

微積 (I)–関数の極限值 (p1-4)–

クラス _____ 番号 _____ 氏名 _____

定義

関数 $f(x)$ において、 x が a とは異なる値を取りながら限りなく a に近づくと、その近づき方によらず $f(x)$ の値が一定の値 l に限りなく近づけば、 x が a に近づくと $f(x)$ は l に収束するという。このことを記号で、

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow l \text{ または } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

と表し、 l を x が a に近づくときの $f(x)$ の極限值という。

関数の極限

1 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ について考える。 $x \rightarrow 1$ のとき分子 $x^2 - 1 \rightarrow 0$ 、分母 $x - 1 \rightarrow 0$ である。

このとき、 $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ はどんな値に近づきだろうか。

- (1) \blacklozenge $\boxed{F1}$ (Y=) で関数の定義画面に移る。何か関数が定義されているときは $\boxed{F1}$ 8 \boxed{ENTER} を押してすべて削除する。 $y1$ の個所にカーソルがある。 \boxed{ENTER} (または $\boxed{F3}$) を押して入力行に移り、 $y1 = x^2 - 1$ として \boxed{ENTER} を押す。同様にして $y2 = x - 1$ とする。
- (2) \blacklozenge $\boxed{F3}$ (GRAPH) によりグラフを表示させよ。なお、前に使用した人によりグラフの設定が変更されている場合があるので、 $\boxed{F2}$ 6 を押して標準のグラフ画面とする。グラフの形を (4) の個所にメモしておく。
- (3) $x = 1$ の近くを調べるため、グラフを拡大する。 $\boxed{F2}$ 2 とするとカーソルが点滅する。カーソルパッド (\blacktriangleright , \blacktriangleleft , \blacktriangleup , \blacktriangledown) で x 軸上の点 (1, 0) の近くに移動して \boxed{ENTER} を押す。同じ手順で、何度か拡大してみよ。
- (4) 2 つのグラフの形をメモしておけ。最初のグラフと比べてどのようなことに気づくか。
(最初のグラフ) (拡大後のグラフ)
- (5) グラフの y 座標について調べてみる。グラフ画面の状態 $\boxed{F3}$ (Trace) を押せ。カーソルがグラフ上で点滅し、その点の座標 (xc, yc) が入力行の上に表示される。右上には、どの関数のグラフ上にあるかの番号が表示される。 \blacktriangleright , \blacktriangleleft によりグラフ上を動いてみよ。 $x \rightarrow 1$ につれ y 座標 (yc) はどのように変化していくか。
- (6) \blacktriangleup , \blacktriangledown を押すと、2 つのグラフ間を移動できる。2 番目のグラフ ($y2 = x - 1$) に移れ。 \blacktriangleup , \blacktriangledown により、同じ x 座標に対応する y 座標がどう違うかを調べよ。 $x \rightarrow 1$ につれ、 $y1/y2 = (x^2 - 1)/(x - 1)$ の値はどのように変わっていくか。
- (7) \boxed{ESC} を押して Trace モードから抜ける。今度は \blacklozenge $\boxed{F5}$ (TABLE) を押せ。2 つのグラフの x, y 座標が表で表示される。 \blacktriangleup , \blacktriangledown で表示されている以外の部分も見ることができる。
- (8) x の値の開始位置と刻み幅を変えるため \blacklozenge $\boxed{F4}$ (TblSet) を押す。tblStart:1, Δ tbl: 0.01 に変更せよ。 \blacktriangleup , \blacktriangledown で項目間を移動できる。変更を終えたら、 \boxed{ENTER} を 2 回押す。 $y1/y2$ の値はどのように変わっていくかを予想せよ。次に、 Δ tbl: 0.001 にして、その予想を確かめよ。

[予想] $x \rightarrow 1$ につれ、 $\frac{y1}{y2} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ は _____ に近づいていく。

- (9) \blacklozenge $\boxed{F1}$ で $y3 = \frac{y1(x)}{y3(x)}$ として、 \blacklozenge $\boxed{F5}$ とせよ。 $y3$ の個所に $y1/y2$ の値が表示される。
- (10) 以上のことから、分かったこと、気づいたことを書いておきなさい。

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ を考える。 $\boxed{1}$ と同様にして、 $x \rightarrow \infty$ のとき $y1 = 2x^2 - 3x + 1, y2 = x^2 + 1$ として $y1/y2$ の値の変化を調べる。

- (1) \blacklozenge $\boxed{F1}$ で関数を定義後は $y3$ のチェック印 \checkmark を $\boxed{F4}$ ではずす。 \blacklozenge $\boxed{F3}$ として $\boxed{F2}$ 6 で標準画面に戻す。
- (2) \blacklozenge $\boxed{F2}$ で表示するグラフの範囲を指定できる。xmin=-2, xmax=10, ymin=-2, ymax=20 とせよ。 \boxed{ENTER} か \blacktriangleup , \blacktriangledown で項目間の移動ができる。変更したら \blacklozenge $\boxed{F3}$ とせよ。グラフの形を (3) の個所に書いておく。
- (3) $x \rightarrow \infty$ の状態を知りたいので、 \blacklozenge $\boxed{F2}$ で xmax=100, ymax=10000 として \blacklozenge $\boxed{F3}$ としてみよ。xmin=100, xmax=200, ymin=10000, ymax=40000 として \blacklozenge $\boxed{F3}$ とするとどうか。グラフの形状や気づいたことを書いておきなさい。
(ymax=20 のとき) (ymax=10000 のとき) (ymax=40000 のとき)
- (4) \blacklozenge $\boxed{F5}$ とすると座標が表で表わされる。 \blacklozenge $\boxed{F4}$ で tblStart: 0, Δ tbl: 1000 として \blacklozenge $\boxed{F5}$ とせよ。値が「2.42E8」は、 2.42×10^8 のことである。 \blacktriangleright , \blacktriangleleft で左右に移動でき、黒く反転している個所の詳しい値が入力行に表示される。 x の値は 1000 刻みに変わる。 \blacktriangledown で x の値を増やしていくと、 $y1/y2$ の値はどのように変わるか。
- (5) \blacklozenge $\boxed{F1}$ で $y3$ に \checkmark をつけ ($\boxed{F4}$ を利用)、 \blacklozenge $\boxed{F5}$ とせよ。 $y3 = y1/y2$ の値が表示される。
- (6) 以上のことから分かったこと、気づいたことを書いておきなさい。

3 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ について、 $y1 = \sqrt{x^2 + 1}, y2 = x$ として、同様のことを調べてみよ。次のことに注意せよ。関数定義のとき $y3$ は $y3 = y1(x) - y2(x)$ として、最初は \checkmark を $\boxed{F4}$ によりはずしておく。 \blacklozenge $\boxed{F3}$ の最初のグラフでは $\boxed{F2}$ 6 で一旦標準画面に戻す。 $x \rightarrow \infty$ のときを知りたいので \blacklozenge $\boxed{F4}$ の Δ tbl の値は大きくとる。
 $x \rightarrow \infty$ のとき $y1$ も $y2$ も ∞ になるが、値は _____ に近づいていくことが理解できたか。

4 微積の時間は、このような形で数式処理電卓を利用しながら授業を行いたいと思っています。この電卓を利用した授業についてどのような印象を持ちましたか。