

微積の授業における数式処理電卓の利用

一関高専 梅野善雄

1 はじめに

今、世界の数学教育では、グラフ電卓を活用した大きな変革が進行中である。それは、教師が一方的に「教える」授業から、学生自らが「学ぶ」授業に転換した授業である。数式処理電卓は、学生自身がいろいろな思考実験や数学的な試行錯誤をすることを可能にし、学生の数学に対する興味・関心や能力を大きく進展させる可能性を持つ。

本校では、平成 12 年度の本校 2 年生に数式処理電卓 TI-89 を貸与した微積分の授業を試行した。以下では、この電卓を用いた 1 年間の実践結果を報告する。この電卓の数学教育上の意義を考えると、何らかの参考になれば幸いである。

2 微積における数式処理電卓の利用

数式処理電卓の典型的な使用例を幾つか紹介する。特徴的なことは、従来は教師が板書をしながら説明していた内容を、電卓を通した思考実験をさせることにより学生自身に発見させ、その後通常の説明をするということである。

2.1 微分と積分の計算練習

数式処理電卓を学生に利用させることに対しては、微積の計算を電卓のキー操作だけで行わせるのではないかと、それでは微積の計算力が身につかないのではないかと、という誤解を受けることが多い。この電卓を学生に貸与して以来、極限値の計算、微分の計算、そして積分の計算などでこの電卓を利用してきたが、学生は自分の計算結果の答え合わせとして利用してきた。試験での持ち込みは認めていないので、「その計算を自分でできるようにならなければいけない」ことは、どの学生も当然の如く弁えているといえよう。

不定積分の計算では、こちらが指示していないにもかかわらず、多くの学生が自分で求めた積分結果を電卓を利用して微分し、元の関数に戻るか

どうかを確かめていた。数式処理電卓を利用すれば、複雑な式であっても、いつでも結果を微分して確かめることができる。このような目的で電卓を使うことは、微分と積分の関係を正しく身につけさせるためにも有効と思われる。

2.2 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

この極限値の公式を、数式処理電卓のグラフ機能を利用して次のような流れの授業を行った。

- (1) $\sin x, x$ のグラフを表示させる。
- (2) それを何度か拡大させる。(図 1)
- (3) その画面から、 $\sin x/x$ の値を予想させる。
- (4) 座標データを表に変換させる。(図 2)
- (5) $x \rightarrow 0$ につれて、 $y1 = \sin x, y2 = x, y3 = \sin x/x$ の変化の仕方を考えさせる。

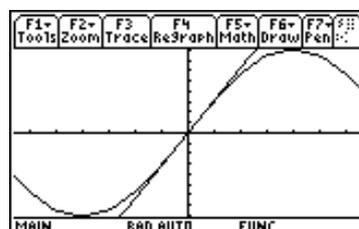


図 1

F1-Tools	F2-Setup	F3-Header	F4	F5	F6	F7
x	y1	y2	y3			
0.	0.	0.	undef			
.01	.01	.01	.99998			
.02	.02	.02	.99993			
.03	.03	.03	.99985			
.04	.03999	.04	.99973			
y1(x) = .029995500202496						
MAIN RAD AUTO FUNC						

図 2

具体的な人数は調べなかったが、多数の学生が $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ に気づいた。そのことに気づかせた上で、通常の説明を行った。

2.3 合成関数の微分の公式

この電卓の数式処理機能を利用して、次の流れで合成関数の微分公式に気づかせようとした。

- (1) $y = (3x - 5)^4$ などを $y = f(u), u = g(x)$ という 2 つの関数に分解させる。

- (2) $y = f(u), u = g(x)$ の導関数を自分で計算させる. x^n の導関数は学習済みである.
- (3) $y = f(g(x))$ の導関数を, 数式処理機能を利用して電卓で求めさせる.
- (4) $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{du}, \frac{du}{dx}$ の間にどのような関係があるかを考えさせる.

約半数の学生が $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ に気づいた. 中には, 3つに分解する場合も同様であることを自分で確かめ, 自分の発見に「すごい」とほくそえんでいる学生もいた. このような発見をさせた後で, 普通の証明を行った.

2.4 定積分の定義

数式処理電卓の数式処理機能とグラフ機能を複合的に利用して, 次の流れで和の極限としての定積分を理解させようとした. 関数 $f(x) = x^2$ を区間 $[0, 1]$ で考え, n 等分した場合を考えている.

- (1) 区間 $[0, 1]$ を 2 等分して, 長方形の高さを小区間の右端に対応する $f(x)$ の値で定めたときの, 長方形の面積の和を計算させる.

- (2) 3 等分, 4 等分した場合の面積を計算させる.
- (3) n 等分した場合の, 面積の和の式を書かせる.

- (4) $f(x) = x^2, s(n) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$ を定義して $s(2), s(3), s(4)$ を表示させ, (1)(2) で求めた値と一致することを確認させる. (図 3~5)

- (5) グラフ表示を数列用に変更させ, 数列 $s(n)$ のグラフを表示させる. グラフ上を移動すると点の座標が下段に表示される. その値が前の値と一致することを確認させる. (図 6)

- (6) グラフの座標データを表で表示させ, (4)(5) と一致することを確認させる. (図 7)

- (7) $s(n)$ を表示させて書き写させ, $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を自分で計算させる. (図 8)

- (8) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ であることを確認させる.

- (9) 区間 $[0, x]$ で $s(n, x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kx}{n}\right) \frac{x}{n}, g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n, x)$ とし, いろいろな $f(x)$ に対して $g(x)$ と $f(x)$ との間にどのような関係があるかを考えさせる. (図 9~11)

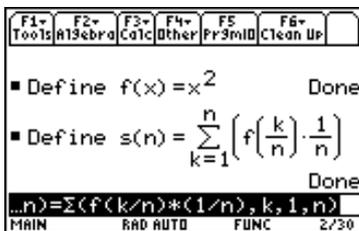


図 3

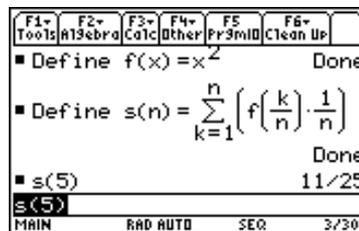


図 4

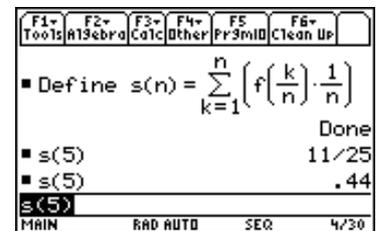


図 5

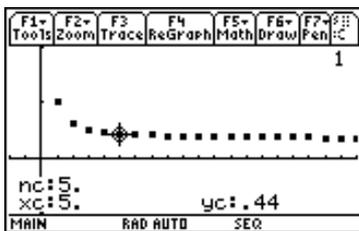


図 6

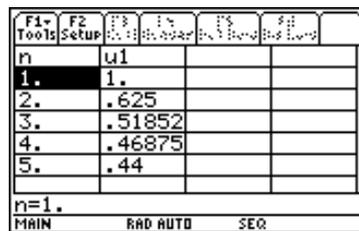


図 7

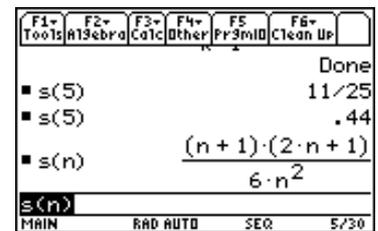


図 8

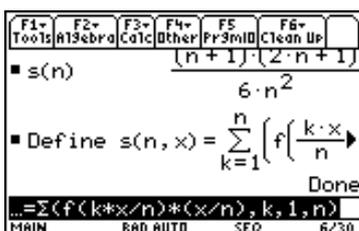


図 9

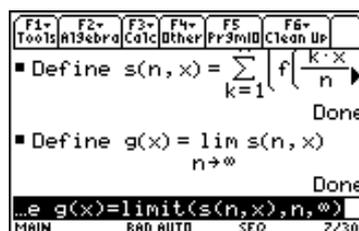


図 10

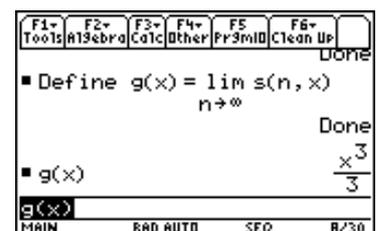


図 11

以上の手順により， $f(x) = x^n$ のとき $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$ であることに，かなりの学生が気づいた．クラスによっては， $g'(x) = f(x)$ であることに10名近くが気づいている．この後で，全体をもう一度おさらいする感じで通常の説明を行った．

この部分は手順が多くて若干複雑だったかもしれないが，微積の基本定理にまで気づいた者はそれほど多くはなかった．しかし，手順をもう少し工夫して時間を多く取れば，多くの学生が気づくようにさせることも可能と思われる．

3 数式処理電卓の有効性

数式処理電卓が数学教育の中でどのような有効性があるかを，前節の例は如実に示している．

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることは， $y = \sin x, y = x$ のグラフを単に拡大するだけで一目瞭然の理解が得られる．また，区間の分割数を増やすにつれて定積分が収束する様子を見ることが，これまでの数学教育の中で，これほどの容易さで可能であっただろうか．2年生に微積分の基本定理にまで気づかせることが可能なのは，数式処理電卓ならではのことである．

このように，数式処理電卓のグラフ機能や数式処理機能を利用すれば，教授すべき内容をよりストレートに学生に理解させることが可能であり，しかも，これまで教師が説明していたことを学生自身が気づくように導くことも容易に可能になる．

このことが，世界中で「数学教育の革命」と呼ばれる所以である．

4 授業に対する学生の感想

学生が，この電卓や，それを利用した授業をどのように思っているかを調査するため，数度にわたるアンケート調査を実施した．以下は，最後の授業（平成13年2月中旬）で調査したときの結果である．回答数は2クラスで73名である．

このアンケートを実施した時期の授業内容は，積分の応用として媒介変数や極座標による面積や長さを扱っているときである．2年生にとって，これらの内容を理解してきちんと計算ができるようになることは，そう容易なことではない．しかし，それにもかかわらず，「数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる」（63.0%）「数ナビを使う授業はおもしろい」（49.3%）と回答している．特に「数ナビを使って数学について前よりも考えるようになった」（32.9%）とあり，学生の数学に対する意識が相当向上したことがうかがわれる．

ただし「数ナビを使うようになって前よりも計算力が落ちた」（11.0%）「数ナビに頼って，自分であまり計算しなくなった」（19.2%）という学生がいることには注意が必要である．この電卓の長期的な使用では，その使い方に十分な注意が必要であることを示している．なお，これらの学生の計算力が低下したことを示す変化は出ていない．

表1 数式処理電卓の使用に関する学生の意識

数式処理電卓（「数ナビ」）に関する意識	はい	中間	いいえ
数ナビを家や寮でも使っている	63.0%	21.9%	15.1%
数ナビを使う授業はおもしろい	49.3%	42.5%	8.2%
数ナビは復習するとき便利だ	82.2%	13.7%	4.1%
数ナビのおかげで数学が前よりもおもしろくなった	30.1%	64.4%	5.5%
数ナビを使うようになって前よりも計算力が落ちた	11.0%	53.4%	35.6%
数ナビを使わないで普通の授業をしてほしかった	11.0%	31.5%	57.5%
数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる	63.0%	35.6%	1.4%
数ナビに頼って，自分であまり計算しなくなった	19.2%	39.7%	41.1%
数ナビのおかげで，理論的なことへの関心が高まった	31.5%	54.8%	13.7%
数ナビを使って数学について前よりも考えるようになった	32.9%	53.4%	13.7%

「中間」＝「どちらともいえない」，有効回答は73名，（平成13年2月下旬調査）

5 実践上のいろいろな問題点

数式処理電卓を個々の学生に貸与した授業を約1年間実践し、学生の反応や試験成績の結果などを前節で述べた。表1の結果を見ても、その教育効果には歴然としたものがあり、このような電卓の活用は早急に推し進められるべきであろう。以下には、その活用や普及を図る上において解決しなければならない幾つかの問題を箇条書きする。

- (1) 数式処理電卓が通常の間数電卓と比べて高価格であり、この電卓を利用した数学教育の効果に対する認知度が低いこと。
- (2) この電卓は、いつでもどこでも利用できる環境にあってこそ最高の教育効果が発揮される。学生に個人購入させることが理想であるが、この電卓への理解や認知度が低い状況では、そう簡単には個人購入させられないこと。
- (3) この電卓に関して学内の数学教師の共通認識が必要であるが、そのような意識を形成するのはそう簡単ではないこと。
- (4) 数式処理電卓の利用を前提とした教科書は日本には存在しないので、多忙な公務の間をぬって、教師は教材を自主開発しなければならないこと。
- (5) クラス間の学力差に応じて学生の反応も違うので、その使用のさせ方にも配慮が必要なこと。学力の高いレベルのクラスでは思考力を伸ばす方向での利用が、学力レベルの低いクラスでは、基礎知識を確実にさせる方向での利用が望ましい。
- (6) 数式処理電卓を利用すれば思考重視の問題に移行できるが、基礎的計算力をつけさせるための時間を削減はできない。つまり、思考力重視の問題を課すための時間をそう簡単には捻出できない。

6 高専における数式処理電卓の意義

高専では、高校から大学までの数学が教授される。昨今の高校の教授内容の変遷にもかかわらず、高専における教授内容は、大筋では高専創設時の内容がそのまま教授されている。それは、在学中

の工学系専門科目で数学が駆使されるため、そこで必要となる数学の内容をそう簡単には変更できないからである。専門科目では、単なる数学の知識ばかりではなく、数学上の高度の計算が必要となり、さまざまな場面で数学を使いこなすことが求められる。その内容は大学レベルであり、学年が上がるほど数学を使いこなす場面は増すことになる。つまり、小・中・高・短大・大学の中で、数式処理電卓の必要度や使用頻度が最も高いのは高専であるといえるのではないだろうか。しかも、5年という長期間の使用が可能であり、進学すればその期間はさらに増えることになる。したがって、高専では学生に個人購入させる必然性がある。

このように、高専では、数式処理電卓を数学と工学の両面から活用した教育が可能であり、この電卓の有効性を最も高く実現できる環境にあると思われる。しかも、高専での実践結果は、高校から大学工学部まで幅広く活用できる。入学時から、数学と工学の両面でこの電卓を5年間有効活用させた場合、卒業時には学生の能力はどのようなレベルにまで高まるのだろうか。すべてはこれからの実践に依るが、相当すごいレベルの学生が育つだろうことは想像に難くない。

以上のことから、数式処理電卓は、まず高専においてこそ普及させるべきである。そのためには、数学の教官のみならず、専門学科の教官にも、この電卓の有効性を啓蒙することが必要になってくるとと思われる。

7 おわりに

高専2年の微積分の授業で、4月から既存の教科書に添った内容で数式処理電卓を利用してきた。その実践から言えることは、世界で起きているグラフ電卓を活用した数学教育の革命は、日本でも十分に起こりうるということである。その実践にはいろいろな困難がありながらも、数式処理電卓を有効に活用した数学教育は、従来の方法では得られないほどの大きな効果をもたらす。困難を避けるのではなく、それを乗り越える方向での検討が必要であろう。