学生にとって、「分かるツール」となる。
  - 「表示結果が丸写しされる？」というのは、誤解である。
  - 「数学を分かりたい」と思っているのは学生本人である。

  学生は「数学が分かるためのツール」として利用する。
- 数学的性質を理解させるための利用
  - グラフを利用すると、直感的に理解させることが可能。
  - グラフ上を、座標を表示しながら移動することもできる。
  - (グラフ上の理解) + (数値上の理解) + (式としての理解) という 3 つの側面からの理解を得させることができる。
- 数学的性質を発見させるための利用
  - 定理・公式を学生が発見するように仕向けることが可能。
  - 例) 積の微分公式　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - 教授内容によっては、教師が一方的に教える授業から、学生自身が発見する授業に転換させることが可能である。

# 数学教育での利用 (2)

- 数学的思考を支援するための利用
  - 「この場合はどうなる？」という疑問を持ったとき、複雑な計算が必要になる場合は、その疑問はそのまま残るが数式処理機能を利用すると結果を表示させることができる。
  - それにより、「では、この場合はどうなるのか？」と、次々に思考を展開していくことができる。
  - 数式処理機能を利用して数学的な性質について考察させ、成績下位の学生にも何らかの気づきを得させることができる。
- 数学と実世界との関わりを理解させるための利用
  - センサーにより収集した実データのグラフを見ることで、数学と実世界との関わりへの理解を深めることができる。
  - たとえば、距離センサーの利用により
    ボールバウンドと放物線。振り子の揺れと三角関数。
    光センサーと併用して、光度と距離の関係の把握。

# 工学教育での利用：電卓としての利用

- 工学で実際に現れる方程式や関数は、複雑なものが多い。
  - 方程式の近似解や、複雑な関数のグラフなどが頻出する。
  - 媒介変数表示の場合は、グラフを簡単にイメージできない。
  - グラフ電卓を利用すると、方程式の数値解が求められるだけではなく、グラフと関連させた理解をすることができる。
- 工学では微分方程式が頻出する。
  - 解析解を求めるだけでなく、解の挙動を分析する必要がある。
  - 非線形の微分方程式の場合は、解析解を求めることが困難。
  - グラフ電卓は、1・2 階であれば解析解と解曲線を表示できる。
  - 高階や非線形でも、数値解や解曲線を描画することができる。
  - 勾配場や相平面図から大域的な理解を得ることもできる。
  - 係数を変えることでの解曲線の挙動も簡単に確認できる。
- 線形代数、フーリエ解析、ベクトル解析、複素解析で利用することもできる。

# 工学教育での利用：センサーの活用

- データ収集器を利用して、実データを簡単に収集できる。
  - TI-89 の場合は CBL2。TI-Nspire の場合は Lab Cradle。
  - 複数センサーからのデータの、同時受信も可能である。
  - 最大能力は、CBL2 は 5 万個 / 秒、Lab Cradle は 10 万個 / 秒。
  - データ収集の作業時間を短縮して、データ解析に専念できる。
- 収集されたデータは電卓側に自動的に転送される。
  - 表計算機能により、即座にデータ整理や統計解析ができる。
- 使用できるセンサーは 60 種類以上。
  - 距離、速度・加速度、光、温度、電圧、電流、磁界、音、pH、圧力、流速、吸光度、電気伝導度、溶存酸素、CO2 濃度等
  - 工場現場ではセンサーによる制御が普通と思われるので、このようなセンサーの扱いに慣れさせておくことも必要。
- 工学用のセンサーの信号もグラフ電卓で受信可能と思われる。
- センサーを組み合わせて、新たな測定装置や測定原理を学生に考案させることも可能ではないかと思われる。

# 使用した学生の反応

- 関数のグラフの確認のための短期利用の場合。
  - 1 年生の後半に、関数グラフの総復習のときに 1ヶ月貸与。
  - この期間の授業内容は、グラフに関する総復習の問題。
  - 自分の答えを確認をさせるために使用させた。
- 貸与期間終了後の学生の感想 (高専 1 年生：160 名)。

グラフ電卓に使用に関する感想　(%)

| 質問内容 | Yes | 中間 | No |
|---|---|---|---|
| 授業はおもしろい | 79.4 | 18.8 | 1.9 |
| 家での勉強でも使った | 53.1 | 20.0 | 26.9 |
| 前より面白くなった | 43.8 | 50.6 | 5.6 |
| 数学の理解が深められる | 57.5 | 40.0 | 2.5 |
| 前より分かるようになった | 51.3 | 45.6 | 3.1 |
| 難しい内容も簡単に見えてる | 51.9 | 32.5 | 15.6 |
| 自分で考えなくなる | 25.0 | 46.3 | 28.8 |

# グラフ電卓に関する日本と世界の状況

- 日本の状況
  - 残念ながら、普及が促進しているとは言いがたい。
  - 高専で個人購入させているのは、福井高専 1 校のみである。
  - 日本においても、個人購入させるにはハードルが高い。
  - 高校で使用しているのは、海外子女を多く受け入れている学校や、国際バカロレア (IB) 認定校などである。
  - おそらく、日本では大学受験に向けた指導が重要視され、グラフ電卓利用の授業に取り組む余裕がないためと考えるが、
  - 理工系学生にとっては必須の学習アイテムであると確信する。
- 世界の状況
  - 数式処理機能を持たない TI-84Plus が主流になっている。
  - 数式処理機能を持つグラフ電卓の、試験での使用は禁じられることが多い。

# 数学教育での活用 (1)

- 問題の答え合わせとしての利用。
  - 「分からない」学生ほど、教師に質問しない傾向がある。
  - 「分からない」学生にとって、「分かるツール」となる。
  - 「表示結果が丸写しされる？」というのは、誤解である。
  - 「数学を分かりたい」と思っているのは学生本人である。

    学生は「数学が分かるためのツール」として利用する。
- 数学的性質を理解させるための利用
  - グラフを利用すると、直感的に理解させることが可能。
  - グラフ上を、座標を表示しながら移動することもできる。
  - (グラフ上の理解) + (数値上の理解) + (式としての理解)

    という 3 つの側面からの理解を得させることができる。
- 数学的性質を発見させるための利用
  - 定理・公式を学生が発見するように仕向けることが可能。
  - 例) 積の微分公式　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - 教授内容によっては、教師が一方的に教える授業から、

    学生自身が発見する授業に転換させることが可能である。

# 数学教育での活用 (2)

- 数学的思考を支援するための利用
  - 「この場合はどうなる？」という疑問を持ったとき、
    複雑な計算が必要になる場合は、その疑問はそのまま残るが
    数式処理機能を利用すると結果を表示させることができる。
  - それにより、「では、この場合はどうなるのか？」と、
    次々に思考を展開していくことができる。
  - 数式処理機能を利用して数学的な性質について考察させ、
    成績下位の学生にも何らかの気づきを得させることができる。
- 数学と実世界との関わりを理解させるための利用
  - センサーにより収集した実データのグラフを見ることで、
    数学と実世界との関わりへの理解を深めることができる。
  - たとえば、距離センサーの利用により
    ボールバウンドと放物線。振り子の揺れと三角関数。
    光センサーと併用して、光度と距離の関係の把握。

# 答え合わせとしての利用 (1)

- 式の計算　F1
  - 展開 (expand)、因数分解 (factor)
  - 通分 (comDenom)、真分数 (propFrac)、部分分数分解 (expand)
  - 零点 (zeros)
- 方程式の解法　F2
  - 高次方程式と連立方程式 (Solve)
  - 非線形の方程式 (Solve, nSolve)
- 微分積分の計算　F3
  - 極限値 (lim)、和 ($\Sigma$)
  - 微分の計算 ($d$)、テイラー展開 (taylor)、微分方程式の解法 (deSolve)
  - 不定積分・定積分の計算 ($\int$)
  - 広義積分、偏微分、累次積分

# 答え合わせとしての利用 (2)

- 関数のグラフ ♦
  - $y = f(x)$
  - 媒介変数表示 $x = f(t), y = g(t)$
  - 極座標 $r = f(\theta)$
  - 数列 $a_n = f(n)$
  - 散布図
  - 3 次元グラフ $z = f(x, y)$
- 微分方程式の解曲線
  - 1 階微分方程式の勾配場と解曲線
  - 高階微分方程式の位相平面と解曲線
- ベクトルの計算
  - 和、スカラー倍、内積と外積
- 行列と行列式の計算
  - 和、スカラー倍、積
  - 逆行列、行に関する基本変形
  - 行列式の計算

# グラフの平行移動・対称移動

- $y = f(x)$ のグラフの平行移動 $y = f(x-p)+q$
  - Home 画面で、$f(x)$ の式を定義する。
  - ♦ F1 で $y1 = f(x)$、$y2 = f(x-p)$、$y3 = f(x)+q$、$y4 = f(x-p)+q$ として、♦ F3 でグラフ描画。
  - $f(x)$ を自分で変えさせて、グラフの変化を観察させる。
  - ♦ F5 によりテーブル表示させて数値の変化も観察させる。
  - どのような場合にグラフがどう変化するかを気づかせる。
- $y = f(x)$ のグラフの対称移動
  - ♦ F1 で $y1 = f(x)$, $y2 = -f(x)$, $y3 = f(-x)$ として、♦ F3 によるグラフを観察させる。
  - どのような場合にグラフがどう変化するかを気づかせる。
- 最初に教員が説明した後で確認をさせるか、または、最初に学生に気づかせておいて、後から教員が解説する。

# 単位円と三角関数

- 単位上の点 $(x, y)$ の座標の変化が余弦関数、正弦関数であることを簡単に理解させることができる。
- MODE で「Graph」を媒介変数 (parametric) にする。
- 3 つの関数を定義する。
  - $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sin(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1.5 \\ y = \sin(t) \end{cases}$
- ♦ F3 により、単位円上の回転、サイン関数のグラフ、そして $y$ 軸方向の振動が同時に表示される。

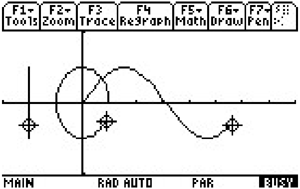



Figure: 単位円上の回転と正弦関数のグラフ

# 媒介変数表示のグラフ

- 媒介変数表示による関数のグラフでは、グラフ上を動く点の動き方を把握することが重要である。
- 通常は、$t$ を消去した $x, y$ だけの式からグラフ描画。
- そのグラフ上の点の動き方の違いを簡単に見ることができる。
- 画面の範囲を $-4 \leqq x \leqq 4,\ -2 \leqq y \leqq 2$、$t$ の範囲を $0 \leqq t \leqq 2\pi$ とするとき、次のような動きをするには、関数をどのように定めれば良いか。
  - 単位円上を、点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに 2 回転する。
  - 単位円上を、点 $(1, 0)$ を出発して時計回りに 1 回転する。
  - 直線 $y = x$ 上を $(0, 0) \to (1, 1) \to (0, 0) \to (-1, -1) \to (0, 0)$
  - 放物線 $y = 1 - x^2$ 上を $(1, 0) \to (1, 1) \to (-1, 0) \to (0, 1) \to (1, 0)$
  - 点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに 2 回転しながら $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

# 媒介変数表示のグラフ (2)

- 媒介変数表示された関数のグラフをイメージするには、$x$ 軸方向の動きと、$y$ 軸方向の動きをイメージできることが必要。
- その理解を得ると、次のようなグラフアートを作成できる。

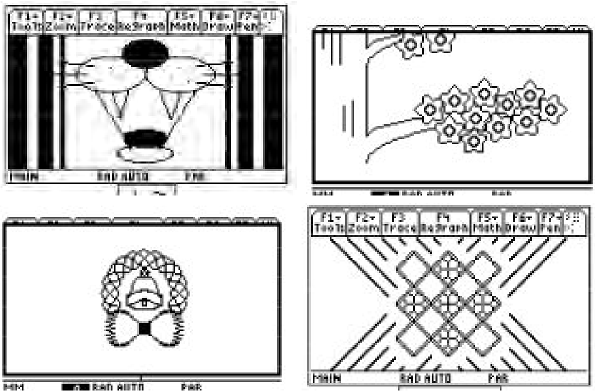



Figure: 学生の作成したグラフアート

# 極座標によるグラフ

- 極座標による曲線 $r = f(\theta)$ は、$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$ により媒介変数表示にすることができるので、
  $x = f(t)\cos(t), y = f(t)\sin(t)$ として描画させる。
- たとえば、$r = \sin(2\theta)$ は、
  $x = \sin(2t)\cos(t),\ \ y = \sin(2t)\sin(t)$ により描画される。
  $x = t,\ \ y = \sin(2t)$ のグラフと同時描画させるとよい。
- $r < 0$ のとき、点 $(r, \theta)$ は点 $(|r|, \theta + \pi)$ を表す。

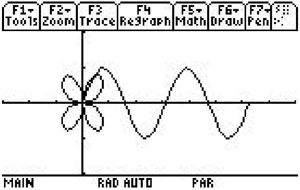
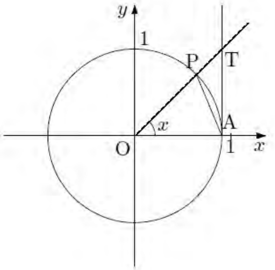



Figure: $r = \sin(2\theta)$ の極座標と直交座標のグラフ

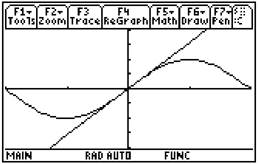
# $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ の説明

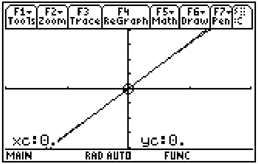
- 教科書の説明は
  - 面積の関係から
    △POA < 扇形 OAP < △TOA
  - $\sin x < x < \tan x$
  - $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$
  - $x < 0$ のときも同じ不等式が成立。
  - $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ より $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

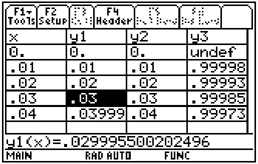



- グラフ電卓を利用すると
  - $y = x$, $y = \sin x$ のグラフを描画する。
  - 原点付近を何度か拡大する。
  - 1 直線に重なったグラフが描画される。
  - そのことから、比が 1 に近づくことは明らか。

# $y = x$, $y = \sin x$ のグラフ




- 最初に普通に説明して、確認のためにグラフ拡大してみせる。
- グラフを拡大していくとどうなるかを学生に問いかけて、$\sin x/x$ の極限値を学生に考えさせる。
- 単なるグラフだけではなく、 ♦ F5 の機能を利用して数値上の確認をさせることもできる。
- 学生は、式計算だけで納得できる者、グラフにより理解できる者、数値の変化で納得する者があり、その理解の仕方は多様である。グラフ電卓は、式計算・グラフ描画・テーブル表示が簡単に切り替えられる。

# グラフ電卓使用後の学生の感想

- 主な関数の性質を一通り説明し終えた後で、関数の総復習の問題を解く中でグラフ電卓を使用させた。
- 使用後の学生の感想

| 質 問 項 目 | YES | 中　間 | NO |
|---|---|---|---|
| 授業はおもしろい | 79.4 | 18.8 | 1.9 |
| 家や寮で勉強するときも使った | 53.1 | 20.0 | 26.9 |
| 新しく発見したことがある | 37.5 | 43.1 | 19.4 |
| 数学の理解がさらに深められる | 57.5 | 40.0 | 2.5 |
| 数学が前よりおもしろくなった | 43.8 | 50.6 | 5.6 |
| 数学が前より分かるようになった | 51.3 | 45.6 | 3.1 |
| 難しい内容も簡単に見えてくる | 51.9 | 32.5 | 15.6 |
| 自分で考えなくなる | 25.0 | 46.3 | 28.8 |

有効回答は 160 名．(%)

# 成績と使用頻度との関係

- 成績上位者ほどグラフ電卓の使用法に習熟できている。

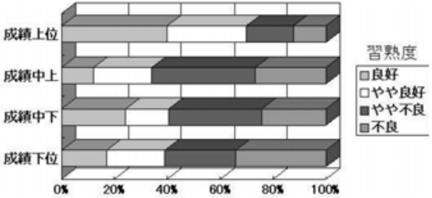



Figure: 成績とグラフ電卓の習熟度

- しかし、使用頻度が高いのは成績下位者の方である。

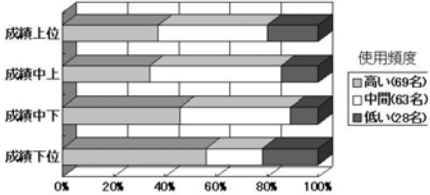



Figure: 成績とグラフ電卓の使用頻度

# 成績と使用頻度との関係 (2)

- 成績下位者ほど、数学上の疑問解決に役立っている。

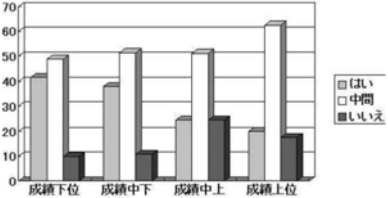



Figure: 成績別：数学上の疑問の解決に役立った

- 使用頻度が高いほど、前より分かるようになった。

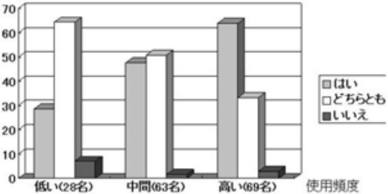



Figure: 使用頻度別：前よりも分かるようになった

# 成績下位者の使用後の感想

- 成績を平均 50 点、標準偏差 10 点の偏差値に変換したとき、50 点未満の学生の感想。括弧内の数は偏差値。
  - 数ナビはグラフの変化や交点が分かるし，想像しにくかったり分かりにくいグラフもすぐ分かる。使い方が分からないところもあるけど，私にしたら結構「いいもの」です (32)
  - 数ナビを使ったことにより，グラフの移動がとてもよく分かった (37)
  - 今まであいまいだったグラフが，数ナビのおかげで減ったと思う (38)
  - 数ナビは座標や交点などを求めるのが便利で，数ナビを使った授業は，理解や復習に役立ちました (39)
  - 数ナビがあると，自分で答え合わせができるので便利 (40)
  - 数ナビを使って，分からないところが分かるようになってきた (43)
  - 数ナビを使うことで，関数の理解度が高まったと思う (45)

# グラフ電卓利用と PC 利用

- グラフ電卓のキー操作は母国語では書かれていない。
- グラフ電卓の習熟率と、コンピューター操作の習熟率の間には強い関連性がみられ、 コンピューター操作に不慣れな学生は、グラフ電卓の操作にも戸惑う傾向がある。

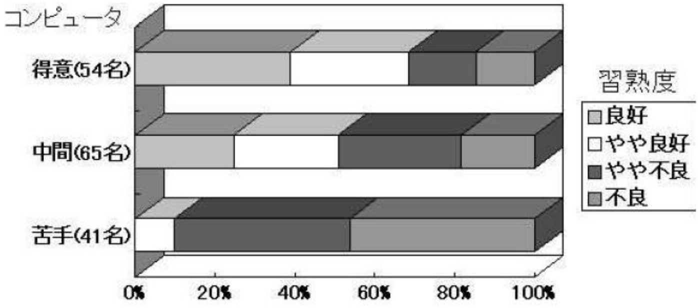



Figure: コンピューターの得意・不得意とグラフ電卓の習熟度

# コンピュータ利用が不得意でも …

- コンピューター操作が不得意な学生でも、「グラフ電卓を利用して、数学が前よりも分かるようになった」ことを半数近くは肯定している。
- 単純な機能だけでも、学生の関数のグラフ理解には十分に寄与していると思われる。

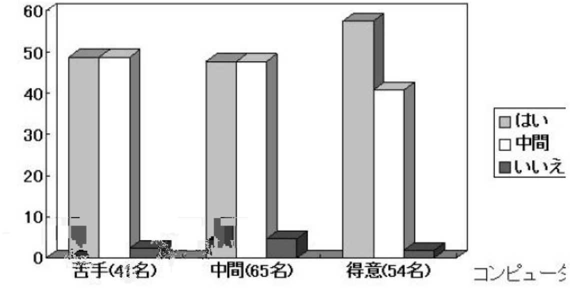



Figure: コンピューターの得意・不得意別：前より分かるようになった

# 考えなくなることへの懸念

- グラフ電卓を利用すると、「学生が考えなくなるか？」
- 答えを丸写ししていれば、確かに思考力は低下する。
- そのような使い方をするとどのような試験結果が待っているかは、学生は十分に認識できる。
- この懸念を感じるのは、使用頻度の低い者が多い。

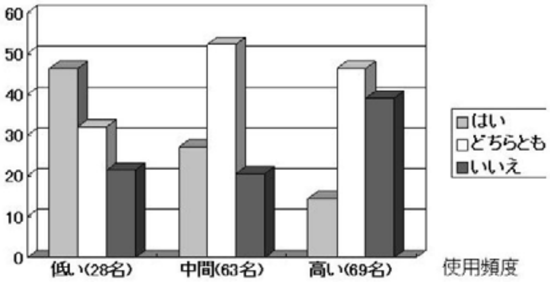



Figure: グラフ電卓の使用頻度別：自分で考えなくなる

# 微分公式 $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

- 教員の説明は、増分の記号 $\Delta$ や極限を用いた説明となる。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

- 学生がどこまで納得できているかは不明であるが、以後は、公式にもとづいた計算練習をさせることになる。
- 数式処理機能で、学生にこの公式を気づかせることができる。
- ただし、$x^n, \sqrt{x}, \dfrac{1}{x}$ の導関数については学んでいるが合成関数の微分法はまだ学んでいないものとする。

# 公式 $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (2)

- 次のような手順による。
  - 具体的な関数を $y = f(u), u = g(x)$ に分解させる．
    $y = (3x-5)^4$ は、$f(u) = u^4, g(x) = 3x-5$ に分解できる。
  - $y = f(u), u = g(x)$ の導関数を自分で計算させる．
  - $y = f(g(x))$ の導関数をグラフ電卓で求めさせる．
  - 以上のことを幾つかの関数で行わせた上で
    $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{du}, \frac{du}{dx}$ の間にどのような関係があるかを考えさせる．
- 約半数の学生が、$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ に気づいた。
- 3 つに分解する場合も同様であることに気づいた学生は、自分の発見にほくそ笑んでいた。

# 微分積分の基本定理

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

- 微分積分の基本定理：$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$
- 簡単な関数で、このことを学生に気づかせることができる。

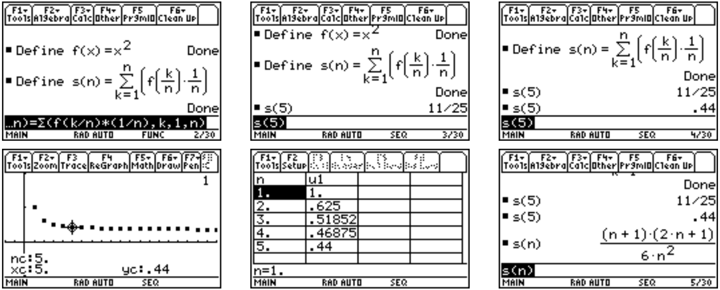



Figure: $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ の定義に基づく計算

# 微分積分の基本定理 (2)

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(n)$ を求めて、$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ の値が求められる。
- 区間 $[0,1]$ を区間 $[0,x]$ に変えて同様のことを行う。
  - $\displaystyle s(n,x)=\sum_{k=1}^{n} f\left(k\cdot\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n},\quad g(x)=\lim_{n\to\infty} s(n,x)$
  - いろいろな $f(x)$ に対して $g(x)$ を求めさせる。
  - $g(x)$ と $f(x)$ との間にどのような関係があるかを考えさせる.
  - $f(x)=x^n$ のとき $\displaystyle g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ に，かなりの学生が気づいた.

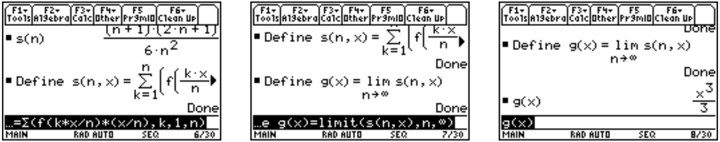



Figure: $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt = x^2$ であることへの気づき

# 数学に関する自由研究

- 数学で「この場合はどうなる？」という疑問を持ったとき、複雑な計算が必要になる場合は、その疑問はそのまま残るが数式処理機能を利用すると結果を表示させることができる。
- それにより、「では、この場合はどうなるのか？」と、次々に思考を展開していくことができる。
- このような形で数式処理機能を利用すると、
    - 一般的な問題を与えて数学的性質を考察させることができ、
    - 試行錯誤で何らかの数学性質を発見したときの喜びは、通常の問題を解けたときの喜びとは比較にならないものがある。
    - 数式処理機能を利用することで、その喜びを成績下位の学生にも味合わせることができる。
- 多様な解答の仕方がある問題は「自由研究」と呼ばれ、おもに社会や理科などの調査や実験などの場合に行われるが、数式処理機能を利用させることで、数学でも自由研究を課すことが可能である。

# $(x+1)^n$ の展開式と指数 $n$ との関係

- $n$ を自然数とする。$(x+1)^n$ の展開式について、$n$ と展開式の係数との間の関連性について考察せよ。

$$
\begin{aligned}
(x+1)^1 &= x+1\\
(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\
(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\
(x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1\\
(x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\\
(x+1)^6 &= x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1\\
(x+1)^7 &= x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1\\
(x+1)^8 &= x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1\\
(x+1)^9 &= x^9+9x^8+36x^7+84x^6+126x^5+126x^4+84x^3+36x^2+9x+1
\end{aligned}
$$

# 二項係数の書き出し方

- ピラミッド状

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

- 下三角状

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

# 展開式に関する学生の気づき

- 多数の展開式を書き出し、係数と指数 $n$ との間の関連性について考察して、次のようなことが指摘されてきた。
  - 左から 3 番目の項 $x^{n-2}$ の係数は $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ である。
  - $x^m$ を左半分の項とすると，その係数は $x^{m+1}$ の係数を $\dfrac{1}{n-m}$ 倍して $m+1$ をかけたものである。
  - 左から数えて $k$ 番目の項の係数と指数をかけて $k$ で割ると，次の項の係数になる。たとえば，$(x+1)^4$ の展開式の 2 番目の項 $4x^3$ では $4 \times 3 \div 2 = 6$ が 3 番目の項の係数である。
  - $(x+1)^n$ の係数の和は $2^n$ である。
  - 斜めに係数を加えると，右下の係数がその和になる。たとえば，$1+3+6=10$,
    $1+4+10=15$ であり，10, 15 はいずれも右下にある。
  - $n=4$ までは，係数を繋げてできる数は $11^n$ である。たとえば，$11^2=121$, $11^3=1331$ である。

# $x^n - 1$ の因数分解と指数 $n$ との関係

- $x^n - 1$ の因数分解の式がどのようになるかを調べて、分解された式と指数 $n$ の間の関係について考察せよ。

$$
\begin{aligned}
x^1 - 1 &= x - 1\\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1)\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)\\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\\
x^7 - 1 &= (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^8 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\\
x^9 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\\
x^{10} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\\
x^{11} - 1 &= (x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^{12} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}
$$

# 因数分解の式に関する学生の気づき

- 多数の因数分解の式を書き出して、その式と指数 $n$ との間の関連性について考察して、次のようなことが指摘されてきた。
  - $n$ が 3 の倍数のときは，$x^2+x+1$ が必ず含まれる。
  - $x^{3n}-1=(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)$ である。
  - $n$ が 4 の倍数のときは，$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ が含まれる。
  - 指数が $nm$ の形の式は，$x^m-1$ を因数にもつ。
  - $n$ が素数のときは，$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ である。
  - 指数が $2^n$ のときは，
    $x^{2^n}-1=(x-1)(x+1)\underline{(x^2+1)(x^4+1)\cdots}$ となり，下線部は $n-1$ 個の積である。
  - 指数が $3^n$ のときは，
    $x^{3^n}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)\cdots$ の形である。
  - $n$ の約数の数と，因数分解された式の因数の数とは一致する。

# 三平方の定理

- 三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ が成り立つような自然数 $a,b,c$ について、$3,4,5$ や $5,12,13$ のような数がありますが、他にどのような数があるか。また、3 つの数のうち 2 つの数が連続するようなものは、他にあるか。
- この課題は、グラフ電卓がなくても考察可能である。
- 学生からは、次のようなことが指摘されてきた。
  - $A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす $x$ について，$x$ の 1 の位の数は 0,2,4 のときに限られる。
  - $a^2+b^2=c^2$ において $b,c$ が連続する場合は，

$$3^2+(4\times 1)^2=\{(4\times 1)+1\}^2 \qquad (4=3+1)$$

$$5^2+(6\times 2)^2=\{(6\times 2)+1\}^2 \qquad (6=5+1)$$

$$7^2+(8\times 3)^2=\{(8\times 3)+1\}^2 \qquad (8=7+1)$$

つまり，$a$ は必ず奇数 $(a\geqq 3)$ で，$b$ は $a$ を 2 で何回割れたかという回数を $a+1$ に掛けた数である。

# 三平方の定理に関する学生の気づき

- $b, c$ が連続するとき，次のことが成立する。
  $$(2n+1)^2 + (4(n+(n-1)+\cdots+1))^2 = (4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2。$$
- $b, c$ が連続するとき，$a, b, c$ は，60 の倍数になっている。
- $b, c$ が連続する $a, b, c$ の和 $a+b+c$ の第 2 階差は 8 になる。
- $a, b$ が連続する場合として

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$20^2 + 21^2 = 29^2$$
$$119^2 + 120^2 = 169^2$$

$n$ 段目の式を $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$ とすると，

$$a_n = 6 \times a_{n-1} - (a_{n-2} - 2), \quad c_n = 6 \times c_{n-1} - c_{n-2}$$

という関係がある。

# 3 次関数の性質に関する考察

- 1 年生の夏休みに、計算問題の他に次の課題を与えた。
- $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは、$a, b, c$ がどのようなときに、どのようになるかを考察して結果をまとめて提出せよ。
- 出題者側の意図は、単純な理解を得て欲しいことにある。
  - 3 次関数のグラフの特徴を捉えて欲しい。
  - $x = a, b, c$ が共有点になること。
  - $a = b$ 等の場合に $x$ 軸に接することを把握して欲しい。
- 多数の学生は、教員側の想定内の内容を指摘してきた。
  - グラフと $x$ 軸との交点は $x = a, b, c$ のときである。
  - $a, b, c$ のどれか 2 つが等しいと、そこで $x$ 軸に接する。
  - $a, b, c$ の符号を全て逆にすると原点に関して対称になる。
  - $a = b = c$ 以外は、必ず、山と谷ができる。

# 学生 A (1 年生) の考察

- 学生 A は、いろいろなグラフを鑑賞した上で、次のことを見抜く。
  - グラフのパターンには、$a = b, b = c, a = b = c$、全て異なるときの 4 つのパターンしかない。
  - $a = b = c$ のときは、$y = x^3$ を $x$ 軸方向に平行移動したもの。
- さらに、$b - a = c - b$ の場合に関心を持った。
  - $b - a$ の値を増やしながら、極大値の変化を調べた。
  - 3 次関数であり、$b - a = 1$ のときは $0.3849$ なので、他の場合は $0.3849 \times (b - a)^3$ ではないか？
  - 表を作ってみて、それを確認する。

| 垣間 | 極大値 |
|---|---|
| 1 | 0.3849 |
| 2 | 3.0792 |
| 3 | 10.3923 |
| 4 | 24.6336 |
| 5 | 48.1125 |

# 学生 A の考察 (2)

- $y$ 座標が求まる以上は、$x$ 座標も求まるはずである。
  - 問題を簡易化して $y=(x-j)x(x+j)$ で考察する。
  - $j$ と極大値の $x$ 座標の表を作る。
  - $x$ 座標は $j$ に比例している。

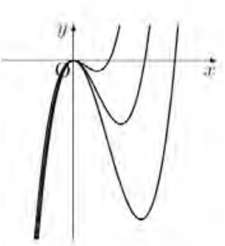
| $j$ | 頂点の $x$ 座標 |
|---|---|
| 1 | $-0.57735$ |
| 2 | $-1.1547$ |
| 3 | $-1.73205$ |

- 以上より、次の結論を得る。
  - $b-a=c-b$ となる式において
    山の頂点の座標は $(b-0.57735(b-a), 0.3849(b-a)^3)$,
    谷の最下点の座標は $(b+0.57735(b-a), -0.3849(b-a)^3)$
- この結論は正しい！
  - 平行移動すれば $y=x(x^2-a^2)=x^3-a^2x,\ (a>0)$
  - $y'=3x^2-a^2$ より、極値をとるのは $x=\pm a/\sqrt{3}$ のとき。
  - このときの $y$ 座標は $y=\mp(2\sqrt{3}/9)a^3$。
  - 小数に直すと，$1/\sqrt{3}=0.57735,\ 2\sqrt{3}/9=0.3849$ である。

# 学生 A の考察 (3)

- 次に、$a = b$ として $y = (x - a)^2(x - c),\ (a < b)$ を考察する。
  - 問題を簡易化して、$y = x^2(x - c)\ (c > 0)$ を考える。
  - 頂点の $y$ 座標と $c$ を対応させた表を作成。
  - 前の考察と同様に考えて、
    $x$ 座標は $0.66667c$、$y$ 座標は $-0.148148c^3$ を見抜く。

| $c$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.666667 | $-0.148148$ |
| 2 | 1.33333 | $-1.18519$ |
| 3 | 2 | $-4$ |
| 4 | 2.66667 | $-9.48148$ |
| 5 | 3.33333 | $-18.5185$ |
| | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
| | $0.666667c$ | $-0.148148c^3$ |



# 学生 A の考察 (4)

- 以上より、次の結論を得る。
  - 谷の最低値の座標は $(a + 0.66667(b-a), -0.148148(b-a)^3)$
- 同様にして、$y = (x-a)(x-b)^2$, $(a < b)$ となる式では、
  - 山の最大値の座標は $(a - 0.666667(b-a), 0.148148(b-a)^3)$。
- この結論も正しい！
  - $y = x^2(x-a) = x^3 - ax^2$ では，$y' = 3x^2 - 2ax$
  - 極値を取るのは $x = 0, 2a/3$ のとき。
  - そのときの $y$ 座標は，$y = 0, -4a^3/27$
  - 小数に直すと $2/3 = 0.666667$, $4/27 = 0.148148$ である。
- 学生 A の思考過程を見ると，
  - 考えやすいように問題を簡易化
  - 状況をグラフ電卓で 調べ，類推し，正しいことを確認。
  - 確認後は，別な問題設定をして同様のことを繰り返す。
  - まさに数学的思考そのものが行われている。

# 学生 K (1 年生) の考察

- 学生 K は、放物線は $y=f(x)=ax^2$ のグラフを平行移動して $y=f(x-p)+q$ の形に表ることから，3 次関数についても同じような変形ができないだろうかを考える。
- 2 次関数の場合と同様の計算を行うことで、次の式を導く。

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3 +a\left\{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^2}\right)\right\}$$

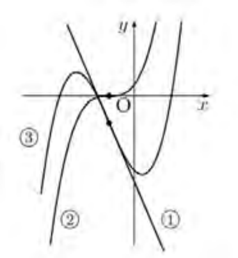
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の場合にあてはめて次を導く。

$$(x-a)(x-b)(x-c)=\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^3 +\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x +\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

# 学生 K の考察 (2)

- $y$ 軸方向の平行移動部分に $x$ が含まれている。
- そこで、次の 3 つの関数のグラフを考察する。

$$\begin{cases} y = \dfrac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+c}{3} \\ \quad +\dfrac{(a+b+c)^3}{27}-abc \quad ① \\ y = \left(x-\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad ② \\ y=(x-a)(x-b)(x-c) \quad ③ \end{cases}$$




- 次のことに気づく。
  - ①③のグラフの共有点の $x$ 座標は，②のグラフの $x$ 軸との共有点の $x$ 座標と一致する。
  - ①式に $x$ が含まれているために，それを②式に加えるとグラフ自体が変わってしまう。
  - 3 次関数のグラフは，①の 1 次式の傾きが大きく関わっており、$x$ の 1 次の項は $f(x)$ の方に含めて考えるべきである。

# 学生 K の結論

- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは,
$$y=x^3-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}x$$
のグラフを, $x$ 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$, $y$ 軸方向には
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9}-abc$$
だけ平行移動したものである。
- 学生 K は、$y=x^3+\alpha x$ の極値について調べることにより、$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の極値を与える座標についても、文字式で正確に記述している。
- 最後の感想で、「自由研究はやっているうちどんどん面白くなってきて、メチャクチャ頑張りました。」と書いている。

# 「自由研究」に対する学生の感想

- 数学は奥が深いなあと思いました。
- 数学とはおもしろいものだなあと思いました。
- 問題を解くのではなく，自分で発見するところが苦労でもあり楽しかった。
- 考えても疑問がまた出てきて，またそれについて考えるのが楽しかった。
- 解説プリントでは，他の人の考え方がのっていて，新しい視点をみつけれた。
- 数学は，調べてみると沢山のことが発見できるんだと思った。
- 普段あまりしない「良く見て考える」といったことをする機会になったと思う。
- ただの式だけだとやる気がしない課題でも，数ナビのグラフ機能を使うと分かりやすいし，楽しいのでやりがいがあった。
- まったくできなかったので，とてもつらかった。

# 学生の感想（成績別）

- 学生の感想を、4 つに区分した。
  - (1) 楽しかった、面白かった、良かった
  - (2) 勉強になった、理解が深まった
  - (3) 大変だった・面倒だったが、面白かった・勉強になった
  - (4) 分からなかった、難しかった
  - (5) その他

| 成績 | 自由研究に関する感想 (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 上位 | 17 | 6 | 9 | 5 | 3 | 40 |
| 中上 | 12 | 7 | 9 | 10 | 1 | 39 |
| 中下 | 11 | 6 | 5 | 5 | 4 | 31 |
| 下位 | 11 | 3 | 10 | 7 | 1 | 32 |
| 計 | 51 | 22 | 33 | 27 | 9 | 142 |
| % | 35.9 | 15.5 | 23.2 | 19.0 | 6.3 | 100 |

# 学生の感想（成績別)

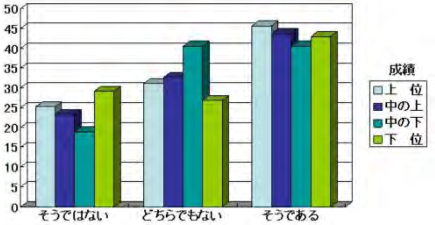



Figure: 成績別：自由研究は面白かった

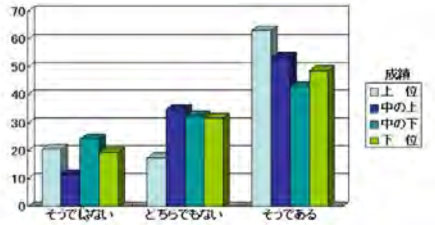



Figure: 成績別：自由研究で新しい発見があった

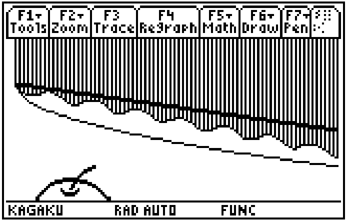
# 数学における「自由研究」の意義

- 通常の問題演習は，教師から与えられた問題を「解く」だけ。
- 自由研究では，
  - 提示された課題から関心を持ったことを調べて，
  - 自分の思考過程をレポートにまとめる。
  - グラフ電卓に表示されるグラフから何を読み取り，それをどのように考えるかが問われる。
  - そこでは様々なまとめ方がなされており、正解はない。
- 学生の感想を見ると,「次々に自分で問題を設定して考える」「自分で何かを発見する」部分に，おもしろさ，達成感，やりがいを感じたようである。
- グラフ電卓の利用で，
  - 個々の学生の能力に応じて何らかの発見があった。
  - 教師側が「あたり前」と感じる部分でも,「あたり前」ではない学生にとっては大きな発見である。
  - 成績の上下に関わらず数学上の発見体験させることができた。

# グラフアートの作成

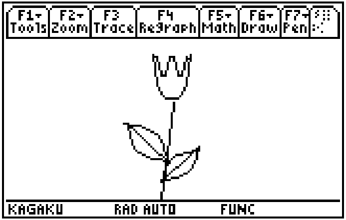
- グラフ電卓を利用すると、関数のグラフをつなぎ合わせて絵(アート)を作成させることができる。
- それを作成するには、次のことを自分で決める必要がある。
  - どんな「絵」を描くか。
  - 絵の線はどのような関数のグラフで実現できるか。
  - そのグラフの、どの範囲を利用すべきか。
- 境界線を実現できる関数をイメージできないときは
  - いろいろな関数のグラフを表示させて、
  - 係数を変えるとグラフがどのように変わるかを見ることで
  - 関数の式とグラフの形との対応関係が自然に把握される。
- 作成するには、ある程度の時間が必要なので、グラフ電卓を自由に使える環境を用意する必要がある。
- 関数のグラフの総復習の場として、非常に有意義である。

# 学生の作品例-1 ($y = f(x)$、1 年)




$$y1 = -\sqrt{x+7.5}+1.7$$
$$y2 = -1/7 \cdot x + 0.7 \mid x > -7.7$$
$$y3 = \frac{-x}{5} + 1/5 \cdot \sin(3 \cdot x) \mid x > -7.6$$
$$y4 = \sqrt{2^2-(x+4.8)^2} - 4.8$$
$$y5 = (x+4.9)^2 - 3.5 \mid -5.5 < x < -4.4$$
$$y6 = \sqrt{x+4.9} - 3.3 \mid x < -3.5$$

# 学生の作品例-2 ($y = f(x)$、1 年)




(1) $y = 2x^4 + 1.5$ $\quad -1.2 < x < 1.2$

(2) $y = 10x$ $\quad x < 0.3$

(3) $y = \cos(2\pi x) + 4$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2.7}$

(4) $y = \dfrac{1}{x}$ $\quad -3 < x < -0.2$

(5) $y = \dfrac{1}{x+3} - 3.5$ $\quad -2.8 < x < 0.1$

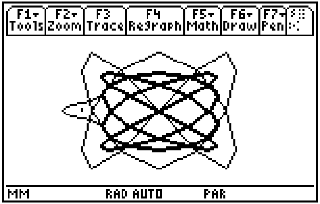
(6) $y = -\dfrac{3.5}{3}x - 3.5$ $\quad -2.8 < x < 0$

(7) $y = \dfrac{1}{x+1} - 2$ $\quad -0.8 < x < 1.8$

(8) $y = -\dfrac{1}{x-2} - 5$ $\quad -0.5 < x < 1.8$

(9) $y = \dfrac{3.5}{3}x - 4$ $\quad -0.5 < x < 1.8$

# 学生の作品例-3 (媒介変数: 2 年)




(1) $\begin{cases} x = 4\sin(4t) \\ y = 3\sin(6t) \end{cases}$

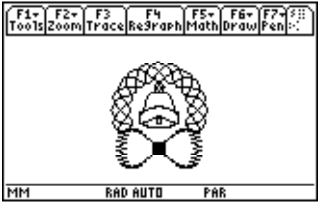
(2) $\begin{cases} x = -\cos(4t) - 4 \\ y = t \,|\, t < 4/5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 3\sin(4t) \\ y = 2\sin(3t) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = -\cos(4t) - 4 \\ y = -t \,|\, t < 4/5 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1/7 \end{cases}$

# 学生の作品例-4 (媒介変数: 2 年)




全部で、14 組の媒介変数表示の関数が利用されている。

上の柄の部分は 3 組が使用され、1 組は次の式である。

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\cdot\cos(t) + 2\cos(t) \\ y = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\cdot\sin(t) + 2\sin(t) \end{cases}$$

リボンの右側は次の関数である。

$$\begin{cases} x = 2\sin(t/2) + \dfrac{1}{4}\sin(23.5t) \\ y = \sin(t) - 2 \end{cases}$$

# グラフアートの意義

- 通常の問題をやるだけでは、このような作品は作れない。
- 関数の式と実際の点の動きとの対応関係を把握できるようになることが重要であり、グラフ電卓で多数のグラフを描画させていくうちにそのような理解が得られていく。
- 三角関数までを終えた 12 月中旬に電卓を貸与して、3 時間の説明をしただけで、グラフアートを作成させた。
    - 1 時間目：基本の使い方。関数定義、グラフ描画のさせ方。
    - 2 時間目は、グラフの拡大・縮小。交点や最大・最小の求め方。
    - 3 時間目は、範囲やグラフの描画スタイルの指定方法。
- 学生は、自分のイメージ通りの絵を作成するには、次のことを試行錯誤的に行う必要がある。
    - どの関数のグラフを使用すべきか。
    - 必要な箇所にそのグラフが表示されるようにするには、どのような平行移動・対称移動をすべきか、あるいは係数をどのように定めるべきか。

# 作成後の学生の感想

- 忘れかけていた指数・対数・無理関数を使ってできたので，思い出せたし，関数の楽しみが分った。
- 時間がかかったけど，思ったようなグラフが描けるとなかなかうれしいものがある。
- 描いているときはめんどうくさかったけど，勉強にもなったし，楽しかったので良かった。
- 関数を使ってグラフ・アートをすることによって，今まで習ったいろいろな関数を振り返ることができて良かった。
- 超めんどくさいと思っていたけど，自分が知っている範囲の簡単な関数でもできたのでうれしかった。作成しているときが，一番勉強しているという実感がわいた。
- 根気のいる作業だと思った。でも，完成した時には達成感があり，これを自分で作ったんだなあと思うと，うれしくなった。

# グラフ電卓を利用して分かったこと

- 貸与後の感想では、90%以上が、グラフ電卓は「グラフを理解する上で役に立つ」と回答している。
- どのような理解に役だったかを聞くと
  - $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $2\sin(x)$ など変化させてグラフにすると，グラフの違いが分かってためになるし理解も深まった。
  - 三角関数の合成が良く分った。
  - $y = |f(x)|$ のグラフは，$y < 0$ の部分を $x$ 軸に関して対称移動したものであること。
  - $f(2x)$ と $2f(x)$ の違いや，$f(-x)$ と $-f(x)$ の違いが分からなかったけど理解できるようになった。
  - いろいろな関数のグラフが，こんなグラフになるんだ，と何度もやっているうちに分かるようになった。
  - 数種類のグラフの特徴を見分けるのに，細かい数値を出してくれてとても分かりやすかった。

# 数学教育でのグラフ電卓利用の意義

- 関数のグラフに対する理解が深められ、
  - どのような式がどのようなグラフになるのか，
  - 各係数の意味を理解することも容易
  - 座標データを通して理解することもできる
  - 各自の関心の持ち方により，いろいろな角度からの理解が可能である。
- 自分で問題を解決できるようになる。
  - 分からない箇所を質問に来る学生は一部。
  - そのまま放置してしまう学生が多い。
  - 自分の分からない部分を，グラフ電卓で試行錯誤しながら追及することができる。
- 数学の授業が分かる楽しさや，数学的なことについて何かに気付く機会が増える。

# 数学と実世界との関わり

- 工学では、
  - いろいろな工学現象の記述言語として数学が利用されている。
  - 数学の理論に基づく、計算部分が必要とされることが多い。
- 数学では、
  - 応用より、数学的な真理を解明することへの関心が強い、
  - 数学教員は他分野での活用のされ方にはあまり関心がない場合が多い。
- 高専の数学は、
  - 工学で利用する必要があるために教授されている。
  - 数学を教えるにあたっても、工学でどのような形で利用されるかについて、ある程度の認識は持っている必要がある。
- 高専の学生は、
  - 低学年では、数学がどのように役立つのかへの認識は少ない。
  - 高学年になって工学で数学が使われても、使用される文字の違いにより異なる内容と捉えられる場合がある。

# 実世界を解析できる数学の威力

- 数学は、実世界の現象を式で記述することができる。
- 数学を教授する上では、数学自体の教授にとどまらず、広範囲に応用できる数学の威力も伝えたい。
- 理想としては、
    - 関数のグラフを、実際の現象と対照させながら理解させる。
    - 具体的な応用例を、その都度紹介しながら授業を進める。
- 実際には、
    - 数学教員は、どのような場合にも対応できる数学の普遍性に関心があり、具体的な現象にはあまり関心がない。
    - 具体例を探そうとしても、単純すぎるか、複雑すぎるものが多く、学生に手頃な内容が、なかなか見当たらない。
- そこで、次のことを紹介したい。
    - 高専低学年でも理解可能な、優れた数学教材があること。
    - グラフ電卓＋センサーで、実データを簡単に収集できること。

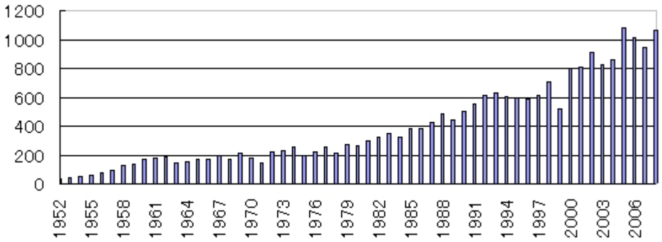
# 実世界の分析例：タンチョウの個体数


- 「タンチョウ」は日本固有の鶴で北海道に生息する。
- 乱獲されて絶滅寸前まで減少したが、保護されて増加。
- 自然界の生物として、個体数がかなり正確に把握されている。
- その個体数変化の解析は、数学的に多様な内容を含む。
- 高専学生に解説すると、「数学が、自然界の現象解析に役立つとは夢にも思わなかった」という感想を持つ者もいる。

# タンチョウの生息地区


北海道の群は繁殖地も越冬もだいたい北海道のなかで
済ませ、一年中北海道にいます。繁殖地と越冬地を移動する
距離も遠くて150kmほどです。
一方大陸に生息する丹頂は、アムール川やその支流の
松花江・ウスリー川流域で繁殖し、長江(揚子江)の河口あたりで
越冬しますので、移動距離は数千kmに及んでいます。
釧路湿原地域
別寒辺牛川地域
十勝川地域
北海道の繁殖地では主に、野付半島付近、風蓮湖付近、
別寒辺牛川流域、霧多布湿原付近、十勝川流域付近、
そして釧路湿原です。
このページは
参考文献「釧路湿原自然ガイド　釧路湿原のタンチョウ」
から引用しました。

# タンチョウの個体数変化




- 1952 年～1960 年：33 羽から 172 羽に増加。
- 1961 年～1975 年：増減を繰り返して、増加しない。
  - 増加により、全国からカメラマンが来てタンチョウに接近。
  - タンチョウは驚いて飛び上がり電線に衝突して死亡。
  - カメラマンの行動規制＋電線の移設等の処置。
- 1976 年～：再び、増加に転じる。

# 1952 年〜1960 年の解析

- タンチョウの成長率 $r$ が一定と考えると、$\Delta y = ry$
  - 以下の分析は、小寺隆幸著「数学で考える環境問題」(第 4 章) による。
  - ある年の個体数 $y$ は、翌年度は $y + ry = (1+r)y$ になる。
  - 同様のことを繰り返すので、$n$ 年後は $(1+r)^n y$ になる。
  - 1952 年が 33 羽、8 年後の 1960 年には 172 羽なので

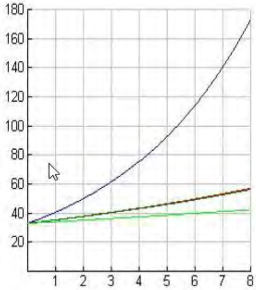
$$(1+r)^8 \cdot 33 = 172 \quad \therefore \quad 1 + r = \sqrt[8]{\frac{172}{33}} \fallingdotseq 1.23$$

  - 1952 年から $n$ 年後の個体数 $y$ は、$y = 33 \times 1.23^n$

# 成長率の低下

- 1976 年以降を 8 年ごとに区切ると、成長率が低下している。

| 時期 | 成長率 |
|---|---|
| 1952～1960 | 23% |
| 1975～1983 | 7.1% |
| 1984～1992 | 6.9% |
| 1993～2001 | 3.2% |




- タンチョウは
  - 1 つがいごとに縄張りを持つ。
  - タンチョウの生息域は限られている。
  - 限界なしに増え続けることはできない。
  - その生息域には、これ以上は増加できない最大の数がある。
  - 最大数に近づくにつれて、成長率を低下させている。

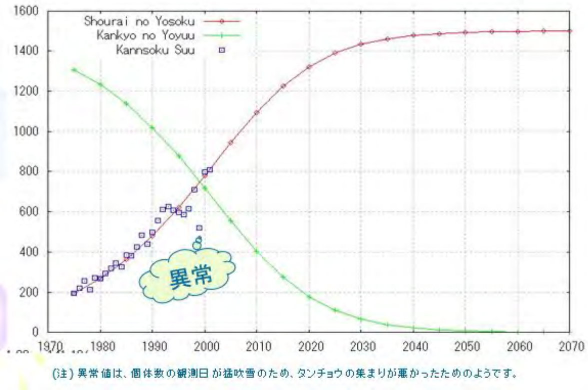
# 成長率に関する新たなモデル

- タンチョウが生息できる最大数を $K$、現在の数を $y$ とする。
- 増加可能数 $K-y$ が減少 $\Rightarrow$ 成長率 $r$ も低下。
- そこで、次のように考える。
  - 当初は、成長率 $r$ が一定として $\Delta y = ry$ で考えた。
  - この成長率 $r$ が、増加可能数 $K-y$ に比例すると考えて $r = s(K-y)$, ($s$ は比例定数) と考える。
  - 新たに、$\Delta y = s(K-y)y$ として考えてみる。
- 生息域の面積とつがいの数から、1 つがいあたりの縄張りの広さが分かる。1992 年の縄張りは約 4 Km$^2$。
- 縄張りを 2 Km$^2$ とした場合の予想個体数は 1100 羽。
- 2003 年時点で 908 羽が観測されているので、縄張りを 1.5Km$^2$ として再計算すると 1500 羽となる。
- とりあえず、$K = 1500$ として考える。

# 差分方程式による予測数の計算

- 1 年ごとの変化は誤差が大きいので、5 年ごとで考える。
- $\Delta y = s(1500 - y)y$ の比例定数 $s$ をどのようにして求めるか。
  - 1975 年では $y = 194$ 羽。5 年後の 1980 年には $\Delta y = 73$ 羽増えている。
  - $\Delta y = s(1500 - y)y$ に代入すると $s = 0.000288$ が得られる。
- $\Delta y = 0.000288(1500 - y)y$ に次々に代入していくことで、1975 年の 194 羽から 5 年ごとの個体数を予測できる。
  - $y = 194$ のとき $\Delta y = 73$ より、1980 年は $194 + 73 = 267$
  - $y = 267$ のとき $\Delta y = 95$ より、1985 年は $267 + 95 = 362$
  - $y = 362$ のとき $\Delta y = 118$ より、1990 年は $362 + 118 = 480$
  - 同様にして、5 年ごとの個体数を予測することができる。
- この計算は、四則計算しかできない電卓でも計算できる。
- 学生に計算させてグラフにプロットさせ、実際の観測数と比較させる。

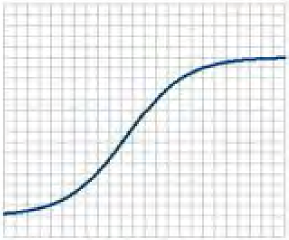
# タンチョウの個体数の予測数と観測数




- 最大数 1500 は大体の感覚で定めたものであり、比例定数 $s$ は 1975 年と 1980 年の値をもとに算出したものである。
- 観測数と、驚くほど一致していることが分かる。
- 誤差が大きい年は、猛吹雪だったようである。

# 微分方程式との関わり

- $\dfrac{dy}{dx} = sy(K-y)$ の一般解は $y = \dfrac{K}{1+Ce^{-Ksx}}$

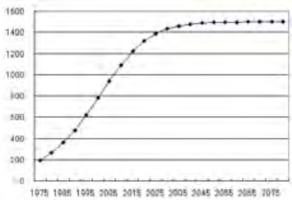


- ロジスティック曲線は、いろいろな場面で現れる。
  - 限られた範囲で増加する、いろいろな生物個体数の変化。
  - 新製品の販売予測数。
  - 新たなソフトウェアのダウンロード数。
- この曲線の変曲点は、増加が鈍りはじめる点と考えられる。

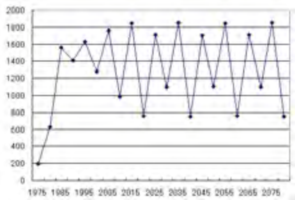
# カオス現象との関わり

- $\Delta y = s(1500 - y)y$ において、$s$ の値を変えるとカオス現象を観察することができる。

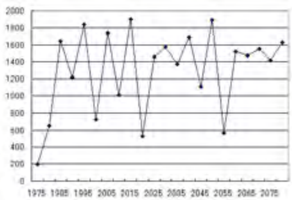
$s = 0.000288$



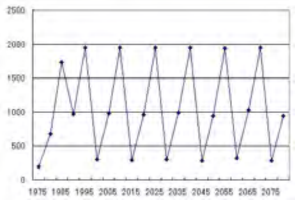

$s = 0.0017$




$s = 0.0018$




$s = 0.0019$



# 学生の感想

- 数学の公式などは，機械的なものなどに主に使われていると思ってたけど，環境や生物個体数の変化や予測数にも使われているとは思わなかった．
- 自然のことも数学で表せることに驚いた．自然界にも規則性があるなんて意外だった．
- たった 2 回分のデータで，およその予測数が計算できて驚いた．それが大体近似していると知り，数学の奥深さが分った．
- 自然現象に数学が役立つとは思っていなかったが，筋道を立てて考える数学的な考え方で立てた予想が，結果と一致していることに驚いた．
- 数学の授業の時,「こんなの覚えたって，将来絶対使わないよね」と良く言っていたけど，その考えが変わりました．

★「タンチョウの個体数変化」の詳細は「こちら」を参照してください。

# 数学で実データを扱うことの意義

- 従来の数学の授業は，形式的な問題解きに終始し，実データを数学的に解析してモデル化する授業は皆無に等しい．
- 実験や実習の多い高専では、実世界と数学との関わりについて認識を深めさせておく必要がある。
- しかし、タンチョウの個体数のような優れたデータは，そう簡単に見つけられるものではない．
- そこで、グラフ電卓の活用が考えられる。グラフ電卓とセンサーを利用すると、実データを簡単に収集でき，グラフ化や統計回帰による関数の当てはめが容易にできる．
- 一見不規則に見える自然界の出来事が，数学の目でみると実は一定の規則性に基づいていることを，目の前の実例で示すことができれば，自然に対する畏敬の念と共に，数学を学ぶことの意義についての認識を新たにさせることができる．

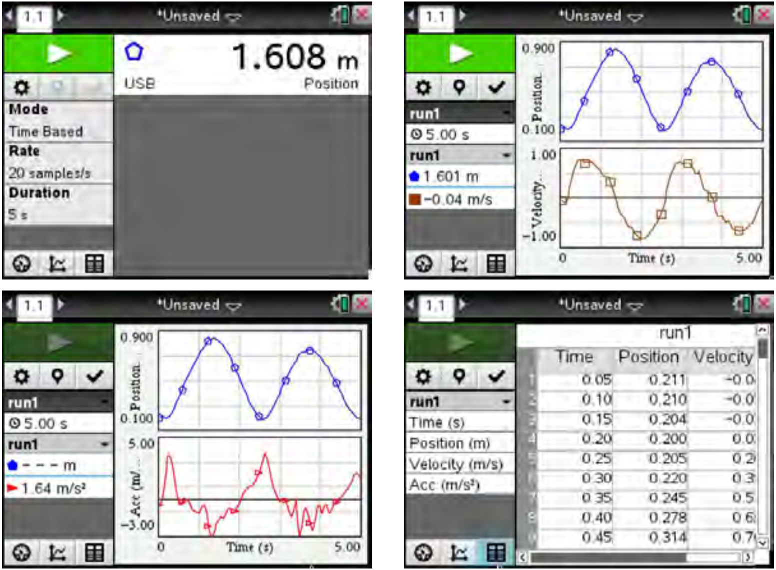
# センサーを利用した実データの収集

- タンチョウの個体数変化のように、多様な数学的内容を含む実データを見つけることは簡単ではない。
- グラフ電卓とセンサーを組み合わせると、実データを容易に収集することができる。
  - TI-89 のデータ収集器は CBL2。
  - TI-Nspire CX CAS のデータ収集器は Lab Cradle。
  - いずれも、接続可能なセンサーは 60 種類以上ある。
- いろいろな物理現象のグラフを、容易に収集できる。
  - 物体の投げ上げと放物運動。
  - 振り子の揺れや、音圧の変化と三角関数。
  - 距離の 2 乗に反比例する、光度と距離の関係。
- 単に数式だけの説明ばかりではなく、いろいろな関数のグラフに関連する実データを見せることで、数学と実世界との関わりについての認識を新たにさせることができる。

# 距離センサー CBR2 の利用

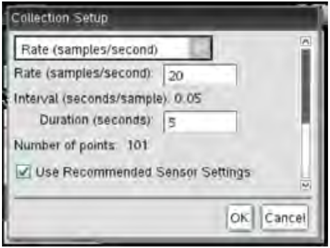
- 15 cm から 6 m までを，超音波で 1 mm 精度で測定する。
- 超音波は、頂角 30° の直円錐状に放射される。
- 反射媒体は堅い大きなものであることが望ましい。.
- 気温による音速の変化が、自動で補正される。
- デフォルトでは，毎秒 20 個のデータを 5 秒間収集する。
  つまり、$1/20 = 0.05$ 秒に 1 回のデータ収集を行う。
- 測定した距離から速度や加速度も計算してグラフ表示する。
- Nspire 附属の PC ソフトウェアがインストールされていれば、
  PC と USB 接続して利用することもできる

# 測定データの表示例

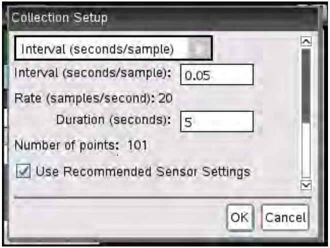

1.1
*Unsaved
Mode
Time Based
Rate
20 samples/s
Duration
5 s
1.608 m
USB
Position
run1
5.00 s
1.601 m
−0.04 m/s
0.900
Position
0.100
1.00
Velocity
−1.00
0
Time (s)
5.00
– – – m
1.64 m/s²
5.00
Acc (m/...
−3.00
Time (s)
Position (m)
Velocity (m/s)
Acc (m/s²)
Time
Position
Velocity
0.05
0.211
0.10
0.210
0.15
0.204
0.20
0.200
0.25
0.205
0.30
0.220
0.35
0.245
0.40
0.278
0.45
0.314

# データ収集のタイミングの設定

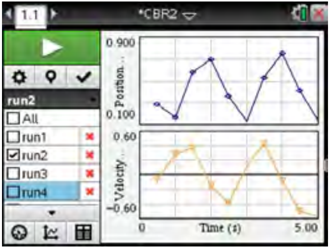
1 秒あたりのデータ数



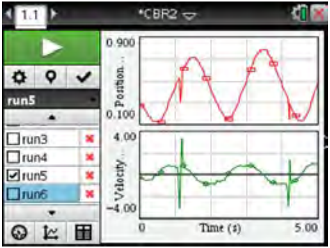

1 データあたりの収集時間




毎秒 2 個の収集

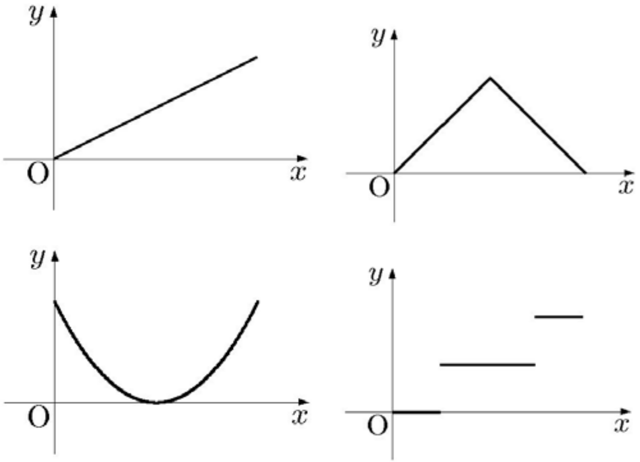



毎秒 40 個の収集



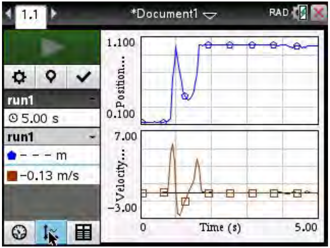
# 動き方の違いによるグラフの差異

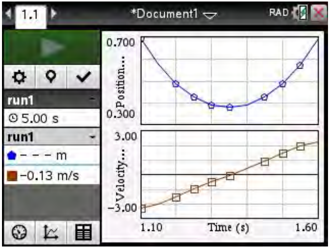
$x$ 軸は時間、$y$ 軸は距離センサーからの距離としたとき、次のようなグラフが表示されるようにするには、どのような動き方をすればよいか？



# ボールの跳ね返りと放物運動

- 物体を放り投げたときのグラフが 2 次関数で表されることを、簡単に確認することができる。

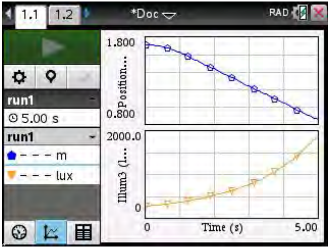


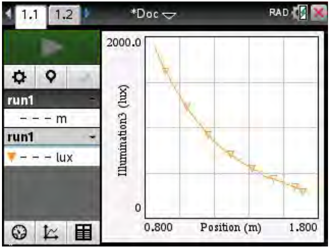




- 距離データを 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で曲線回帰すると，
$$a = 4.98834, \quad b = -13.4768, \quad c = 9.48034$$
- 速度を 1 次関数 $y = mx + b$ で線形回帰すると，
$$m = 9.43387, \quad b = -12.7381$$

# 距離センサーと光センサーの利用

- 距離センサーと光センサーと併用すると、光度と距離の関係を簡単に見せることができる。
  - 光センサーは、感度を「低照度」「室内照明」「外光」の 3 段階に切り分けることができる。
  - 2 つのセンサーを同時に光源に近づけるだけである。



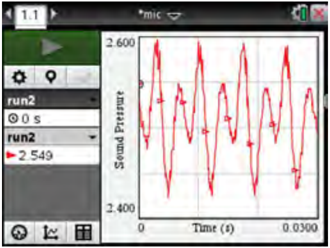



# 音圧の変化と三角関数

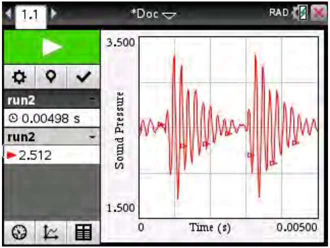
- 「音」は、空気の圧力を微妙に振動させることで伝わる。
- 音センサーは、音圧の変化を感知して電圧信号に変換する。
- 収集できる周波数帯は、100Hz〜15kHz。
  - 1Hz は 1 秒間に 1 回の振動が起きているということ。
  - 100Hz の振動は、1 秒間に 100 回振動する。
  - つまり、1 回振動するのに $1/100 = 0.01$ 秒の時間がかかる。
  - $t$ を時間 (秒) とするとき、1 秒間に波が 1 回現れるのは $\sin 2\pi t$、2 回現れるのは $\sin 4\pi t$。
  - $\sin 2\pi ft$ の $f$ が 1 秒あたりの波の数を表す。<br>この $f$ が周波数である。
  - 周波数が $f$ Hz の波の周期は、$2\pi/(2\pi f) = 1/f$ (秒) となる。
- 音センサーは、デフォルトでは、1 秒間に 1 万回のデータ収集を 0.03 秒間行う。301 個のデータが収集される。

# 音センサーによる音圧信号の取得

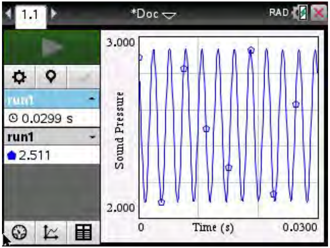
「い〜」の発声



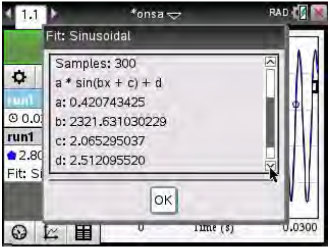

チューナーの「ラ」




音叉の音




正弦回帰



# 音叉信号の周波数

- 音階は、440Hz から 880Hz を 6 分割して得られている。
  - 440Hz が「ラ」の音で、880Hz は 1 オクターブ高い「ラ」。
  - 440Hz を $\sqrt[6]{2} = 1.05946$ 倍ずつして音階が得られている
- 音叉の音の周波数を確かめる。
  - 正弦関数 $y = a\sin(bx + c) + d$ で回帰すると、
    $a = 0.420743,\ b = 2321.63,\ c = 2.06529,\ d = 2.51209$
  - $b$ の値から
    周期は $\dfrac{2\pi}{2321.63} = 0.002706$
    周波数は $1/0.002706 = 369.5$ (Hz)
  - 440 (Hz) を $\sqrt[12]{2}$ 倍すると半音上がるので、
    $440.0$ を $\sqrt[12]{2}$ で 3 回割ると $\dfrac{440.0}{(\sqrt[12]{2})^3} = 369.99$
  - この音叉の音は F$^{\#}$ (半音高いファ) と思われる。

# 数学教育におけるセンサー利用の意義

- 動き方の違いにより、いろいろなグラフが表示される。

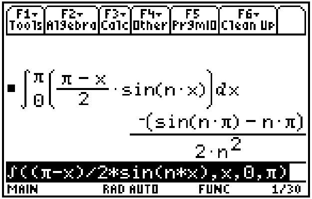
| | |
|---|---|
| 動かないとき | 定数関数 |
| 一定の速さで動いたとき | 1 次関数 |
| 動く速さを変えたとき | 2 次関数 (?) |
| 直線上を往復するとき | 絶対値関数 |
| 往復運動を繰り返すとき | 三角関数 |
| 途中でジャンプするとき | 不連続関数 |

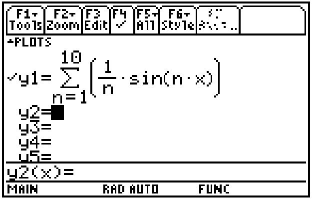
- センサーを利用すると、現実世界の変量の間の関係がどのようなグラフで表されるかを、簡単に確認することができる。それにより、「グラフ」に対する理解の向上が期待される。
- 現実世界と数学との関わりを見せておくことで、数学を学ぶことの意義についても、認識を深めさせることになる。

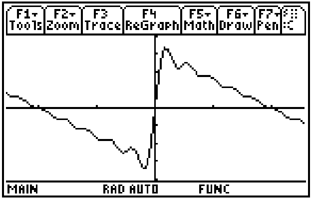
# フーリエ級数

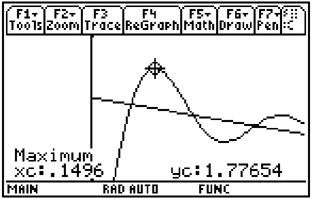
- $f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)/2 & (-\pi \leqq x < 0) \\ (\pi - x)/2 & (0 \leqq < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx dx = \frac{1}{n}$$



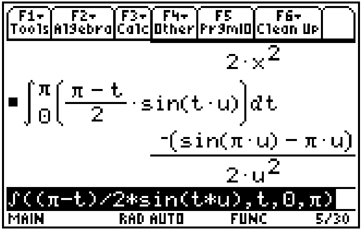
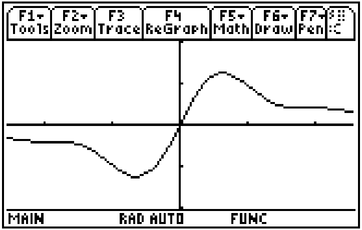



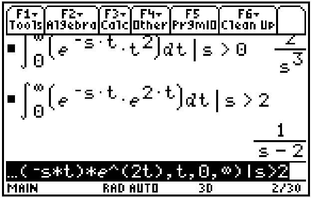
# フーリエ積分

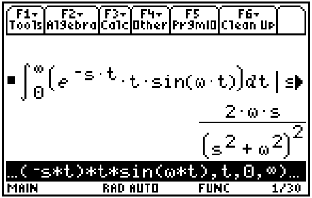
- $$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)/2 & (-\pi \leqq x < 0) \\ (\pi - x)/2 & (0 \leqq x < \pi) \\ 0 & (x < -\pi, \pi \leqq x) \end{cases}$$
  - $$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(u)\cos ux + B(u)\sin ux\} du$$
  - $$A(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\, dt = 0$$
    $$B(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\, dt$$
    $$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin ut\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi u - \sin \pi u}{2u^2}$$
  - $$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\pi u - \sin \pi u}{u^2} \sin ux\, du$$

- 
F1 Tools
F2 Algebra
F3 Calc
F4 Other
F5 PrgmIO
F6 Clean Up
∫((π−t)/2*sin(t*u),t,0,π)
MAIN
RAD AUTO
FUNC
5/30
- 
F1 Tools
F2 Zoom
F3 Trace
F4 ReGraph
F5 Math
F6 Draw
F7 Pen
MAIN
RAD AUTO
FUNC

# ラプラス変換と逆ラプラス変換

- $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
  - 一般論では $s$ は複素数であるが、$s$ を実数として範囲を指定すると、ラプラス変換の式を求めることができる。
  - 下記では、$t^2$, $e^{2t}$, $t \sin \omega t$ のラプラス変換を求めている。




- 逆ラプラス変換は、複素関数の留数の計算はまだ学んでいないので、部分分数に分解することにより計算する。

# 部分分数分解による逆ラプラス変換

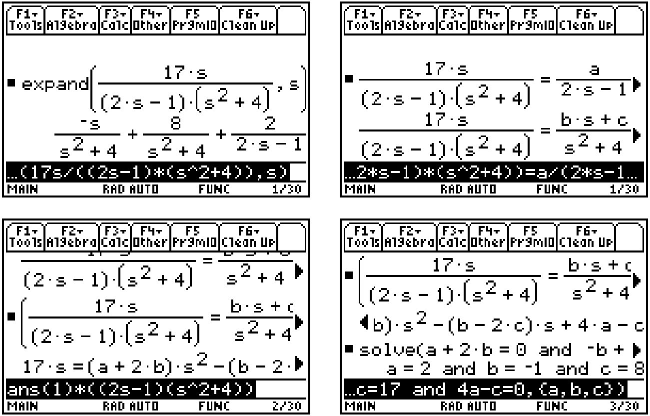
- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{17s}{(2s-1)(s^2+4)}\right]$ の計算
  - $\dfrac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} = \dfrac{a}{2s-1} + \dfrac{bs+c}{s^2+4}$ より $a, b, c$ を求める。
  - 分母を払うと、$17s = (a+2b)s^2 - (b-2c)s + 4a - c$
  - 係数を比較して、次の連立方程式を得る。
    $a + 2b = 0, \quad -b + 2c = 17, \ 4a - c = 0$
  - 連立方程式を解いて、$a = 2, \ b = -1, \ c = 8$ が得られる。
  - 以上より、次のような部分分数に分解される。

$$\begin{aligned}\frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} &= \frac{2}{2s-1} + \frac{-s+8}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \frac{s}{s^2+4} + 4\cdot\frac{2}{s^2+4}\end{aligned}$$

  - 逆ラプラス変換の公式にあてはめる。

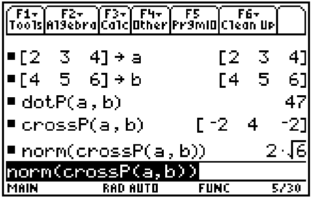
# 部分分数分解の計算

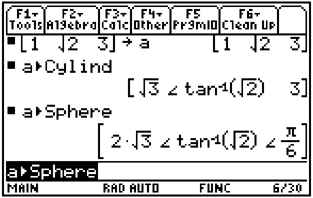
- 部分分数分解は、 $\boxed{\text{F2}}$ [3: expand] を利用すればよい。
- 部分分数分解を学生自身に行わさせることも必要であり、その際、個々の変形過程を確認しながら計算することもできる。



# ベクトルの諸計算

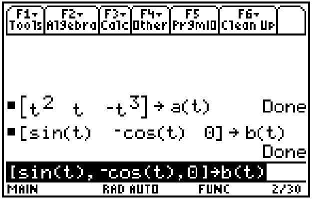
- $\boldsymbol{a} = (2, 3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (4, 5, 6)$ のとき、
  - 内積は、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 47$
  - 外積は、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-2, 4, -2)$
  - 外積の大きさは、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 2\sqrt{6}$
- $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{2}, 3)$ のとき、
  - 円柱座標は、$(r, \theta, z) = \left(\sqrt{3}, \tan^{-1}\sqrt{2}, 3\right)$
  - 球座標は、$(r, \theta, \phi) = \left(2\sqrt{3}, \tan^{-1}\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

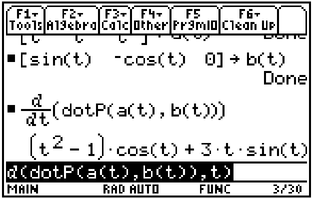


# ベクトル関数の微分

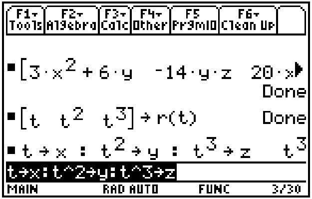
- $\boldsymbol{a}(t) = (t^2, t, -t^3), \boldsymbol{b}(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ のとき、
  - 内積は、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = t^2 \sin t - t \cos t$
  - $t$ で微分すると、$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t)) = (t^2 - 1)\cos t + 3t \sin t$

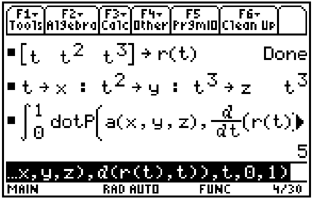


# ベクトル関数の積分

- ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(x,y,z) = (3x^2+6y, -14yz, 20xz^2)$ の、曲線 $C:\ \boldsymbol{r}(t) = (t,t^2,t^3),\ (0 \leqq t \leqq 1)$ 上の線積分は、
  - $C$ 上では、$\boldsymbol{a}(t,t^2,t^3) = (9t^2, -14t^5, 20t^7)$
  - $\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = (1,2t,3t^2),\ \ \boldsymbol{a}\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = 9t^2 - 28t^6 + 60t^9$
  - $\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \left[3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\right]_0^1 = 5$

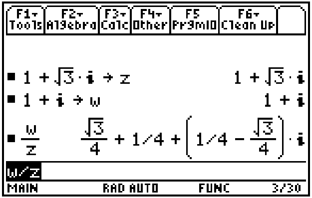


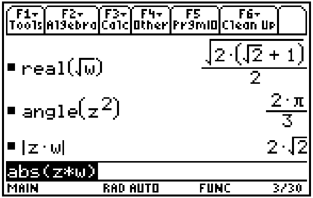



# 複素数の計算

- $z = 1 + \sqrt{3}i,\ w = 1 + i$ のとき、
  - $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i} = \dfrac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{1+3} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}i$
  - $zw = (1+\sqrt{3}i)(1+i) = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$

    $|zw| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
  - $w = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
  - $z^2 = (1+\sqrt{3}i)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$



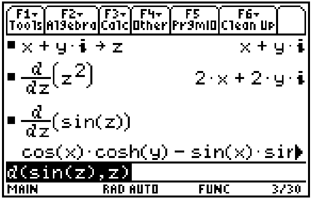



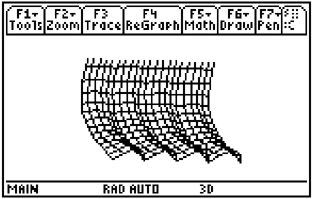
# 複素関数の微分

- $z = x + iy$ のとき、
  - $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$
  - $\dfrac{d}{dz}(z^2) = 2z = 2x + 2yi$

    $\dfrac{d}{dz}(z^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \dfrac{\partial}{\partial x}(2xyi) = 2x + 2yi$
  - $\sin z = \sin(x + yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

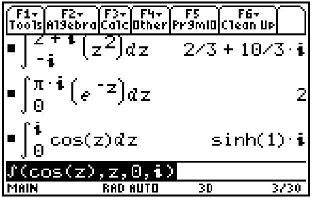
    右下の図は、$|\sin z|$ のグラフ。(40 秒で表示)
  - $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
- 形式的に微分するので、別途、正則性の確認が必要。

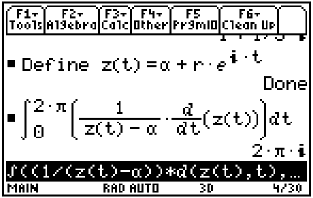


# 複素関数の積分

- 複素関数も、原始関数が存在するときは普通に計算できる。
  - $$\int_0^{\pi i} e^{-z}\,dz = \Big[-e^{-z}\Big]_0^{\pi i} = -e^{-\pi i} + e^0 = -\cos\pi + 1 = 2$$
- $C : z = z(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ に沿う $f(z)$ の積分は、
  - $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\frac{dz}{dt}\,dt$ により計算する。
  - $C : z(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のとき
    $$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

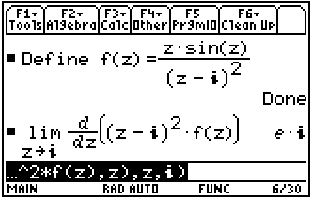


# 複素関数：留数の計算

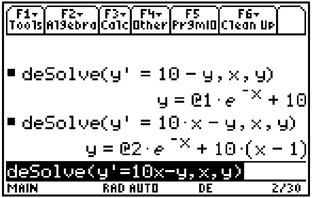
- 複素関数 $f(z)$ が、$z=\alpha$ を $n$ 位の極として持つとき、
  - 留数は、$\mathrm{Res}(f,n)=\lim_{z\to\alpha}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-\alpha)^n f(z)$ により計算。
  - $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(z-i)^2}$ は、$z=i$ を 2 位の極として持つ。
  - $\mathrm{Res}(f,2)=\lim_{z\to i}\dfrac{d}{dz}(z\sin z)$

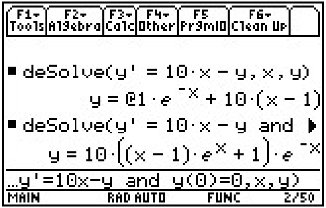
$$
\begin{aligned}
&=\lim_{z\to i}(\sin z+z\cos z)=\sin i+i\cos i\\
&=-i\cdot\frac{e^{-1}-e}{2}+i\cdot\frac{e^{-1}+e}{2}=ei
\end{aligned}
$$



# 1 階微分方程式 F3 [C: deSolve]

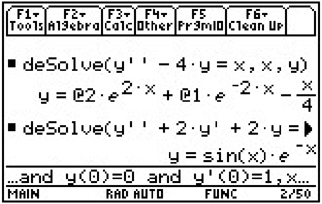
- 大部分の 1 階微分方程式は、解析解を求めることができる。
  - 変数分離形 $y' = 10 - y$ の一般解は、$y = Ce^{-x} + 10$。
  - 1 階線形 $y' = 10x - y$ の一般解は、$y = Ce^{-x} + 10(x - 1)$。
  - 微分方程式の後に初期条件を追加することもできる。
    上記で $y(0) = 0$ を満たす解は、$y = 10(e^{-x} + x - 1)$
    TI-89 では、$y = 10((x - 1)e^{x} + 1)e^{-x}$ が表示される。
  - $@1, @2$ は積分定数。deSolve の実行ごとに番号が増える。

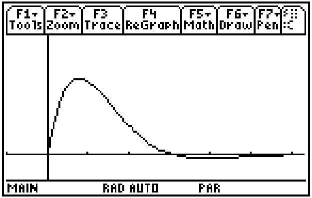


# 2 階微分方程式 F3 [C: deSolve]

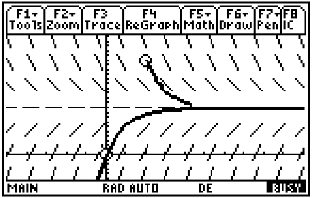
- 2 階定数係数線形微分方程式の解析解も求められる。
  - 非同次線形 $y'' - 4y = x$ の一般解は、
    $$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{x}{4}。$$
  - 同次線形 $y'' + 2y' + 2y = 0$ の一般解は、
    $$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)。$$
  - 上記の、$y(0) = 0, y'(0) = 1$ のもとでの特殊解は $y = e^{-x} \sin x$
  - 右図は、$0 \leqq x \leqq 2\pi,\ -0.1 \leqq y \leqq 0.5$ のグラフ。
- 一般解を求められないときは、方程式がそのまま返される。

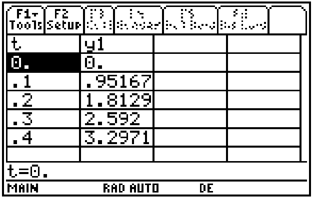


# 1 階微分方程式の勾配場

- 解の大域的な状況を示す勾配場も描画できる。
  - 1 階微分方程式の勾配場は、格子点 $(x, y)$ を通る接線の断片を $y' = f(x, y)$ から計算して描画する。
  - 勾配場上の適当な点を通る解曲線を描画することができる。独立変数としては $t$ を使用する。
  - 左図は $y' = 10 - y$ の勾配場と $y(0) = 0$ の解曲線であり、右図は、$t$ の刻み幅を 0.1 としたときの数値解である。



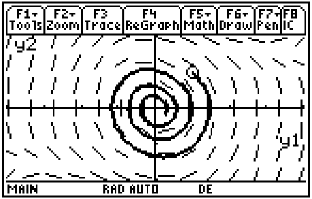



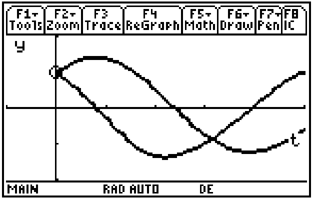
# 2 階微分方程式の位相平面

- 2 階以上の微分方程式の位相平面や解曲線も描画できる。
  - von del Pol Equation $y'' - 0.2(y^2 - 1)y' + y = 0$ を考える。
  - $y_1 = y,\ y_2 = y_1'$ とおくと、この微分方程式は

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0.2(y_1^2 - 1)y_2 - y_1 \end{cases}$$

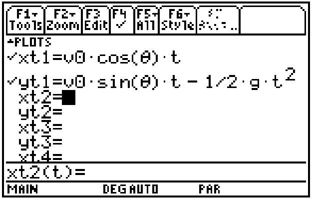
という 1 階連立微分方程式で表すことができる。
  - 左図は $y_1$ を横軸、$y_2$ を縦軸とする位相平面と、$y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ を満たす解曲線、右図はそれぞれのグラフである。

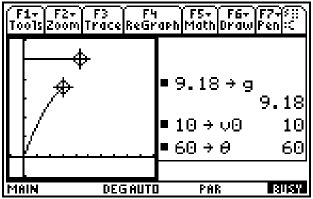


# 放物運動

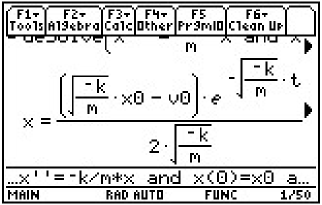
- 原点から水平角 $\theta$、初速度 $v_0$ で投げ上げられた物体の、$t$ 秒後の変位は $x = (v_0\cos\theta)t,\ y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ である。
  - 媒介変数を利用すると、このグラフが描画できる。
  - 画面を分割し、角の単位を度にして、運動の様子を具体的に見ることができる。
  - 水平飛行物体と衝突させるには、初速度 $v_0$ や角度 $\theta$ をどのようにに定めればよいかを実験的に確かめさせることもできる。

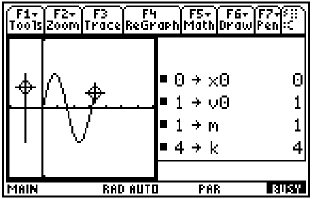


# バネの振動

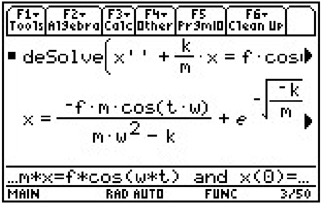
- ばね定数 $k$ のコイルばねに質量 $m$ の物体をつけた振動。
  - 運動方程式は $\dfrac{dx^2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$ である。
  - 初期変位 $x(0) = x_0, \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0$ を与えると、
    その解は $x = A\cos pt + B\sin pt\ (p^2 = k/m)$ である。
  - 左図は、$x_0 = 0, v_0 = 1, m = 1, k = 4$ としたときの振動の様子である。垂直方向の動きと、時間軸を横軸にとったときのグラフとを同時表示した。

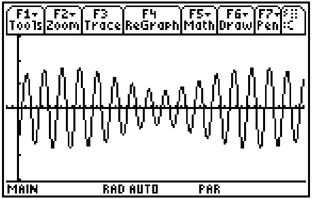


# 強制振動

- バネの振動に強制的な外力 $F\cos\omega t$ を与える。
  - 運動方程式は、$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=F\cos\omega t$
  - この微分方程式の特殊解は $\dfrac{F}{\dfrac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t$
  - $p \div \omega$ のときは「うなり」を生じる。
    右図は、$\dfrac{k}{m}=4,\ \omega=2.2,\ F=1$ の場合である。



# 方程式 $f(x) = 0$ の数値解を求める

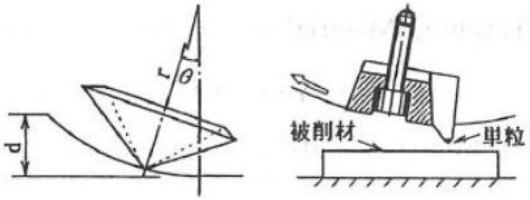
- 方程式の実数解は Solve を利用すると求められる。
- 実数解を求める方法を理解させるために、実数解を二分法で求めるプログラムを作成させることも有益である。
- $f(x)$ は定義済みで、$[a, b]$ 内に実数解を 1 つもとものとする。
  - 最初に $f(x_1)f(x_2) < 0$ となる区間 $[x_1, x_2]$ を与える。
  - $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ として、$f(x_1)f(x_3)$ の符号を調べる。
    $f(x_1)f(x_3) > 0$ ならば、$x_1$ を $x_3$ で置きかえる。
    $f(x_1)f(x_3) < 0$ ならば、$x_2$ を $x_3$ で置きかえる。
  - 再び $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ として、$f(x_3)$ の値が指定した誤差内に納まるまで同様のことを繰り返す。

# $f(x) = 0$ の実数解を求めるプログラム

| | |
|---|---|
| : kai(a,b) | kai はプログラム名。引数は区間 $[a, b]$ |
| : Func | 関数であることを宣言 |
| : Local aa, bb, ee, mm, yy | ローカル変数の宣言 |
| : a→aa | $a$ の値を $aa$ に代入する |
| : b→bb | $b$ の値を $bb$ に代入する |
| : (a+b)/2→mm | $(a+b)/2$ の値を $mm$ に代入する |
| : 10 ^ (−6)→ee | 誤差の限界を $10^{-6}$ にして $ee$ に代入する |
| : While abs(f(mm))>ee | $\lvert f(mm)\rvert > ee$ ならば以下を実行する |
| : If f(aa)∗f(mm)>0 Then | 同符号ならば以下を実行する |
| : mm→aa | $mm$ の値を $aa$ に代入する |
| : Else | 同符号でないときは、以下を実行する |
| : mm→bb | $mm$ の値を $bb$ に代入する |
| : EndIf | If 文終わり |
| : (aa+bb)/2→mm | $(aa+bb)/2$ を $mm$ に代入する |
| : EndWhile | While 文終わり |
| : Return approx(mm) | 誤差 $10^{-6}$ 以内で求めた実数解 $mm$ を返す |
| : EndFunc | 関数定義の終了 |

# 研削加工における数学の利用例

- 研削加工 (Cutting Mechanism) は、機械工学の一分野。
  - 金属の表面に溝をつけるとき、溝の形状について考える。
  - 四角錐状のダイヤモンドで、セラミックスを研削する



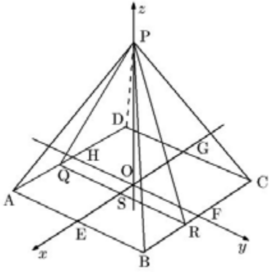

  - 円板の外周の 1 点に固定して、それを回転させることで研削。
  - セラミック板を低速で送るとき、直線状の溝が形成される。
  - その溝の形状は、どのようなものか？

# 正四角錐の各面の角

- ダイヤモンドの形状を正四角錐として考える。
- 溝の形状を考えるには、各面の角を把握しておくことが必要。
- 底面は 1 辺が $2k$ の正方形、高さ $r$ の正四角錐とする。
- $\angle \mathsf{OPE} = \omega$ とし、$\cot\omega = a$ とおくと
  - $\mathrm{OP} = ka$, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \sqrt{2}k$,
    $\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = k\sqrt{a^2+2}$
    $\triangle\mathrm{PAB}$ で余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{APB} = \frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}} = \frac{a^2}{a^2+2}$$

  - 同様にすると、$\cos\angle\mathrm{APC} = \dfrac{a^2-2}{a^2+2}$

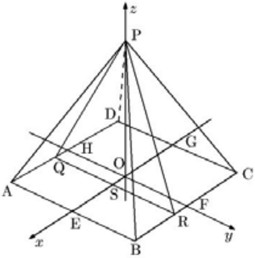


# 切削部分の平面

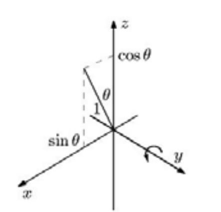
- 正四角錐が回転することによる切削は，△PQR が △PAB から △PDC まで連続的に移行することにより行われる．
- S$(t,0,0)$，$\angle$QPR $=\rho$, $\angle$OPS $=\phi$ として $\cos\rho$ を求める。
- A$(k,-k,0)$，　B$(k,k,0)$，　C$(-k,k,0)$，　D$(-k,-k,0)$
- P$(0,0,r)$，Q$(t,-k,0)$，R$(t,k,0)$
    - PQ : $\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{-k}=\dfrac{z-r}{-r}$
    - PR : $\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{k}=\dfrac{z-r}{-r}$
    - $\boldsymbol{u}=(t,-k,-r)$,　　$\boldsymbol{v}=(t,k,-r)$
    - $\tan\phi=t/r$,　$1+\tan^2\phi=\sec^2\phi$,
      $a=\cot\omega=r/k$

$$\cos\rho=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{t^2-k^2+r^2}{t^2+k^2+r^2}=\frac{\sec^2\phi-\tan^2\omega}{\sec^2\phi+\tan^2\omega}=\frac{a^2-\cos^2\phi}{a^2+\cos^2\phi}$$



# 正四角錐を $y$ 軸の回りに回転




- 正四角錐を $y$ 軸の回りに回転させる。
- 角 $\theta$ だけ回転して点 $(x, y, z)$ が
  点 $(x', y', z')$ に移ると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= x'\cos\theta - z'\sin\theta \\ y &= \qquad y' \\ z &= x'\sin\theta + z'\cos\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{PQ}: \quad \frac{x\cos\theta - z\sin\theta}{t} = -\frac{y}{k} = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta - r}{-r}$$

$$\mathrm{PR}: \quad \frac{x\cos\theta - z\sin\theta}{t} = \frac{y}{k} = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta - r}{-r}$$

# 溝断面の角度：$yz$ 平面への正射影

- 刻まれる溝の断面の角度は、直線 PQ, PR を $yz$ 平面に正射影してできる直線の角度と等しい。
- 直線 PQ の方程式は

$$\mathrm{PQ}: \quad \frac{x\cos\theta - z\sin\theta}{t} = -\frac{y}{k} = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta - r}{-r}$$

$$\begin{cases} (t\sin\theta + r\cos\theta)x + (t\cos\theta - r\sin\theta)z & = \quad tr \\ kx\sin\theta + kz\cos\theta & = \quad kr + ry \end{cases}$$

- $x$ を消去すると $\quad z = \dfrac{r\cos\theta + t\sin\theta}{k}y + r\cos\theta$
- 直線 PR より同様にして $\quad z = -\dfrac{r\cos\theta + t\sin\theta}{k}y + r\cos\theta$

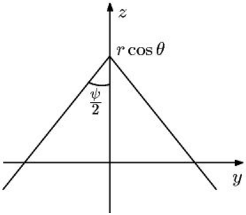
# 溝断面の角度：$yz$ 平面への正射影 (2)

- $yz$ 平面に正射影した直線のなす角を $\psi$。

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{2}\right)=\frac{r\cos\theta+t\sin\theta}{k}$$

$$\therefore \quad \psi=\pi-2\tan^{-1}\frac{r\cos\theta+t\sin\theta}{k}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{2k\sin\theta}{k^2+(r\cos\theta+t\sin\theta)^2}$$




  - $t$ の範囲は $-k \leqq t \leqq k$ である。
  - $\theta \geqq 0$ のとき $\psi$ は単調減少。$t=-k$ のときに最大。
    $\theta < 0$ のとき $\psi$ は単調増加。$t=k$ のときに最大。
- これは、溝の断面が，$\theta < 0$ のときは $\triangle$PAB により，$\theta > 0$ のときは $\triangle$PDC により刻まれることを意味する．

# 切削される溝の断面曲線

- 正四角錐が回転してできる溝の断面曲線は、
直線 PQ, PR が回転することにより生成される.
- その曲線は、
    - 直線 PQ, PR を $y$ 軸の回りに回転させて、
    - それを $yz$ 平面に正射影してできる直線の、
    - $\theta$ を媒介変数とする直線群の包絡線として求められる.
- $\theta > 0$ のとき溝の断面は △PDC により生成される。
    - $z = -\dfrac{r\cos\theta - k\sin\theta}{k}y + r\cos\theta$ より
    $ky\sin\theta + r(k-y)\cos\theta = kz$
    - $\theta$ で偏微分して　$ky\cos\theta - r(k-y)\sin\theta = 0$
    - $\sin\theta$, $\cos\theta$ について解いて

$$\sin\theta = \frac{k^2yz}{k^2y^2 + r^2(k-y)^2}, \quad \cos\theta = \frac{kr(k-y)z}{k^2y^2 + r^2(k-y)^2}$$

# 切削される溝の断面曲線 (2)

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して、$a = \cot\omega = r/k$ を利用して変形すると

$$\left(y - \frac{ka^2}{a^2+1}\right)^2 - \frac{z^2}{a^2+1} = -\frac{a^2k^2}{(a^2+1)^2}$$

- この双曲線の $y > 0,\ z > 0$ の部分が溝の断面曲線である.
- 実際の切削は $y = 0$ のごく近くで行われる。

$$\begin{aligned} z &= ak\sqrt{1 - \frac{2}{k}y + \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)y^2} \\ &= ak\left[1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{k}y - \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)y^2\right\} - \frac{1}{8}\frac{4}{k^2}y^2 + \cdots\right] \\ &\fallingdotseq r - ay + \frac{y^2}{2r} \end{aligned}$$

# 研削加工に関する教材の意義

- 高専３年前期までの、広範囲な数学が利用されている。
  - １年では、分数式の変形、三角関数の各種変形、２次曲線
  - ２年では、ベクトルのなす角、方向ベクトル、軸の回りの回転
  - ３年では、微分、極値、マクローリン展開、包絡線
- 単なる数学の問題ではなく、工学上のあるテーマを達成するための計算であり、その計算の目的や意義は明らかである。
- いろいろな発展性がある。
  - 正四角錐を別な図形で置きかえてみる。
  - 正四角錐の回転速度も考慮する。
  - 切削する板を一定の速度で移動させる。
- 機械系学生への数学の総復習として適材。
- 工学上の特定のテーマに関して、それを考察するために必要な数学を教授するという教授法は可能か？
- 数学的に内容豊富で低学年にも教授可能なテーマを見いだすのは、実際には難しいと思われる。

# 専門科目での利用：流体力学

- 流体力学では、
  - 気体・液体など、「流れ」を連続体の変形問題として捉える。
  - すべての点 $(x, y, z)$ において、速度 ($\boldsymbol{V}$)、圧力 ($p$)、密度 ($\rho$) などを、時間の関数として明らかにしたい。
- 基本的な方程式は
  - 質量保存の法則として
    $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0 \qquad \text{(連続の式)}$$
  - 運動方程式は、$\boldsymbol{V}$ を速度ベクトル、質量力を $\boldsymbol{F}$ として

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{V} \qquad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

# 流体力学での数学：基礎数学

- 使用される文字が多い
  - アルファベットの、ほぼ全文字の大文字・小文字が使われる。
  - ギリシア文字の大文字・小文字についても同様。
  - 添え字の下付き ($\zeta_{in}$, $U_\infty$)、上付き ($v^*$, $\xi'$, $\delta^{**}$) が頻出。
  - それらが混在する場合もある。$\overline{H}_0$, $\dot{m}_{\mathrm{J}}$, $u^{*2}$, $e^{-y/\delta^*}$
  - その中で、式の変形や微分・積分の計算をすることになる。
- 複雑な分数式の変形が頻出する.
  - $\kappa \boldsymbol{M_1}^2 = \dfrac{\dfrac{p_2}{p_1} - 1}{1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}}$ と $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{(\kappa-1) + (\kappa+1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{(\kappa+1) + (\kappa-1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}$ から

    $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{2\kappa}{\kappa+1}\boldsymbol{M_1}^2 - \dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}$ を導く。

# 流体力学での数学：基礎数学 (2)

- 関数の基本性質を理解した上で複雑な分数式の変形が頻出。
  - 多数の文字を含む中で、独立変数、従属変数が何であるかを常に意識する必要がある。
  - 「関数とは何か」という根本部分の理解が必要とされる。
  - $\dfrac{U}{a_0} = \left(\dfrac{\kappa - 1}{2} + \dfrac{1}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ において，$\boldsymbol{M}$ を $U/a_0$ の関数と見たときのグラフ。
- 多数の変数の比例関係から、特定の変数の比例関係を導く。

$$\frac{Db}{Dt} \approx u\frac{db}{dx} \qquad \frac{Db}{Dt} \propto u_{\max}\frac{db}{dx} \qquad \frac{Db}{Dt} \propto v'$$

$$v' \propto \frac{\partial u}{\partial y} \qquad l \propto b \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \propto \frac{u_{\max}}{b}$$

以上の関係より，$b \propto x$ を導く．

# 流体力学での数学：基礎数学 (3)

- 基本を押さえた上で、計算や式変形の総合能力が必要。
  - $u = \frac{v_*}{\kappa}\ln y + C, \quad C = -\frac{v_*}{\kappa}\ln\beta\frac{\nu}{v_*}$ より $\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa}\left(\ln\frac{v_* y}{\nu} - \ln\beta\right)$ を導く。
  - ${\boldsymbol{M_2}}^2 = \frac{2 + (\kappa-1){\boldsymbol{M_1}}^2}{2\kappa{\boldsymbol{M_1}}^2 - (\kappa-1)}$ において、$\boldsymbol{M_1} > 1$ のとき $\boldsymbol{M_2} < 1$ を導く。
  - $\mu = \sin^{-1}\frac{1}{\boldsymbol{M}_\infty}$ のとき、$\tan\mu = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{M}_\infty^2 - 1}}$ を導く。
  - $\frac{\tan(\beta-\theta)}{\tan\beta} = \frac{1}{u_1^2}\left\{a^{*2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}v^2\right\}, \quad \frac{u_1^2+v^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}a^{*2}$ より $\frac{u_1}{a_1} = \boldsymbol{M_1}\sin\beta$ とおいて $\tan\theta = \frac{2\cot\beta({\boldsymbol{M_1}}^2\sin^2\beta - 1)}{{\boldsymbol{M_1}}^2(\kappa + \cos 2\beta) + 2}$ を導く。

# 流体力学での数学：1 変数の微分積分

- 微分の基本部分に対して理解していることを前提として、
  - 多数の文字の中で、どの文字が変数かに注意しながら、
  - 計算の総合能力が必要とされる。
- いろいろな変化率が導関数で定義される。
  - 流体中の小さな面 (面積 $\Delta A$) に働く力で、面に垂直な成分を $\Delta P$、平行な成分を $\Delta T$ とすると

$$\text{圧力 } p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}, \quad \text{せん断応力 } \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A}$$

- 微分してゼロなら、その変数について定数である。
  - $\partial p/\partial x = 0,\ \partial p/\partial y = 0$ となることから，圧力 $p = p(x, y, z)$ は $x$，$y$ 方向には変化せず高さ $z$ のみの関数 $p(z)$ となる．
- 合成関数の微分公式による計算。
  - $\eta = y\sqrt{\dfrac{U_\infty}{\nu x}},\ \psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)$ のとき

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}(\eta f' - f)$$

# 流体力学：1 変数の微分積分 (2)

- テイラー展開して、高次の無限小を省略して近似式を導く。
  - $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{(\kappa-1)+(\kappa+1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{(\kappa+1)+(\kappa-1)\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}$ おいて $\dfrac{p_2}{p_1} = 1+\varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1)$

    のとき $\quad \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \dfrac{1}{\kappa}\varepsilon - \dfrac{\kappa-1}{2\kappa^2}\varepsilon^2 + \dfrac{(\kappa-1)^2}{4\kappa^3}\varepsilon^3 + \cdots$
- べき級数を利用した不定形の極限値の計算。
  - $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m}{4\pi\varepsilon} \log \frac{1-\varepsilon/z}{1+\varepsilon/z}$$
    $$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m}{4\pi\varepsilon} \left\{-2\left(\frac{\varepsilon}{z}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^3 - \cdots\right\} = -\frac{m}{2\pi}\frac{1}{z}$$

# 流体力学：1 変数の微分積分 (3)

- 微小量の和としての定積分の理解。
  - 水中に垂直に置かれた平板 (plane) を幅 $dY$ の板片に分ける．横幅を $b(Y)$ とすると，一つの板片に働く力 $\Delta F$ は $\Delta F = \rho g b(Y) Y dY$ なので，全圧力は
$$F = \sum_{\text{plane}} \Delta F = \rho g \int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} b(Y) Y dY$$
- 離散的な和が $\Sigma$ で、連続的な和が $\int$ であることの理解。
  - $x = x_i$ の点に $\Gamma_i$ の循環を持つ渦が分布している渦系に関係する物体に働く揚力 $L$ は $L = -\dfrac{dI}{dt} = -\rho \dfrac{d}{dt} \sum_i \Gamma_i x_i$
渦が連続的に分布しているときは，単位長さ当たりの循環の大きさを $\gamma(x,t)$ とすると $L = -\rho \dfrac{d}{dt} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x,t) x dx \right\}$

# 流体力学：1 変数の微分積分 (4)

- 多数の変数の中で、置換積分や部分積分の計算力が必要。
  - $u = \dfrac{U(h-y)}{h} - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{y(h-y)}{2}$ のとき
    $$\int_0^h u\,dy = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$
  - $p - p_0 = \dfrac{6\mu U l}{h_1^2 - h_2^2}\dfrac{(h_1-h)(h-h_2)}{h^2}$ において
    $h = h_1 - \dfrac{(h_1-h_2)x}{l}$, $m = \dfrac{h_1}{h_2}$ として次式を導く.
    $$P = \int_0^l (p-p_0)dx = \frac{6\mu U l^2}{(m-1)^2 h_2^2}\left(\ln m - 2\frac{m-1}{m+1}\right)$$
  - $\phi = a\ln(1+b\eta) = a\ln z$, $F(\eta) = a^3\left(\ln^2 z - 2\ln z + 2 - \dfrac{2}{z}\right)$
    $$\Psi(\eta) = \int_0^\eta \frac{F(\eta)}{[\phi(\eta)]^2}d\eta = \frac{a}{b}\left(z + 1 - \frac{2(z-1)}{\ln z}\right)$$

# 流体力学：(偏) 微分方程式

- 3 階までの、線形・非線形の微分方程式が頻出する。
- その計算を、多数の文字の中で行わなければならない。
  - $\dfrac{dU_r}{d\varphi} = \sqrt{\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}}U_{\max}\sqrt{1-\left(\dfrac{U_r}{U_{\max}}\right)^2}$ を積分して
    $$\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\varphi = \sin^{-1}\frac{U_r}{U_{\max}} + \mathrm{C}$$
  - $\dfrac{U\left(\dfrac{d^2U}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{dU}{dx}\right)^2} = 11$ を解いて、$U = U_0\left(1+100\dfrac{\nu x}{U_0\delta_0^2}\right)^{-0.1}$
  - $F'^2 + FF'' + \dfrac{1}{2}F''' = 0$ を
    $\eta = 0$ のとき $F = 0,\ F' = 1$、$\eta = \infty$ のとき $F' = 0$
    という境界条件のもとで解くと，$F = \tanh\eta$

# 流体力学における数学の使われ方

- 多数の文字を含む中での式変形や計算が必要である。
  - $x, y$ に偏った問題だけを扱うのではなく、意図的にいろいろな文字を含む問題に取り組ませた方がよい。
  - 複雑な式変形を伴う問題にも取り組ませたい。
- 多数の文字の中で、独立変数や従属変数がどれであるかを見極めながら計算できる能力も必要である。
  - 変数の間の関係から、一つの変数の変化で他の変数がどのような変化をするのかを、感覚的に把握できることが望ましい。
  - 問題演習を多くこなす中で身についていくと思われる。
- 微分積分のの意味をしっかりと理解しておく必要がある。
  - 微小量の変化率としての微分。和の極限としての定積分。
  - どのようなときに、何のために微分するのか、何のために積分するのか、ということの理解。
- 一つの学習領域だけの問題にとどまらず、学習済みの知識を総動員して考えさせる問題に取り組ませることも必要。

# 専門科目での利用：反応工学の場合

- 化学工学は、化学プラント工場の設計・運転などを扱う。
- 工場内の反応器では、化学物質が次々に変化する。
- ある物質がどれだけ生成されるかは微分方程式で表される。
- 反応工学では、そのような微分方程式が頻出し、その解析解をさらに詳細に分析する必要がある。
- 変数分離形や1階定数線形が多く現われる。

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A^n$$

$$\frac{dC_A}{dt} = -(k_1 + k_2)C_A^a C_B^b$$

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A(C_{R_0} - bC_{A_0} + bC_A)$$

$$\frac{dC_R}{dt} = -k_2 C_R + k_1 C_{A_0} \exp(-k_1 t)$$

# 変数分離形の微分方程式

- 初期条件 $C_A(0) = C_{A_0}$ を与えて
  $$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A(C_{B_0} - bC_{A_0} + bC_A)$$ を解く。
- まず，変数分離をして部分分数に分解して積分する．

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0}}\right)\int_{C_{A_0}}^{C_A}\left(\frac{1}{C_A} - \frac{1}{\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0} + C_A}\right)dC_A = -k\int_0^t dt$$

- この積分を計算して式を整理すると

$$\frac{1}{C_{B_0} - bC_{A_0}}\log\left|\frac{C_A C_{B_0}}{bC_{A_0}\left(\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0} + C_A\right)}\right| = -kt$$

# 変数分離形の微分方程式 (2)

- 絶対値の内部は正として変形すると，指数関数を用いて

$$C_A = \frac{bC_{A_0}}{C_{B_0}}\left(\frac{C_{B_0}}{b} - C_{A_0} + C_A\right)\exp\{-kt(C_{B_0} - bC_{A_0})\}$$

$$C_A = \frac{C_{A_0}(C_{B_0} - bC_{A_0})}{C_{B_0}\exp\{kt(C_{B_0} - bC_{A_0})\} - bC_{A_0}}$$

- 物質化学工学科の学生 (4 年生) は、この計算を、多数の添え字つきの文字係数のまま自分で行うことが求められる。
- そこでは、次のような計算を行う必要がある。
  - 部分分数への分解
  - 簡単な分数関数の定積分
  - 対数関数の性質を利用した式の変形
  - 対数を用いた式を、指数関数の式に変換

# 二分法による数値解法

- 工学の現場では、解析解が求まるだけでは不十分。
- 係数の具体的な値のもとで、目的変数や従属変数の具体的な値を求める必要がある。
- たとえば、$b = 1$, $C_{A_0} = 3.58$ mol/L, $C_{B_0} = 5.22$ mol/L, $k = 5.33 \times 10^{-2}$ L/mol $\cdot$ min であるとき, $C_A = 1.03$ mol/L となる $t$ を求めるには
- 次の式を満たす $t$ を求めればよい.

$$1.03 = \frac{3.85(5.22 - 3.58)}{5.22 \cdot \exp\left\{5.33 \times 10^{-2} t(5.22 - 3.58)\right\} - 3.58}$$

# 二分法による数値解法 (2)

- 二分法により解の近似値を求める.
- 右辺と左辺の差を $f(t)$ として，次の手順で近似値を求める.
  - $f(t_1)f(t_2) < 0$ を満たす $t_1, t_2$ を定める.
  - $(t_1 + t_2)/2 = t_3$ として， $f(t_3)$ の値を求める.
  - $s, t$ を $t_1, t_2, t_3$ のどれかとし，$f(s)f(t) < 0$ $(s < t)$ となる $s, t$ を新ためて $t_1$, $t_2$ として同様のことを繰り返す.
  - 解を含む区間をある程度狭めたら，その後は $10^{-n}$ 刻みで値を代入して解を求める.
- $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ として考えると $t_3 = 5$ である。
- 7 回目の計算で $f(7.03125) = 0.00994$, $f(7.1875) = -0.0123$ となり、中点 $t_3 = 7.109375$ では $f(t_3) = -0.001264$ である. 実際の値は $t = 7.10049\cdots$ である.

# 1 階線形微分方程式の解の極値

- 化学反応で生成される物質の量が最大になるときを求める。
- 反応を表す微分方程式が、次のように表されるとする。

$$\frac{dC_R}{dt} + k_2 C_R = k_1 C_{A_0} \exp(-k_1 t)$$

- この微分方程式の一般解は

$$C_R = C_{R_0} \exp(-k_2 t) + \frac{k_1 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \{\exp(-k_1 t) - \exp(-k_2 t)\}$$

- $C_R$ が最大になる時刻 $t$ は、$\dfrac{dC_R}{dt} = 0$ を解けばよい。

$$\frac{dC_R}{dt} = -k_2 C_{R_0} e^{-k_2 t} + \frac{k_1 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \left( k_2 e^{-k_2 t} - k_1 e^{-k_1 t} \right)$$

- $t = t_{R_{max}}$ のときに最大とすると、

$$\left( -k_2 C_{R_0} + \frac{k_1 k_2 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \right) e^{-k_2 t_{Rmax}} - \left( \frac{k_1^2 C_{A_0}}{k_2 - k_1} \right) e^{-k_1 t_{Rmax}} = 0$$

# 1 階線形微分方程式の解の極値 (2)

- 移項すると

$$\left(\frac{k_1^2 C_{A_0}}{k_2 - k_1}\right) e^{-k_1 t_{R_{max}}} = \left(-k_2 C_{R_0} + \frac{k_1 k_2 C_{A_0}}{k_2 - k_1}\right) e^{-k_2 t_{R_{max}}}$$

- 指数関数部分をまとめると

$$\exp((k_2 - k_1) t_{R_{max}}) = \frac{-k_2 C_{R_0}(k_2 - k_1) + k_1 k_2 C_{A_0}}{k_1^2 C_{A_0}}$$

- 両辺の対数をとって

$$t_{R_{max}} = \frac{1}{k_2 - k_1} \ln\left(\frac{-k_2 C_{R_0}(k_2 - k_1) + k_1 k_2 C_{A_0}}{k_1^2 C_{A_0}}\right)$$

- この計算も、学生は自分で行うことが求められる。

# 専門科目での利用：計測制御工学

- 多くの工場では、温度・圧力・濃度などを制御して、複雑な製造過程を経て製品が生産される。
- 工業技術者は，制御過程を把握して管理する必要がある．
- そこでは，センサーなどいろいろな検出器や信号増幅の仕組みなど，電気回路に関する知識も求められる．
- 複数のプロセスが連続する場合はラプラス変換が必須であり，伝達関数などをきちんと取り扱えなければならない
- たとえば、化学反応が幾つかのプロセスを経て得られる場合，個々のプロセスの入力と出力の関係は，微分方程式の非斉次項とその解との関係で表される．
- 1 次遅れ系と呼ばれるプロセスでは、次の式が現れる。

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$$

# 1 次遅れ系の伝達関数

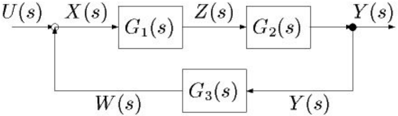
$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$$

- それぞれの意味は、
  - 出力関数 $y$ は物質の濃度や槽内の温度などを表す.
  - $\tau$ はそのプロセスの特性を表す定数である。
  - $K$ は定常状態における入力と出力の比 (出力 / 入力) である.
  - $u(t)$ が初期入力の関数である.
- 初期条件を $y(0) = 0$ としてラプラス変換をする。
- $y(t),\ u(t)$ のラプラス変換を簡単に $Y(s), U(s)$ と表すと,

$$\tau s Y(s) + Y(s) = KU(s), \qquad Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} U(s)$$

- $G(s) = K/(\tau s + 1)$ が，この 1 次遅れ系の伝達関数である.

# フィードバック制御の伝達関数




$$X(s) = U(s) - W(s) \qquad Z(s) = G_1(s)X(s)$$
$$Y(s) = G_2(s)Z(s) \qquad W(s) = G_3(s)Y(s)$$

- 出力 $Y(s)$ を求めると

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \cdot U(s)$$

- このフィードバック制御の合成伝達関数は、

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

# 入力関数が周期的なときの出力関数

- 1 次遅れ系で、入力関数が $u(t) = A\sin\omega t$ のときは

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s+1}U(s) = \frac{K}{\tau s+1}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$= \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{\tau\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

- これを逆ラプラス変換して、出力関数 $y(t)$ は

$$y(t) = \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(e^{-t/\tau} + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

# 1 次遅れ系の過渡状態と定常状態

$$y(t) = \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(e^{-t/\tau} + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

- $t$ が十分に大きくはなくて、$e^{-t/\tau}$ 部分の影響を無視できないとき、解は第 1 項の影響を受ける。過渡状態という。
- $t$ が十分に大きいときは、第 1 項を無視して

$$y(t) \fallingdotseq \frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\left(\frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

- 入力関数 $A\sin\omega t$ と比べると、周期は同じであるが、振幅が変化して位相もずれる。
- 特に、$\omega$ の値が大きい高周波の入力では、出力関数の振幅が小さくなる。ローパスフィルター特性と呼ばれる。

# 工学実験におけるセンサーの活用

- 工場では、いろいろなセンサーによる自動化がなされている。
- 工学実験では、データ収集が手作業で行われる場合がある。
  - データの収集作業に時間を取られすぎたり、
  - 手動による採取であることから、安全性の配慮のために十分な範囲のデータ収集ができない場合がある。
- データ収集部分を工業センサーで置きかえるには
  - 電気回路等に関する知識が必要
  - センサーを組み込むための作業時間が必要<br>プログラミング、通信プロトコル等
  - そのための事前設定がセンサーにより異なる。
  - その設定にかなりの時間が必要になる場合がある。
  - グループ実験の場合は、暇にしている学生が現れる。
  - 分析にパソコンを利用すると、操作学生以外は見ているだけ。
  - 考察内容が、力の強い者に影響される場合がある。

# 工学実験のプラットフォーム

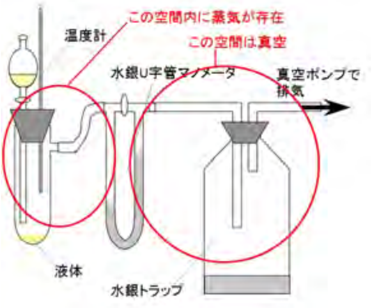
- グラフ電卓では、60 種類以上のセンサーを使用できる。
- グラフ電卓とセンサーを利用すると
  - センサーを接続するだけでよく、事前設定は不要。電気回路等の知識も不要。
  - データ収集後は、同一の手順で分析を行うことができる。
  - 収集データは即座にグラフ化され、
  - グラフ電卓の統計機能による即座に分析に移行できる。
  - 各自にグラフ電卓を与えた場合は、収集データをコピーすることで、一人一人に分析作業を行わさせることができる。
  - 個々の学生が、自分の発想を生かした考察ができる。
  - 汎用のセンサーの信号が電圧変動による場合は、グラフ電卓用の電圧センサーで読み取ることができる。
- グラフ電卓は、工学実験のプラットフォームとして利用することができる。

# 主なセンサー (全部で 60 種類以上)

| | | |
|---|---|---|
| 距離センサ | pH センサ | フォトゲート |
| 伝導率センサ | 加重計 | ドロップカウンタ |
| 角度センサ | 比色計 | 加速度計 (5G) |
| 電流計システム | 酸化還元電位センサ | 3 軸加速度計 |
| 硝酸塩イオン電極 | 力センサ | カルシウムイオン電極 |
| 圧力センサ | アンモニアイオン電極 | 温度センサ |
| 塩化物イオン電極 | カリウムイオン電極 | 赤外線温度計 |
| 可視域分光計 | 表面温度センサ | 紫外線域分光光度計 |
| スペクトル放射分光計 | 熱電対 | ガスクロマトグラフィ |
| 電流計 | 偏光計 | 高電流センサ |
| 電圧計 | CO2 濃度センサ | 30 ボルト電圧計 |
| O2 濃度センサ | 電位差計 | 溶存酸素計 |
| 増幅器 | 電荷センサ | PAR センサ |
| 磁界センサ | 塩分センサ | 音センサ |
| 濁度センサ | 音量計 | エタノールセンサ |
| 光センサ | EKG センサ (心電図) | 放射線センサ |
| 風速計 | 握力計 | 気圧計 |
| 土壌水分センサ | 測角器 | 流速センサ |

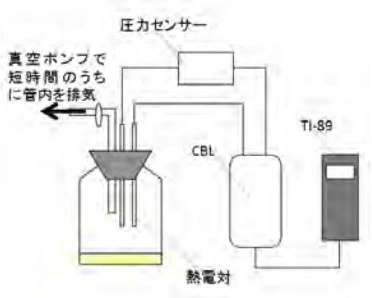
# 温度センサーと圧力センサーの利用

- 蒸気圧 $(P)$ と温度 $(t)$ の関係は、$\log_{10} P = A - \dfrac{B}{t+C}$ という関係がある。アントワン式と呼ばれる。
- 物理化学実験では、この関係を実験により確かめる。
  - 上部を閉じた大型の瓶を加熱して蒸気を発生させる。
  - 蒸気圧を、水銀を封入した U 字型マノメーターで目視観測。
  - 瓶全体を均一に加熱することが難しい。
  - 水銀マノメーターの長さから、40°C 程度までのデータとしか取れない。



# 温度センサーと圧力センサー (2)

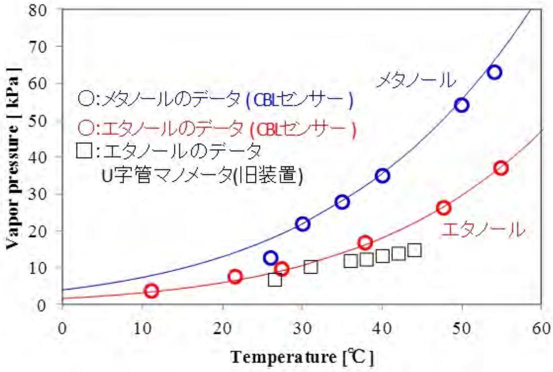
- この実験で、棒状温度計を温度センサーに、U 字型マノメーターを圧力センサーに置きかえた。
  - 温度センサーは $-40 \sim 135$°C を測定でき、$0 \sim 40$°C での精度は 0.03°C、$40 \sim 100$°C での精度は 0.1°C である。
  - 圧力センサーは $0 \sim 210$ kPa を測定でき、精度は 0.05 kPa。




- この置き換えにより
  - 実験装置自体が小型化できた。
  - 水銀流出の心配が無いので、加熱できる温度範囲が広がった。

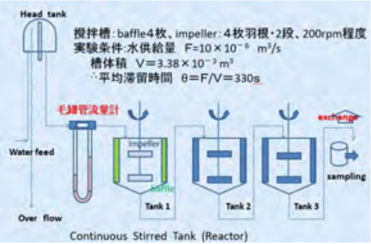
# 温度センサーと圧力センサー (3)

- 以下は、丁寧な実験を行ったグループの結果である。
- メタノールとエタノールの２つの物質について実験をして、いずれもアントワン式によく当てはまる結果を得ている。



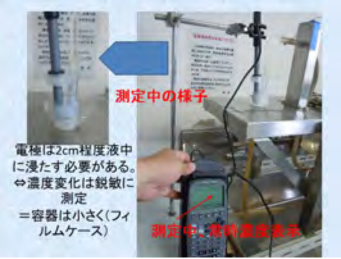
# 塩素イオンセンサーの利用

- 化学プラントの反応器の性質に「完全混合流れ」がある。
- それは、濃度の異なる液体を槽に流入させると、槽全体が瞬間的に攪拌混合されて均一濃度になり、槽から出る流れの濃度は、槽内の濃度に等しい流れになる。
- そのことを確かめるために、
  - 同じ容積の容器 3 槽をチューブで直列に連結。
  - 同一濃度のチオ硫酸ナトリウム液で満たす。
  - 片側の槽に一定の流量で水を供給。
  - 端の槽から出る液体の濃度低下を測定する。
  - 2 分ごとに 5cc を採取して濃度変化を測定。



# 塩素イオンセンサーの利用 (2)

- 槽内の液体を食塩水に変更。
- 供給する水を、イオン交換水に変更。
- 塩素イオンセンサーを利用して、濃度を自動測定。
- 塩素イオンセンサーは、
  - 電圧 $(E)$ の変化による濃度 $(C)$ を、$C = A \times B^E$ により判定する。
  - 1.8〜35500ppm の濃度を測定。
  - $A, B$ の値は、事前に 1000pppm と 10ppm の 2 液を用いて決定する。




- この変更で
  - 毒物であるヨウ素を使わなくてすんだ。
  - 2 分間隔のサンプリングが不要になり、2 日に分けて行った実験が 1 日で終わった。
  - 工場での工業計測と同じスタイルで測定できた。

# 粉末の粒度分布の測定

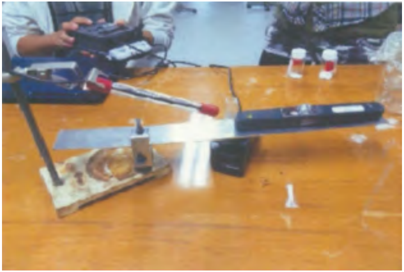
- 物質化学工学専攻の専攻科の学生に、「粉末の粒度分布」に関する簡便な測定方法を検討させた。
- 従来の粉末の粒度分布の測定は
  - 粉末を溶媒に分散させてレーザーを照射する。
  - 粒子径により散乱光量や散乱パターンが異なる。
- この方法では
  - 水に溶ける粉末は測定できないので
  - 試料と溶媒の組合せを検討する必要がある。
- 粉末のまま粒度分布に関する情報の取得方法を検討させた。
- 事前情報として、下記を伝えた。
  - CBL2 を利用するといろいろなセンサーが利用できる。
  - 光センサー、角度センサーもある。
  - レーザー光としてレーザーポインターが利用できる。

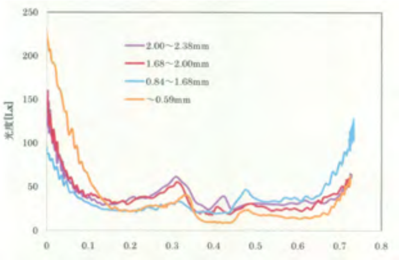
# 光センサーと角度センサーの利用

- 文献調査によると、レーザー照射すると、
  - 粒子の大きさにより散乱光量にパターンの違いがあり、
  - 角度依存性がある。
  - 粒子径が大きいほど全周方向に散乱強度が強く、特に前方方向への散乱強度が強い。
  - 粒子径が小さくなるにつれ、全体的に散乱強度が弱まり、前方散乱光も弱まる。
- 与えられた機器で、この角度依存性を確かめるために、学生達は次のような装置を考案した。
  - レーザーポインターを固定する。
  - レーザーポインターの先に試料を置いて、レーザーポインターと一緒に回転させる。
  - 角度センサーで回転角を測定する。
  - 外部に固定した光センサーで、回転する試料からの散乱光量を測定する。

# 実験装置と測定結果

- 角度センサーは、0°～360° を 0 ～ 1 の値で測定する。
- レーザーポインターの波長は 635nm、出力は 1mW を用い、光センサーの感度は 0～600 lux で測定した。
- CBL2 を利用することで、角度と散乱光量の 2 つのデータを同時取得できる。
- 試料としては、砂粒とカニキチン粉末を使用し、粒径により 4 種類に分別して測定した。

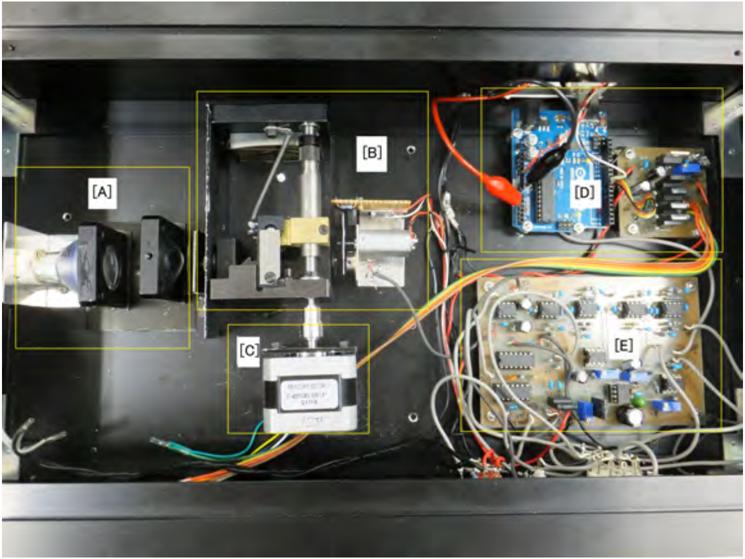




# 近赤外分光器と汎用の光センサー

- 近赤外分光器は、
  - 成分分析や品質管理等の多方面で使用されている。
  - 製品化されているものは、高価格 (数百万円)。
  - 基本的な構造は、近赤外光を当てて、
    透過または反射する光を測定するだけである。
- 光の波長領域を限定すれば、低価格でも作成可能。
  - 20W のハロゲン電球と、市販されている PbS 光センサー。
  - ロックインアンプは市販品。
  - PC で制御することで安価 (数十万程度) で作成できた。
- さらに、PC をグラフ電卓に置きかえる。
  - 分光器の制御にはマイコン (Arduino) を使用。
  - マイコンにプログラムを書き込む時は、PC を使用。
  - 外部スイッチを利用して、測定開始を指示する。
  - PbS 光センサーの信号を増幅して、グラフ電卓の電圧センサーで信号を取得する。

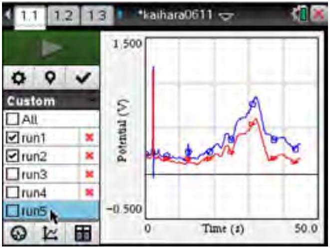
# 試作した近赤外分光器の内部



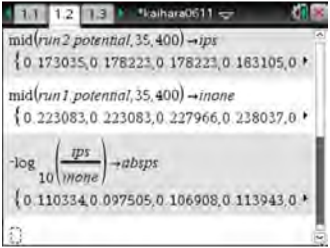
# グラフ電卓 Nspire の表示画面

電圧の表示

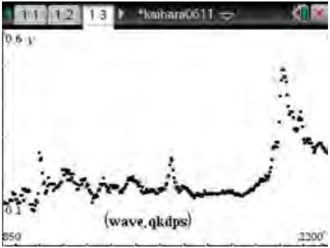

取得したデータのグラフ




吸光度の計算




吸光度のグラフ



# グラフ電卓で可能になる工学実験

- センサーを利用することで、
  - 実際の工場と類似した形でデータが収集できる。
  - データ収集のための煩雑な単純作業が省力化された。
  - データの取得範囲を拡大できる。
- 一連のプロセスの時間的変化が数値で記録されることから
  - 変化の「見える化」に有効である。
  - 記録に残ることで、何が、いつ、どのように変化すかを、実験後に分析することができる。
- 多様なセンサーを活用することで、
  - 学生の自由な発想を生かした実験作りが可能になる。
  - 基本原理にもとづいて、いろいろな分析機器を学生に試作させることも可能と思われる。

# センサーの概要

- 今回、各高専向けに用意したセンサーの概要は、下記の通り。
- Lab Cradle　(白い段ボール箱)
  - これは、TI-Nspire 用のデータ収集器。
  - USB で充電して利用する。電池消耗度が高いので気をつける。
- CBR2　(白い段ボール箱)
  - これは、超音波による距離測定器。測定距離は 15cm〜6m。
  - 単 3 乾電池が 4 本必要。奥の乾電池は取り出しにくい。
  - Nspire には、直接接続することができる。
  - 測定対象は、大きくて反射しやすいもの。
  - 測定物周辺の、反射しやすい物体はどけておく。
- CBL2　(白い段ボール箱)
  - これは、TI-89 用のデータ収集器。
  - 単 3 乾電池 4 本必要。電池の消耗度が早いので気をつける。
  - 黒いプラスチックが入っているが、TI-89titanium と一緒に利用するときのもの。

## センサーの概要 (2)

- CBL2 に同包されているセンサー
  - CBL2 の箱には、3 つのセンサーが同包されている。
  - 熱センサー、光センサー、電圧センサー
  - Lab Cradle に接続すると、Nspire でも利用できる。
- 力センサー DFS-BTA　(薄茶の段ボール箱)
  - 加えた力を測定できます。
- 角度センサー RMV-BTD　(薄茶の段ボール箱)
  - $0°\sim306°$ の角度を $0\sim1$ の数値で表示する。
  - 回転運動を扱うとき便利。
  - 振り子の根元に配置して、距離センサーと併用。
- 音センサー MCA–BTA　(ビニールの袋)
  - 音の音圧を電圧の高低として表示する。
- 電流センサー DCP–BTA　(ビニールの袋)
  - 電流の強さを測定できる。

# CBL2 の利用

- TI-89 によりセンサーを利用するには CBL2 を用いる。
- CBL2 を利用するには
  - TI-89 と CBL2 をケーブルで接続する。
  - CBL2 の「TRANSFER」を押す。
  - 接続された機器を自動判別して、データ収集のための適切なプログラムが TI-89 に転送される。
  - 転送が終わると「ビープ」が鳴る。
- センサーによるデータ収集を行うには
  - センサーを CBL2 に接続する。
  - アナログとデジタルを間違えないようにする。
  - データ収集のプログラムを datamate() という。TI-89 側の計算画面 (HOME 画面) で「datamate()」を実行する。
  - それなりの時間を待つと、センサーからの信号が表示されて、下段に操作メニュー (メイン画面) が現れる。

# CBL2 の利用 (2)

- データ収集のタイミングを確認するには
  - 「1: Setup」を押す。
  - 「Select Mode」が表示されるので、「2: TIME GRAPH」を選択する。
  - 設定状況が表示される。変更するのであれば「2: CHANGE TIME SETTINGS」を選択する。
  - データ測定の時間間隔と測定データの個数を指定する。それにより、測定時間が自動的に決定される。
  - 指定が終わったら、「1: OK」を押して前の画面に戻る。
  - 「1: OK」を何度か押して最初のメニュー画面にまで戻る。
- データを収集するには、メイン画面で「2: Start」を押す。
  - ビープ音とともに収集が始まり、グラフが表示される。
  - 収集が終わるとビープ音がなり、グラフ範囲が最適化される。
  - ENTER を押すと、メイン画面に戻る。
- 他の詳細は、お渡ししたマニュアルを見てください。

# グラフアートのファイル処理

- グラフアートの作品を教員側の TI89 にコピーするには、
  - 学生側の TI89 で、ファイルを保存する。
  - TI89 どおしをケーブルで繋いで、教員側の TI89 に転送する。
- グラフアートのファイルを保存するには (学生側 TI89)
  - 作品が表示されている画面で F1 2 を押す。
  - [Type] で [GDB] を選択すると作品の全情報が保存される。
    つまり、個々の関数に対する指定や、画面フォーマットに関する全情報が保存される。
  - [Type] で [Picture] を選択すると表示画像だけが保存される。
    画像だけが保存され、関数に関することは保存されない。
  - [Variable] の箇所には、適当なファイル名を入れる。
  - 学生には、[GDB] と [Picture] の両方のタイプで保存させる。
    同じ名前は受け付けないので、ファイル名を微妙に変える。
    たとえば、[GDB] では apple、[Picture] では applep とする。
    学生の学科と出席番号をファイル名としてもよい。

# グラフアートのファイル処理 (2)

- 教員側 TI89 への転送は、2 つの TI89 をケーブルで繋いで
  - 教員側の TI89 で、

    2nd – (VAR-LINK) を押す。

    F3 で「2: Receive」を選択して、受信モードにする。
  - 学生側の TI89 で、

    2nd – (VAR-LINK) を押す。

    転送するファイルを選択して F4 ( √) を押す。
    「apple GDB」と「applep PIC」を選択する。

    F3 で「1: Send」を選択すると、ファイルが転送される。
- 学生一人一人について、以上の操作を行うことになる。
- 学生に問題演習などを行わさせている間に行うと、40 人クラスでも 10 分程度でコピーが終わる。
- このファイルをパソコンに保存するには、TI-Connect を PC にインストールする。使い方は、「TI-89 操作マニュアル」の第 14 章にあります。

# 教室での Nspire の利用

- Nspire は台数限定なので、教員の演示用として利用する。
- 教室でプロジェクターを通して投影するには
  - TI-Nspire CX CAS Student Software が必要。
  - Nspire のファイル (tns) を保存して PC 側にペーストする。
  - PC 側の Nspire で、ペーストされたファイルを実行する。
- 演示用の教材を作るには、
  - TI の Activities を参照しながら自分で作成する。
    https://education.ti.com/en/timathnspired/us/home
    または、DL したファイルをそのまま実行する。
  - その Activities は、Nspire のファイルとして DL できる。
  - ZIP ファイルで DL されるので解凍する。
    tns ファイルと、それを解説する PDF ファイルからなる。
    学生に配布用のプリントが含まれる場合もある。
  - 必要なら、その tns ファイルを修正してから実行する。
  - 演示用の場合は、Nspire にペーストする必要はない。

# Nspire のスライダーの利用

- Nspire には「スライダー」の機能があり、
- 式の係数を次々に変えてグラフを表示できる。
  - グラフ画面で、 menu [1: Action]⇒[B: Insert Slider]
  - スライダー変数の文字や範囲を適当に変更する。
  - 下の方にある Minimized にチェックを入れる。
  - 関数の定義式に、スライダー変数を含める。
  - スライダー変数の初期値のグラフが表示される。
  - ▶ ◀ を押すごとにスライダー変数の値が変わりグラフも変わる。
- スライダー変数
  - 範囲変更は、カーソルをスライダーにあてて ctrl menu を押す。
  - 削除は、カーソルをスライダーにあてて del を押す。