《関数》基本的な関数のグラフと、その性質

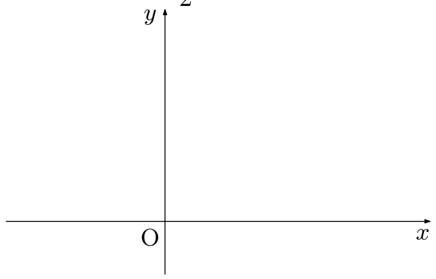
クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

基本的な関数のグラフ

1　これまでに学んだ、基本的な関数のグラフを復習する。次の各関数のグラフがどのようになるかを描け。どのグラフがどの関数のものであるか分かるように、①,②,③などをグラフに書き入れよ。そして、係数の大小や符号によりグラフがどのように変化するかを確認し、式の形とグラフの形状の特徴について、各自の理解した内容を書きとめよ。

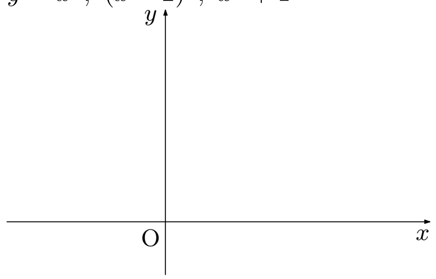
グラフが分からないときは数ナビを利用してよい。数ナビに描かせるには、それぞれを ♦ F1 の $y1, y2, y3$ に定義して ♦ F3 とすればよい。必要に応じて、グラフの範囲は ♦ F2 で見やすいように変更せよ。また、各自の判断で指定された以外の値の場合についても試みよ。

(1) $y = x^2,\ 2x^2,\ \dfrac{x^2}{2}$



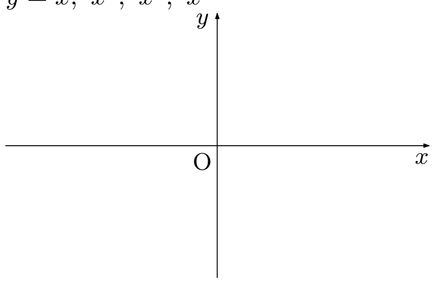
$y = ax^2$ で a を変えるとグラフはどう変わるか？

(2) $y = x^2,\ (x-2)^2,\ x^2+1$



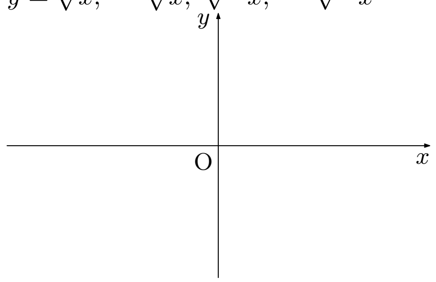
$y = (x-p)^2 + q$ で p, q はどのような意味を持つか？

(3) $y = x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$



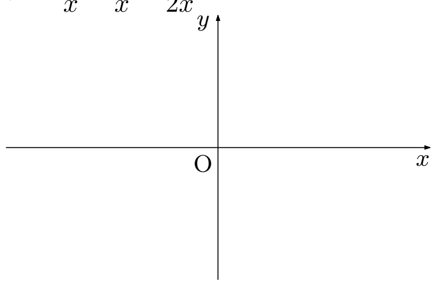
$y = x^n$ のグラフは n の値でどう変わるか？

(4) $y = \sqrt{x},\ -\sqrt{x},\ \sqrt{-x},\ -\sqrt{-x}$



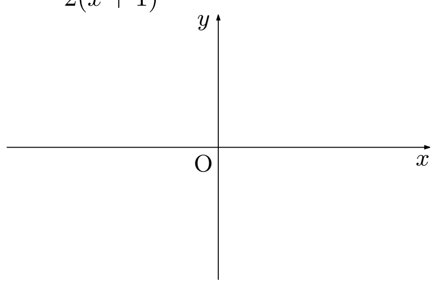
$y = k\sqrt{ax}$ のグラフは a, k の符号で、どう変わるか？

(5) $y = \dfrac{1}{x},\ \dfrac{2}{x},\ \dfrac{1}{2x}$



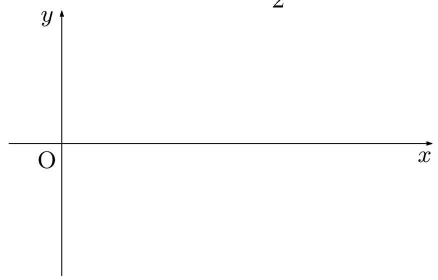
$y = \dfrac{k}{x}$ のグラフは k の値でどう変わるか？

(6) $y = \dfrac{1}{2(x+1)} + 2$



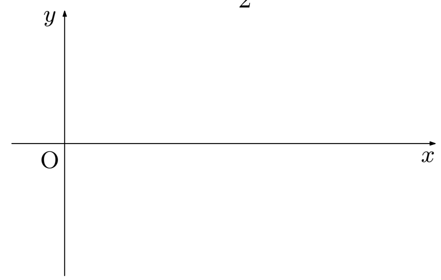
$y = \dfrac{k}{x-p} + q$ のグラフは k, p, q の符号で、どう変わるか？

(7) $y = \sin x,\ \sin 2x,\ \sin\dfrac{x}{2}$



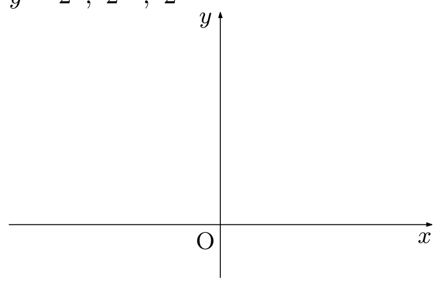
$y = \sin kx$ は k の大小でどう変わるか？

(8) $y = \cos x,\ 2\cos x,\ \dfrac{1}{2}\cos x$



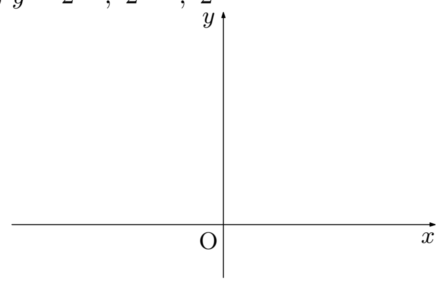
$y = k\cos x$ は k の大小でどう変わるか？

(9) $y = 2^x,\ 2^{2x},\ 2^{\frac{x}{2}}$



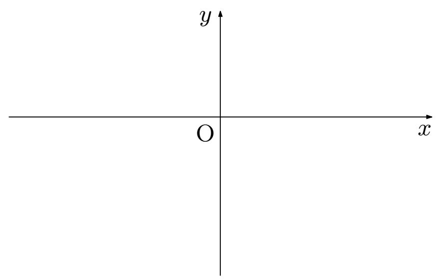
$y = 2^{kx}$ は k の大小でどう変わるか？ $x = 0$ の前後の大小関係に注意せよ。

(10) $y = 2^{-x},\ 2^{-2x},\ 2^{-\frac{x}{2}}$



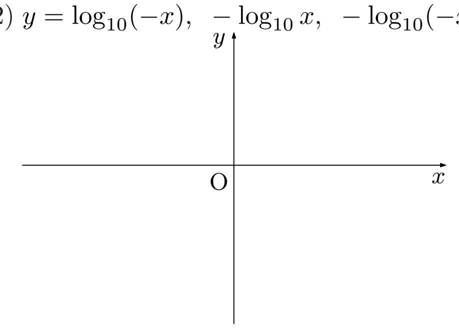
$y = 2^{-kx}$ は k の大小でどう変わるか？ $x = 0$ の前後の大小関係に注意せよ。

(11) $y = \log_{10} x,\ \log_{10}(x+1),\ \log_{10}(x-1)$



$y = \log_{10}(x-p)$ は p の値でどう変わるか？漸近線に注意せよ。

(12) $y = \log_{10}(-x),\ -\log_{10} x,\ -\log_{10}(-x)$



$y = k\log_{10}(ax)$ は k, a の符号でどう変わるか？

関数 $f(x)$ の定義

数ナビに関数 $f(x)$ を定義することができる。$f(x)=x^2$ を定義するには、基本画面 ($\boxed{\text{HOME}}$) で x^2 $\boxed{\text{STO}}$ $f(x)$ $\boxed{\text{ENTER}}$ とする。f は $\boxed{\text{alpha}}$ を利用する。あるいは、 $\boxed{\text{F4}}$ 1 を利用して、Define $f(x)=x^2$ $\boxed{\text{ENTER}}$ としてもよい。下の行 (入力行) で、$f(2)$ $\boxed{\text{ENTER}}$ や $f(3/2)$ $\boxed{\text{ENTER}}$ として、4 や 9/4 が表示されることを確認せよ。

$\boxed{2}$ $f(x)=x^2$ が定義済みとする。 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ で関数定義画面にいき、 $\boxed{\text{F1}}$ 8 $\boxed{\text{ENTER}}$ で前の関数をすべて削除する。$y1=f(x),\ y2=f(x-2),\ y3=f(x)+1,\ y4=f(x-2)+1$ として $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F3}}$ でグラフ表示させ $\boxed{\text{F2}}$ 4 とする。$y1,\ y2,\ \cdots$ の番号順にグラフが描画される。どの関数がどのグラフであるかを確認せよ。

確認したら、 $\boxed{\text{HOME}}$ を押して基本画面に戻り、 $\boxed{\text{STO}}$ を利用していろいろな関数 ($x^3,\ \sqrt{x}$ など) を $f(x)$ に定義し、 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F3}}$ で $y1, y2, y3, y4$ のグラフを描画させよ。

以上のことから、$y=f(x)$ のグラフと $y=f(x-p),\ y=f(x)+q,\ y=f(x-p)+q$ のグラフとはどのような関係にあるか。

$y=f(x-p)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを

$y=f(x)+q$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを

$y=f(x-p)+q$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを

$\boxed{3}$ 基本画面 ($\boxed{\text{HOME}}$) で、x^2-2x $\boxed{\text{STO}}$ $f(x)$ $\boxed{\text{ENTER}}$ とする。$f(x)=x^2-2x$ が定義された。$\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ で $y1=f(x),\ y2=-f(x),\ y3=f(-x),\ y4=-f(-x)$ としてグラフを表示させよ。ここでの「$-$」は $\boxed{(-)}$ を利用。どの関数のグラフが、どのように表示されるかを確認せよ。

確認できたら、それ以外の関数を $f(x)$ に定義して同様にせよ。

以上のことから、$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(x),\ y=f(-x),\ y=-f(-x)$ のグラフとはどのような関係にあるか。

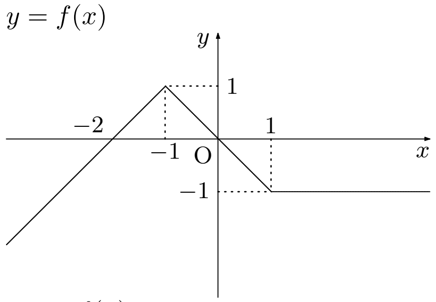
$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを

$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを

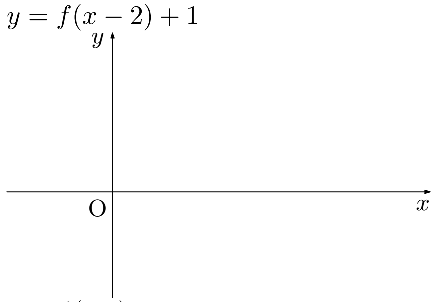
$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを

$\boxed{4}$ $y=f(x)$ のグラフが (1) のようであるとき、(2)〜(4) の関数のグラフを描け。

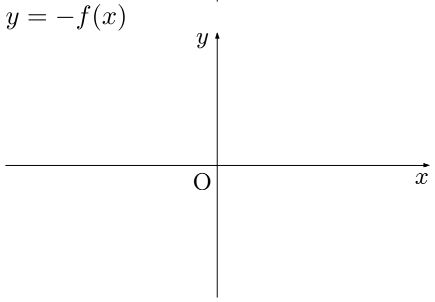
(1) $y=f(x)$



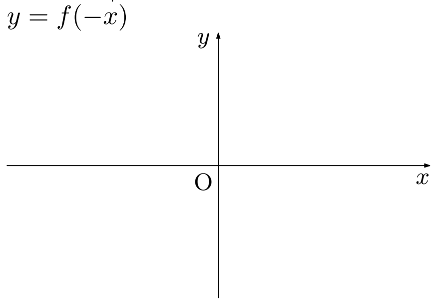
(2) $y=f(x-2)+1$



(3) $y=-f(x)$

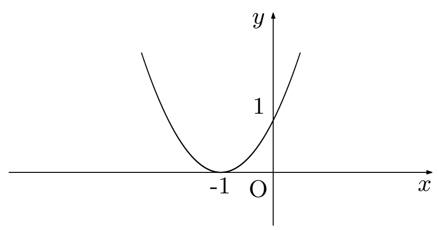


(4) $y=f(-x)$

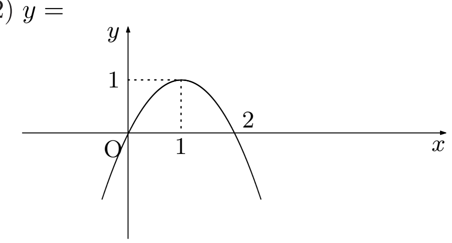


$\boxed{5}$ 次のグラフは、どのような関数のグラフか。関数の式をかけ。

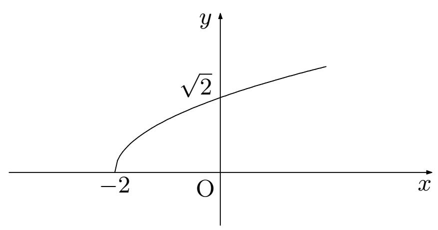
(1) $y=$



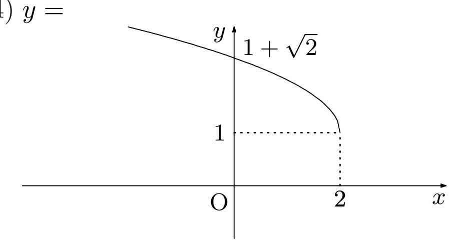
(2) $y=$



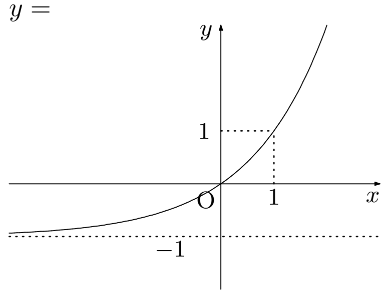
(3) $y=$



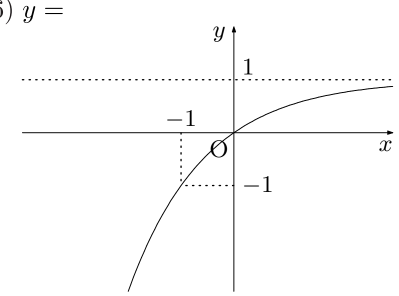
(4) $y=$



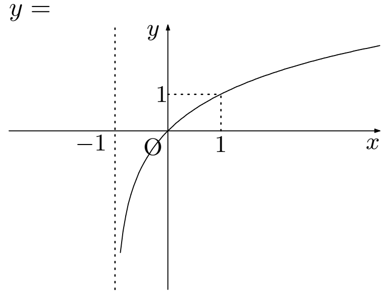
(5) $y=$



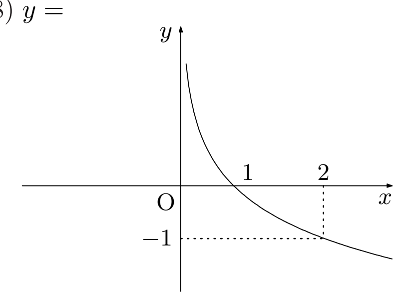
(6) $y=$



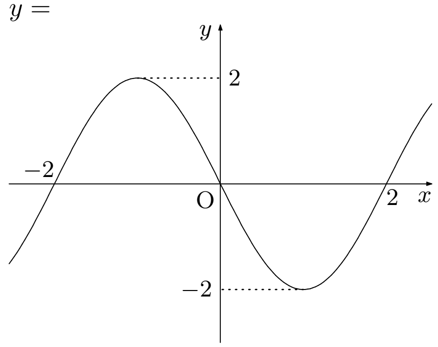
(7) $y=$



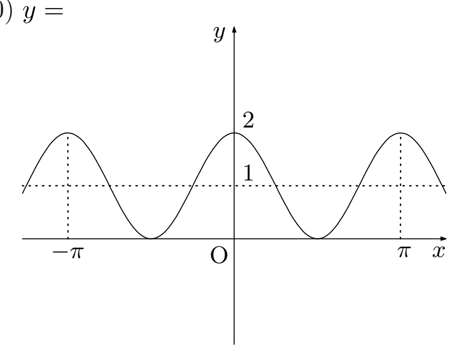
(8) $y=$



(9) $y=$



(10) $y=$



《関数》関数 $f(x)$ のグラフと座標軸との交点

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の空欄を埋めよ。

関数	$x \to p, y \to q$ だけ平行移動	x 軸に関する対称移動	y 軸に関する対称移動
$y = f(x)$			
$y = ax + b$			
$y = ax^2$	$y = a(x-p)^2 + q$	$y = -ax^2$	$y = a(-x)^2 = ax^2$
$y = ax^n$			
$y = \dfrac{a}{kx}$			
$y = \sqrt{kx}$			
$y = a^{kx}$			
$y = \log_a kx$			
$y = a \sin kx$			
$y = a \cos kx$			

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフを自分でかけ。x 軸や y 軸との交点があれば、その座標も求めよ。y 軸との交点は $x = 0$ のときの y の値を求めればよく、x 軸との交点は $y = 0$ となる x の値を求めればよい。数ナビで x 軸との交点を確認するには、グラフ画面で $\boxed{\text{F5}}$ 2(Zero) を利用する。

(1) $y = 1.2x - 2.4$

(2) $y = -x^2 + 2x + 2$

(3) $y = \dfrac{2}{x+2} - 1$

(4) $y = \sqrt{4 - 2x} - 1$

(5) $y = 2^{-x} - 4$

(6) $y = \log_2(-(x-4)) + 1$

$\boxed{3}$ 数ナビの基本画面 $\boxed{\text{HOME}}$ で、関数 $f(x) = 2x + 1$ を定義せよ。$2x + 1$ $\boxed{\text{STO}}$ $f(x)$ $\boxed{\text{ENTER}}$ とすればよい。$f(3)$ $\boxed{\text{ENTER}}$ では $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ が表示される。次の値を自分で計算し、数ナビで確認せよ。

(1) $f(4)$

(2) $4f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} f(4)$

(3) $f(x-1)$

(4) $f(2k+1) - f(2k-1)$

$\boxed{4}$ $f(x) = 2x - x^2$ とする。次式を自分で計算せよ。

(1) $2f(u)$

(2) $f(2u)$

(3) $f(x+1) - f(x-1)$

(4) $f(x+h) - f(x)$

(5) $f(f(x))$

《関数》関数 $f(x)$ のグラフと数値

クラス______ 番号______ 氏名____________________________

1 関数 $y=f(x)$ として、以下のものを考える。

① $y=ax+b$, ② $y=ax^2+bx+c$, ④ $y=\dfrac{a}{k(x-p)}+q$, ④ $y=a\sqrt{k(x-p)}+q$,
⑤ $y=K\cdot a^{k(x-p)}+q$, ⑥ $y=a\log_{10}k(x-p)+q$, ⑦ $y=a\sin k(x-p)+q$,
⑧ $y=a\cos k(x-p)+q$

このとき、次の条件をみたす関数は、どのタイプの関数か。あてはまる関数の番号をすべてかけ。

(1) 定義域が実数全体である

(2) y の値を定義できない x がある

(3) 値域が実数全体である

(4) つねに $y>C$ か、または $y<C$ である

(5) 漸近線を 1 本持つ

(6) 漸近線を 2 本持つ

(7) 増加する箇所と減少する箇所がある

(8) つねに増加か、つねに減少である

(9) 最大値か最小値の一方だけがある

(10) 最大値と最小値の両方がある

(11) 最大値も最小値も存在しない

(12) y は、一定の周期で同じ値を繰り返す

2 次の条件をみたすような関数を、具体的に 1 つ作れ。

(1) つねに $y\leqq 1$ である

(2) $x=-1$ のとき、y の値は定義されない

(3) x が大きくなるにつれ、y は 1 に近づく

(4) x が大きくなるにつれ、y は緩やかに増加

(5) x が大きくなるにつれ、y は急激に減少する

(6) x が大きくなるにつれ、y は緩やかに減少

(7) $x\geqq 1$ で定義され、x の増加につれ y は増加

(8) $x<-1$ で定義され、x の増加につれ y は減少

(9) $x=2$ を漸近線にもつ

(10) $y=-1$ を漸近線にもつ

3 次の表は、関数 $f(x),\ g(x),\ h(x)$ の値である。この表をもとにして、次の問に答えよ。
ただし、これらの関数は、実数全体で定義されているものとする。

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8
$g(x)$	7	5	3	1	-1	-3
$h(x)$	32	16	4	2	1	0.5

(1) $f(3)$ の値をかけ。

(2) $g(-2)$ の値をかけ。

(3) $f(g(2))$ の値をかけ。

(4) $g(f(2))$ の値をかけ。

(5) $f(g(h(2)))$ の値をかけ。

(6) グラフが x 軸と交わるのは、どの関数か。

(7) $y=-g(x)$ の場合の表をかけ。

x	-2	-1	0	1	2	3
$-g(x)$						

(8) $y=g(-x)$ の表をかけ。

x	-3	-2	-1	0	1	2
$g(-x)$						

(9) 1 次関数はどれか。その式も求めよ。

(10) 2 次関数はどれか。その式も求めよ。

(11) 残りの関数は、どのような関数か。

4 $f(x)=x^2-1,\ g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2-1}$ とする。

(1) 次の表をうめよ。

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
$f(x)$							
$g(x)$							

(2) 数ナビで、$f(x)=x^2-1$ を定義し、$y1=f(x),\ y2=1/f(x)$ とせよ。 ⧫ F5 で、これらの値の変化を調べよ。必要に応じて、 ⧫ F4 で、tblstart、Δtbl の値を変更せよ。たとえば、Δtbl を 0.1 や 0.01 にしてみよ。変更後は ENTER を 2 回押すこと。$x=\pm 1$ の近くは、どのような状況になっているか。

(3) $y=f(x)$ のグラフをかき、それを元に、自分で $y=\dfrac{1}{f(x)}$ のグラフをかけ。

(4) $f(x)=\sin x$ として、$y=\dfrac{1}{f(x)}$ のグラフがどのようになるかを考えよ。

《関数》学年末試験の対策問題

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の関数のグラフと x 軸との交点の座標を求めよ。　($y=0$ となる x を求めればよい。)

(1) $y=-3x+4$

(2) $y=2x^2+x-2$

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}+2$

(4) $y=\dfrac{-2}{x-2}+1$

(5) $y=\sqrt{x+3}-2$

(6) $y=-\sqrt{4-2x}+1$

(7) $y=2^x-4$

(8) $y=-2^{x+1}+3$

(9) $y=\log_2 x-2$

(10) $y=-\log_2(x+1)+3$

(11) $y=2\sin x-1$

(12) $y=-2\cos 2x+1$

2 次の関数のグラフをかけ。① x, y 軸との交点があるときは、その座標も求めること。② 漸近線を持つときは、漸近線も書き込むこと。

(1) $y=x^2-4x+2$

(2) $y=\dfrac{-1}{x+3}+2$

(3) $y=-\sqrt{x+2}+3$

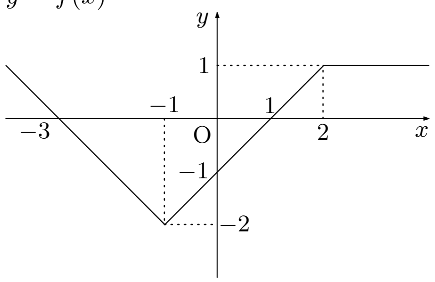
(4) $y=-2^x+3$

(5) $y=\log_2(x+2)+1$

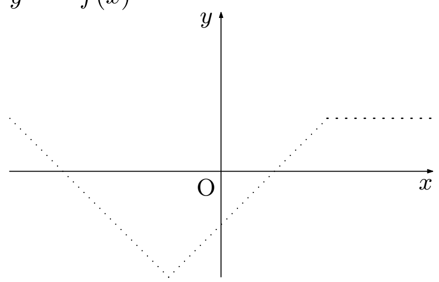
(6) $y=-2\sin\dfrac{x}{2}+1$

$\boxed{3}$ 関数 $y = f(x)$ のグラフを (1) とするとき、(2)〜(8) の関数のグラフをかけ。

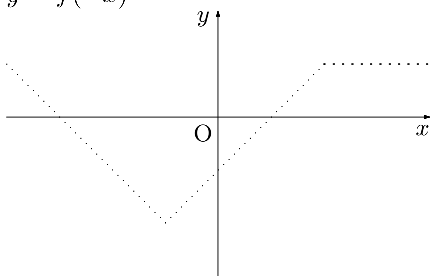
(1) $y = f(x)$



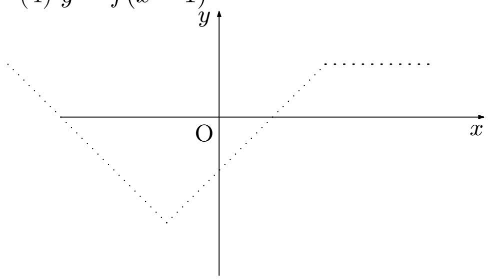
(2) $y = -f(x)$



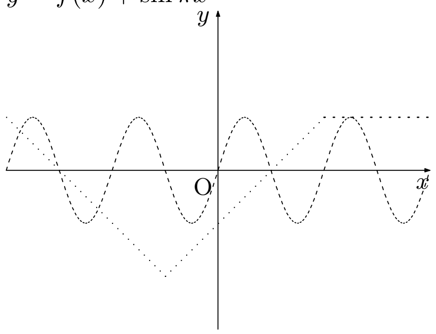
(3) $y = f(-x)$



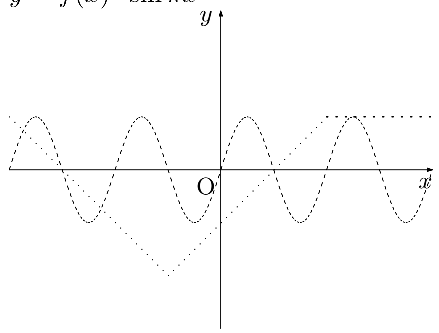
(4) $y = f(x-1)$



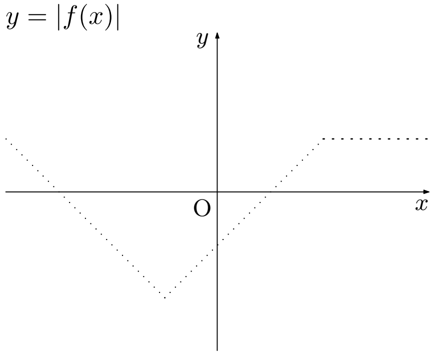
(5) $y = f(x) + \sin \pi x$



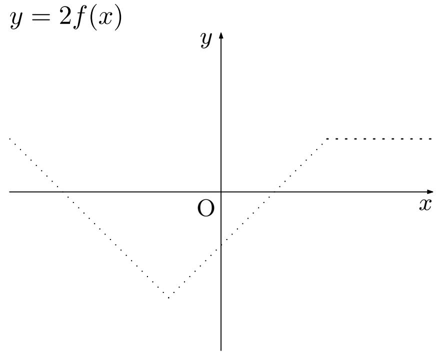
(6) $y = f(x) \cdot \sin \pi x$



(7) $y = |f(x)|$



(8) $y = 2f(x)$



$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ に対して $f(\blacksquare)$ は、$f(x)$ の x の箇所を■で置きかえたものである。

例1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ のとき $f(-x+1)$ は、$f(-x+1) = \dfrac{-x+1}{(-x+1)^2+1} = \dfrac{-x+1}{x^2-2x+2}$

次のような関数 $f(x)$ に対して、指定されたものを求めよ。

(1) $f(x) = -3x+2$ のとき、$f(h) + f(1-h)$　　(2) $f(x) = 1 - x^2$ のとき、$f(1+h) - f(1-h)$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ のとき $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$　　(4) $f(x) = \sqrt{2-x}$ のとき $f(2-x)$

$\boxed{5}$ $y = -2(x+2)^2 + 3$ のグラフは、$y = 2x^2$ のグラフを x 軸に関して対称移動して $(y = -2x^2)$、それを x 軸方向に -2、y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。次の関数のグラフは、括弧内の関数のグラフをどのように対称移動や平行移動すれば得られるか。

(1) $y = -\dfrac{2}{x-3} + 1$　　$\left(y = \dfrac{2}{x}\right)$　　(2) $y = \dfrac{2}{2-x} - 3$　　$\left(y = \dfrac{2}{x}\right)$

(3) $y = \sqrt{2x+4} - 1$　　$(y = \sqrt{2x})$　　(4) $y = -\sqrt{6-2x} + 4$　　$(y = \sqrt{2x})$

(5) $y = -2^x + 3$　　$(y = 2^x)$　　(6) $y = \log_2(2-x) + 3$　　$(y = \log_2 x)$

$\boxed{6}$ 次の関数のグラフを、括弧内に指定された軸 (または点) に関して対称移動して、それを、さらに x 軸方向に 2、y 軸方向に 3 だけ平行移動すると、どのような関数のグラフになるか。

(1) $y = 2x + 1$　　(x 軸)　　(2) $y = -(x-1)^2$　　(y 軸)

(3) $y = \sqrt{1-x}$　　(原点)　　(4) $y = \dfrac{2}{x+2} + 1$　　(原点)

(5) $y = -2^{x+1}$　　(x 軸)　　(6) $y = \log_2 x - 1$　　(y 軸)

《関数》学年末試験の対策問題 (2)

クラス______ 番号______ 氏名____________________________

$\boxed{7}$ グラフが次の条件を満たすような関数 $y=f(x)$ を、具体的に一つあげよ。
なお、必ずしも、解が一つだけとは限らない。該当する関数を一つあげるだけでよい。
まず、与えられた条件をみたす関数は、どのような関数であるかの目星をつけること。

(1) 2 点 $(1,1),\ (3,2)$ を通る直線

(2) 2 点 $(1,0),\ (3,0)$ で x 軸と交わり、頂点が $(2,1)$ の放物線

(3) 直線 $x=3,\ y=-1$ を漸近線にもち、原点を通る

(4) 直線 $x=3$ だけを漸近線にもち、原点を通る

(5) 直線 $y=-1$ だけを漸近線にもち、点 $(1,1)$ を通る

(6) 点 $(2,1)$ を通り、つねに $x \geqq 2,\ y \leqq 1$ である

(7) つねに、$1 \leqq y \leqq 3$ であり、x が 4 変化するごとに y は同じ値を繰り返す

(8) 点 $(1,1)$ を通り、y 軸に平行な漸近線が無数にある

$\boxed{8}$ 次の表は、$-2 \leqq x \leqq 2$ における関数 $f(x),\ g(x)$ の値である。この表をもとに、次の問に答えよ。

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0	1.0	2.0	3.0	4.0
$g(x)$	1.00	0.25	0	0.25	1.00	2.25	4.00	6.25	9.00

(1) $f(g(0))$ の値はいくらか。

(2) $g(f(1))$ の値はいくらか。

(3) 関数 $-f(x)$ について、同様の表をつくれ。

(4) 関数 $g(-x)$ について、同様の表をつくれ。

(5) 関数 $|f(x)|$ について、同様の表をつくれ。

(6) $h(x)=f(2x)$ とする。関数 $h(x)$ について、$-1 \leqq x \leqq 1$ のときの表をつくれ。

(7) 関数 $y=f(x)$ の逆関数を $y=h(x)$ とする。関数 $h(x)$ について、上の表から分かる範囲で同様の表をつくれ。

《関数》後期期末試験問題

クラス＿＿＿ 番号＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の空欄を埋めよ。

(1) $y=\sqrt{2x}$ のグラフを y 軸に関して対称移動すると $y=$ ＿＿＿＿＿ となる。これを、さらに x 軸方向に 1、y 軸方向に -1 だけ平行移動すると $y=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ のグラフになる。

(2) $y=2^{2-x}+3$ のグラフを x 軸に関して対称移動すると $y=$ ＿＿＿＿＿＿ となる。これを、さらに x 軸方向に -3、y 軸方向に 4 だけ平行移動すると $y=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ のグラフになる。

$\boxed{2}$ 次の条件をみたす関数 $y=f(x)$ を、具体的に一つ上げよ。

(1) 点 $(2,1)$ を通り、つねに $x \leqq 2,\ y \geqq 1$

(2) 直線 $x=1$ だけを漸近線にもち、原点を通る

(3) $x=2,\ y=-1$ を漸近線にもち、原点を通る

(4) $-1 \leqq y \leqq 3$ で、x が 4 変化するごとに同じ値を繰り返す

$\boxed{3}$ 与えられた関数 $f(x)$ に対して、指定されたものを求めよ。

(1) $f(x)=x^2-2x$ のとき、$f(x+h)-f(x-h)$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ のとき、$f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

$\boxed{4}$ 次は、関数 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の値を、幾つかの x に対して表にしたものである。この関数のグラフは切れ目なくつながっているものとして、次の問に答えよ。

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y	1.00	0.80	0.60	0.40	-0.60	-1.40

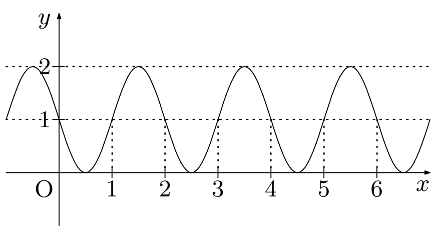
(1) この関数を $0 \leqq x \leqq 1$ で考えたときの逆関数を $y=g(x)$ とする。$g(0.8)$ の値はいくらか。

(2) 関数 $y=f(1-x)$ についての表をつくれ。

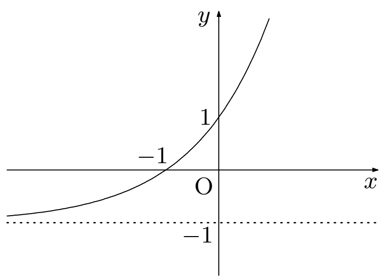
x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y						

$\boxed{5}$ 次のグラフは、どのような関数のグラフか。その関数の式をかけ。

(1) $y=$



(2) $y=$



$\boxed{6}$ 次の関数のグラフをかけ。$x,\ y$ 軸との交点があるときは、その座標も求めること。漸近線を持つときは、漸近線も書き込むこと。

(1) $y=x^2+2x-1$

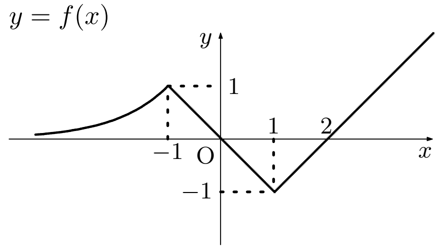
(2) $y=\dfrac{1}{x+2}+1$

(3) $y=-\sqrt{x+3}+2$

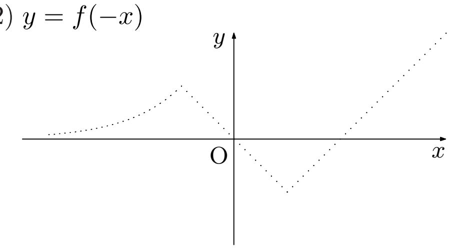
(4) $y=2\cos x-\sqrt{3}$

$\boxed{7}$ 関数 $y=f(x)$ のグラフを (1) とするとき、(2)〜(4) の関数のグラフをかけ。

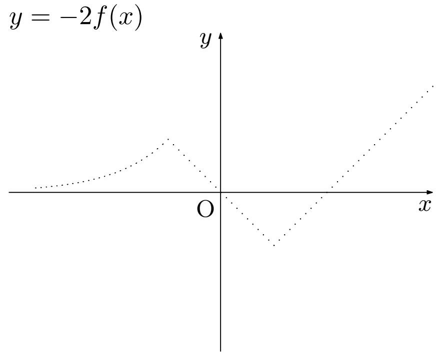
(1) $y=f(x)$



(2) $y=f(-x)$



(3) $y=-2f(x)$



(4) $y=\dfrac{1}{f(x)}$