数式処理機能のリメディアル教育への利用

梅野　善雄*

一関工業高等専門学校

1　はじめに

グラフ描画機能や数式処理機能を持つグラフ電卓は，数学の問題の単純な答え合わせとして利用した場合においても，十分な教育効果がある。特に，数学に苦手意識を持つ者の中には，分からない部分を教師に質問することもなく，そのまま放置してしまう者も少なくない。しかし，数式処理機能を持つグラフ電卓があれば，場合によっては，教師や友人に質問することなく独力での理解も可能になる。ここでは，高校数学から大学数学のレベルまで，グラフ電卓 (TI-89 Titanium) のグラフ機能や数式処理機能の操作方法を学びながら，数学に苦手意識を持つ者に利用させる場合の教育効果等について考えていきたい。なお，voyage200 でも，ほぼ同様の操作になる。

2　基本操作

グラフ電卓を初めて貸与するときは，グラフ電卓はあらかじめ番号順に整理して出席番号順に貸与した方が管理しやすい。長期貸与の場合は，借用書を書かせた方がよいかもしれない。また，電卓貸与にあたっては，前の利用者の設定が残っていて教員の説明通りの表示が得られないで学生が悩む場合もあるので，使用にあたっては全てのデータをリセットさせる必要がある。

貸与直後に生徒がつまずくのは，マイナス $\boxed{-}$ と符号 $\boxed{(-)}$ の使い分けである。負数は括弧マイナスのキー $\boxed{(-)}$ を使用するように言うと，言葉通り $\boxed{(}\,\boxed{-}\,\boxed{)}$ と打ち込もうとする者も現われるので注意が必要である。また，多重括弧の場合は，中括弧 { } や大括弧 [ ] を使用しようとする者も現われる。括弧は小括弧 ( ) だけを使うよう強調する必要がある。特に，最初は，ルートキーなどの関数キーを押したときに現れる左括弧を消す者も出てくるので，それは消さないで右括弧で閉じることを強調する必要がある。入力行における編集の仕方についても触れた方がよい。$\boxed{\leftarrow}$ と $\boxed{\text{CLEAR}}$ の機能の違い，そして $\boxed{◀}$ $\boxed{▶}$ での左右移動と $\boxed{\text{2nd}}$ を併用した場合との違いについても説明しておくと，その後の操作がスムーズになる。

また，コンピュータを苦手とする者にとっては，入力行に打ち込んだ後に「$\boxed{\text{ENTER}}$ キーを押さないとその機能が実行されない」ということが，必ずしも自明のことではない。入力行に打ち込んだのに $\boxed{\text{ENTER}}$ を押さないために結果が表示されず悩む者もいるので，最後は必ず $\boxed{\text{ENTER}}$ を押すことを強調しておくとよい。

3　主な使い方

3.1　代数の計算機能

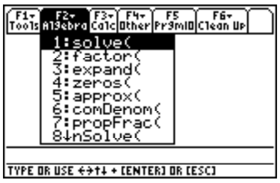
数式処理機能を持つ電卓が通常の関数電卓と異なることを示すには，例えば，2^{100} や $\sqrt{12}$ などの結果を表示させてみればよい。2^{100} の結果の続きを見るには，$\boxed{▲}$ で履歴画面に移る必要がある。元に戻るには $\boxed{\text{ESC}}$ を押す。

*021–8511　一関市萩荘字高梨　一関工業高等専門学校
[URL] 「数ナビの部屋」http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

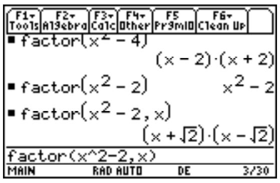
数式処理における主な代数機能は，$\boxed{\text{F2}}$にまとめられている。答え合わせとしての利用では，方程式の解法 (solve)，因数分解 (factor)，展開 (expand)，そして通分 (comDenom) について説明しておけば十分であろう。

ただし，この電卓の初心者にとって，連立方程式の解法の説明は難しいかもしれない。アルファベットの空白 ($\boxed{\text{alpha}}\boxed{(-)}$) を使いながら，式を「and」で区切ったり変数の組を中括弧で囲う必要があるからである。$\boxed{\text{F3}}$で表示される画面を方程式の解法補助用画面に切り替えると入力が簡単になるが，今度はデフォルトの画面に戻れなくなる者も出てくるので注意する必要がある。

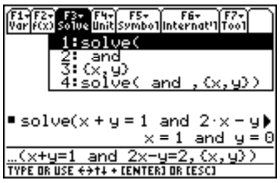
因数分解では，式だけの場合，変数を指定した場合，cfactor とした場合の結果の違いに注意させる。また，展開は，部分分数への展開にも利用できる。



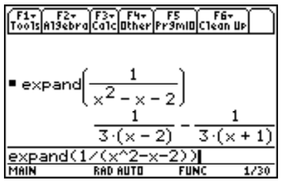
代数機能



因数分解



解法補助画面

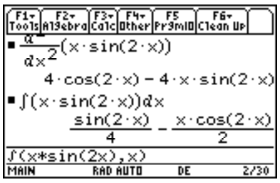


部分分数分解

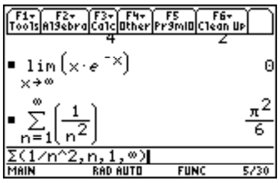
3.2 微積の計算機能

微分積分に関する機能は，$\boxed{\text{F3}}$にまとめられている。数式処理とはいかなることかを示すには，代数計算よりも微積の計算に利用できる事を示すのがよいかもしれない。単なる微分・積分の計算は，$\boxed{\text{F3}}$の機能によらず$\boxed{\text{2nd}}\boxed{8}$や$\boxed{\text{2nd}}\boxed{7}$ を利用した方が手軽である。また，高階の微分や$\boxed{|}$を利用した値の代入についても説明しておくとよい。積分では，不定積分と定積分の使い方について説明する。微分も積分も変数を指定する必要があるので，入れ子にすることで偏微分や重積分の計算にも利用できる事を強調しておく。

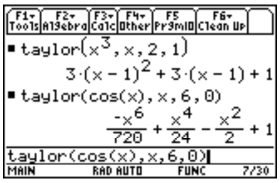
$\boxed{\text{F3}}$を利用すると，極限値や和の計算にも利用できる。その際，$x \to \infty$ の場合も扱うことが可能である。特に，与えられた関数のテイラー展開や微分方程式の解法ができるので，理工系の専門科目で使用すれば，より効果が大きいと思われる。



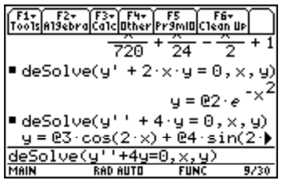
微積の計算



極限・和の計算



テーラー展開



微分方程式

3.3 グラフ機能

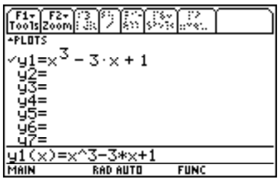
いろいろな関数のグラフを手軽に表示できることは，学生の理解を大きく促すものである。主なグラフ機能は，$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F1}}$から$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F5}}$までの箇所にまとめられている。

$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F1}}$で関数を定義すれば，$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F3}}$を押すだけでグラフを表示できる。描画範囲は$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F2}}$で指定できる。グラフが描画されている状態で$\boxed{\text{F2}}$を押せば，画面の縮小・拡大や，指定した矩形内を拡大表示することができる。関数の x 座標と y 座標との対応関係を見たい場合には，$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F5}}$を押せばよい。$x$ の刻み幅は$\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{F4}}$で指定できる。

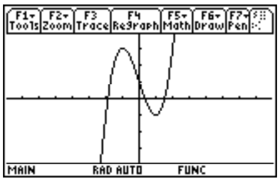
さらに，単にグラフが表示できるだけではなく，そのグラフに関するいろいろな情報を入手できる。グラフが描画されている状態で$\boxed{\text{F3}}$を押すと，座標を表しながらグラフ上を移動できる。$\boxed{\text{F5}}$を押すと，x 軸との交点，指定した範囲における最小値・最大値，2 つのグラフの交点，微分

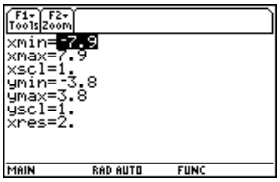
係数，接線の方程式，変曲点など，さまざまのことを調べることができる。

グラフ表示できるのは，$y = f(x)$ のタイプの関数ばかりではない。媒介変数，極座標，数列，2 変数関数，そして微分方程式の解曲線まで描画できる。いずれも，$\boxed{\text{MODE}}$ で「graph」の箇所の指定を変えるだけである。

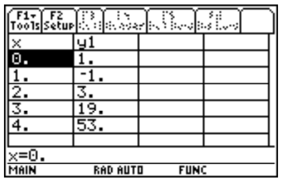


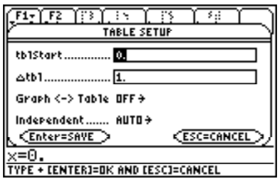
関数定義


グラフ描画

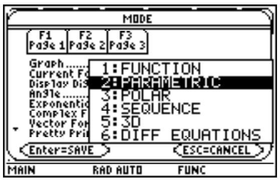


範囲指定

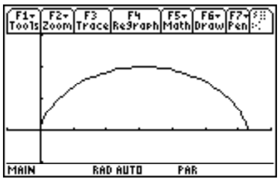

数表作成

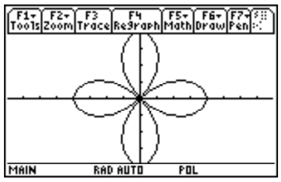


刻み幅変更



関数タイプ変更


媒介変数表示

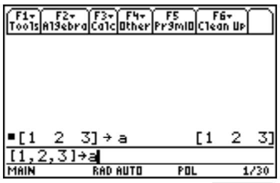

極座標

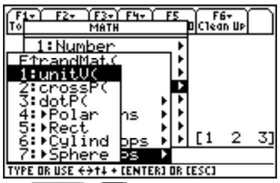
4　線形代数での使い方

線形代数では，行列の計算など煩雑な単純計算が多くなるが，この電卓を併用すれば，より本質的な部分の理解を得ることができるだろう。

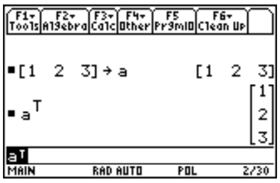
例えば，ベクトル [1, 2, 3] を $\boldsymbol{a}$ に定義するには，$\boxed{\text{STO}}$ を利用して [1, 2, 3] $\boxed{\text{STO}}$ a とするか，もしくは $\boxed{\text{F4}}$ 1 (Define) を利用して，Define $a = [1, 2, 3]$ とする。履歴画面では，コンマは表示されないので注意する。列ベクトルとして定義したい場合は，[1; 2; 3] $\boxed{\text{STO}}$ a のように，コンマではなくセミコロンで区切る。あるいは，a を行ベクトルとして定義後に，転置の記号 ($\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{5}$ 4 1) を右肩に付加してもよい。他に，空間で直交座標で表された点を，球座標や円柱座標に変換する機能もある。

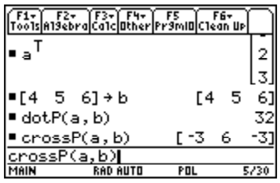
ベクトルを定義後は，$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{5}$ 4 の後で $\boxed{▲}$ を押せば，ベクトルの計算メニュー (L: Vector ops) が表示され，内積 (dotP) や外積 (crossP) の計算ができる。ベクトルを幾つかのベクトルの一次結合で表すには，連立一次方程式の解法機能によるか，または係数行列に対して行に関する基本変形 (rref) $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{5}$ 4 4 を行えばよい。あるいは，$\boxed{\text{CATALOG}}$ 2 を押して，$\boxed{▼}$ を何度か押しても現れる。その場合は，次に $\boxed{\text{CATALOG}}$ を押すと直接 rref(が表示される。例えば，$\boldsymbol{c} = [1, 2]^{\mathrm{T}}$ を $\boldsymbol{a} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = [-1, 1]^{\mathrm{T}}$ の一次結合で表すには，下記の表示結果より $\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{2}(3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ である。


ベクトルの定義 $\boxed{\text{STO}}$

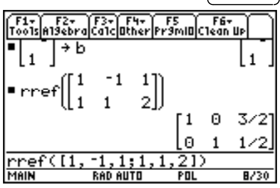


$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{5}$ 4 $\boxed{▲}$ $\boxed{▶}$

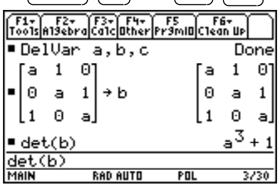

ベクトルの転置



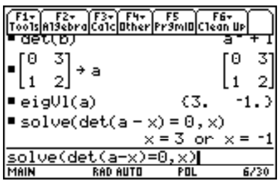
内積と外積



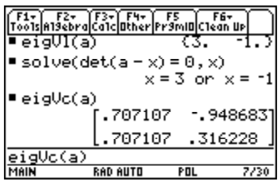
行に関する基本変形



行列式



固有値



固有ベクトル

行列 A の行列式の計算は，行列 A を定義した上で， $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{5}$ 4 2 を利用して det(a) とする。かなりの時間はかかるが，20 次の行列の行列式でも計算してくるので，理工系での実用にも十分耐えうる機能である。固有値や固有ベクトルを求めることもでき，LU 分解や QR 分解の機能もある。

5　応用数学での使い方

5.1　フーリエ解析

工学の学生にとって，フーリエ級数の知識は必須である。しかし，その学び初めでは部分積分の計算力が必要になり，初学者にとって収束の様子をイメージすることは難しいと思われる。そのような場合に，計算の補助として，あるいは手軽なグラフ描画ツールとして利用すれば，理解の向上が期待される。たとえば，

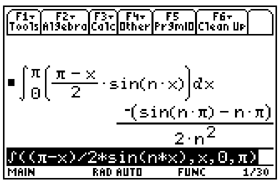
$$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)/2 & (-\pi \leqq x < 0) \\ (\pi - x)/2 & (0 \leqq x < \pi) \end{cases}, \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

のフーリエ係数を計算するには，部分積分 $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx$ の計算が必要になる。グラフ電卓は，プログラムの中で整数宣言をすることはできるが，計算画面の中では n が整数であることを認識させることはできない。したがって，$\sin n\pi$ が 0 であることを，学生は自分で見抜く必要がある。また，和の計算機能を利用すれば，有限項までのグラフも簡単に描画できるので，収束する状況を簡単に確認できる。また，上で例示した関数で，$|x| > \pi$ のときは $f(x) = 0$ とした場合のフーリエ積分は，

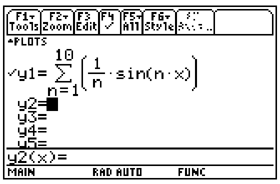
$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(u)\cos ux + B(u)\sin ux\} du$$

$$A(u) = 0, \quad B(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi u - \sin \pi u}{2u^2}$$

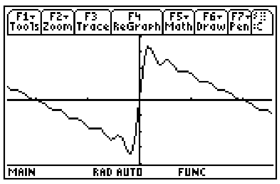
であるが，$B(u)$ のグラフをイメージすることは簡単ではない。しかし，グラフ電卓で，変数 u を x に変えて $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ で定義してやれば，右端のようなグラフが表示される。グラフ電卓を利用することで，フーリエ解析全般にわたり学生の理解の向上が期待される。



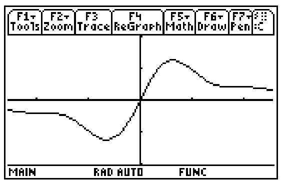
部分積分



フーリエ有限和



グラフ



フーリエ変換

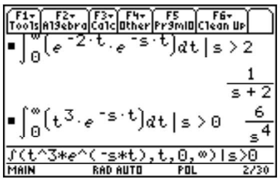
5.2　ラプラス変換

関数 $f(x)$ のラプラス変換は， $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ により定義される。ラプラス変換の最初は，基本的な関数についてこの無限積分を計算する必要があり，学生にはそのための計算力が必要である。しかし，その計算は，部分積分を含む無限積分の計算をすることになる。計算力の弱い学生は，その計算部分で難儀することになる。

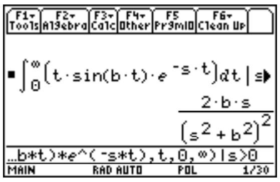
グラフ電卓の数式処理機能は無限積分もカバーしているので，その計算の答合わせとしても利用できる。ただし，s はラプラス変換の一般論では複素数であるが，グラフ電卓での計算では s は実数とし，範囲を指定して計算させる必要がある。

逆ラプラス変換の計算は部分分数分解を行うことになる。式の展開 (F2 3) では部分分数展開もできるので，自分で求めた展開式のチェックとして利用できる。ただ，残念ながら，逆ラプラス変換を行う機能はない。

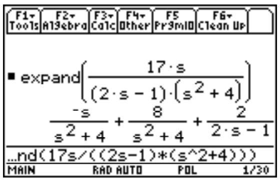
このラプラス変換は，微分方程式の初期値問題で駆使される。与えられた微分方程式の解のラプラス変換を求め，その逆ラプラス変換を行うことで微分方程式の解を求める。そこでは，かなりの計算力が必要になる。また，解が長い式になる場合，与えられた微分方程式を満たしているかどうかのチェックも繁雑になるが，数式処理機能を利用すれば簡単にチェックできる。



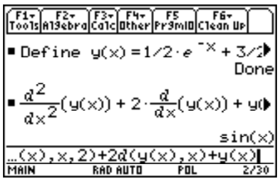
ラプラス変換 1



ラプラス変換 2



部分分数分解



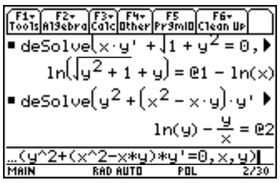
解のチェック

すべての計算をこの電卓に任せるべきではないことは当然であるが，学生は，自分の計算結果の答え合わせが手軽にでき，さらには関連する関数のグラフも確認できるので，いろいろな理解が深まると思われる。特に，微分積分の計算力に問題があるような学生に，その計算の補助として活用させれば，微積分の計算力が劣る学生に対してフーリエ・ラプラスを理解させることが可能になると思われる。

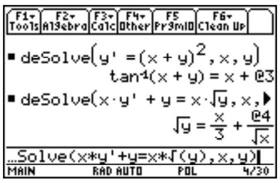
5.3 微分方程式

理工系の学生にとって，微分方程式の取り扱いは必須事項である。グラフ電卓の数式処理機能を利用すると，2 階の定数係数線形微分方程式の解析解まで求める機能がある。 F3 c (deSolve) を押し，そこに微分方程式と変数の組を指定するだけでよい。1 階の微分方程式の場合，変数分離系，同次系，線形などの通常よく現れる方程式については，その解析解が表示される。@1 や@2 は，積分定数である。deSolve の機能を使うごとに，@n の n の番号が増えていく。下図の 2 階の例では，$y'' + y' = x\cos 2x$ の一般解として，次の式が表示されている。

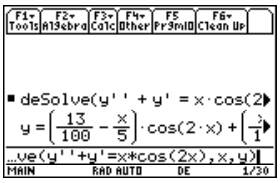
$$y = \left(\frac{13}{100} - \frac{x}{5}\right) \cdot \cos(2x) + \left(\frac{x}{10} + \frac{4}{25}\right) \cdot \sin(2x) + @7 \cdot e^{-x} + @8$$



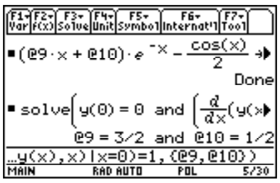
1 階の解法例



置換が必要な例



2 階線形非同次

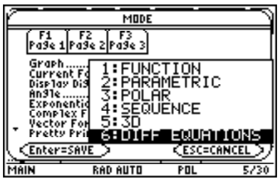


初期値問題

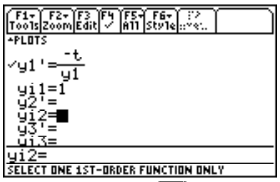
初期条件や境界条件は，表示された解を STO を利用して例えば $y(x)$ と定義する。次に連立方程式の解法機能を利用して，与えられた条件を満たす積分定数を求める。例えば，$y''+2y'+y = \sin x$ を初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ のもとで解くには，まず，deSolve を利用して一般解を求める。解として $y = (@9 \cdot x + @10)e^{-x} - \dfrac{\cos(x)}{2}$ が表示されるので， STO を利用して $y(x)$ と定義する。この関数に対して， F2 1 の solve 機能を利用して連立方程式 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ を未知数 @9, @10 について解く。上の右端の例は，そのときの解が表示されている。したがって，求める解は $y = \dfrac{1}{2}\left\{(3x+1)e^{-x} - \cos(x)\right\}$ である。

微分方程式を理解するには，その大域的な性質の理解も重要である。しかし，ベクトル場 (勾配場) を簡単には図示できないため，従来の授業でその理解を得させるのは困難があったといえる。TI-89Titanium や voyage200 のグラフ機能には，微分方程式のベクトル場を図示する機能がある。さらに，その図の中で初期値を与え解曲線を描画させることもできる。

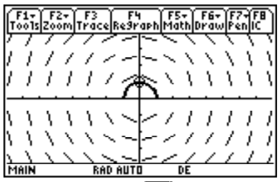
そのためには，まず $\boxed{\text{MODE}}$ 6 を押して，関数のタイプを微分方程式に変更する。そして，$\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ で微分方程式を定義する。変数は必ず t を用いる。微分方程式は $y' =$ の形で定義するようになっているので，例えば，$x + yy' = 0$ の場合は，$y' = -x/y$ と変形して定義する。その後で $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F3}}$ を押すと，勾配場が表示される。$\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ の yi の箇所は，$t = 0$ のときの初期条件である。この値も指定しておくと，勾配場を表示した後で，指定された初期条件のもとでの解曲線が描画される。右端は，画面上で別な点を初期値として指定した場合の図である。

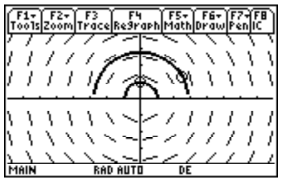


$\boxed{\text{MODE}}$ の変更

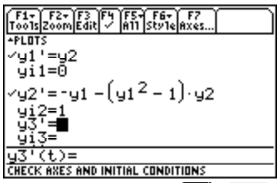


式の定義 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$

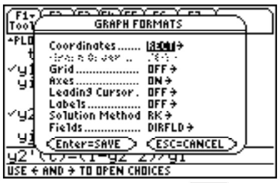

勾配場 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F3}}$


解曲線

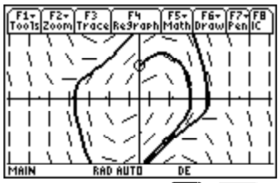
2 階の微分方程式の場合は，連立微分方程式の形で定義する。例えば，van der Pol 微分方程式 $y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$ の場合は，$y_1' = y_2$，$y_2' = -y1 - \mu(y_1^2 - 1) * y_2$ として定義する。この方法は 3 階以上の場合にも対応できる。$y_1, y_2, \cdots$ の個々の解曲線を描画でき，横軸と縦軸を y_n のどれにするかも指定できる。ただし，微分方程式の定義画面 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ の状態で $\boxed{\text{F1}}$ 9 を押して「graph format」画面を出し，field の箇所を slpfld から dirfld に変更する。その上で $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F3}}$ を押すとベクトル場が描画される。$\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$ で初期条件も入力する，y_1，y_2 のグラフを別々に表示することもできる。下図は，$\mu = 1$ の場合のベクトル場と，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ の場合の解曲線である。

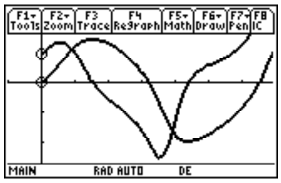


2 階の方程式 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F1}}$



field の変更 $\boxed{\text{F1}}$ 9


ベクトル場 $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{F3}}$


解曲線 y_1, y_2

6　おわりに

他にも，ベクトル解析，複素解析，統計，そしてプログラミングでの利用もできる。グラフ電卓は，コンピュータと違い，横になりながら「何時でもどこでも」利用できる。基礎学力に不安な学生にとっては「理解の補助」のため，また十分な学力がある学生にとっては「思考の補助」として利用できるだろう。学力のある学生が，煩雑な計算を電卓側に任せて思考に集中した場合には，相当高度のところにまで到達できるのではないかと思われ，工学系の学生にとっては必需品といえるほどの機能があるのではないかと思われる。

参考文献

[1] 梅野善雄：数式処理電卓の応数・応物での利用，平成 13 年度工学・工業教育研究講演会講演論文集，pp.89–92，平成 13 年 7 月
(URL)　`http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/file/eng_H13b.pdf`