数学教育における創造力を育む試み

梅野　善雄
(一関工業高等専門学校)

論文集「高専教育」，第 29 号，135–140 頁，2006.3

数学教育における創造力を育む試み

梅野　善雄*
(一関工業高等専門学校)

Some Attempt to Encourage Creativity in Mathematical Education

Yoshio　UMENO
(Ichinoseki National College of Technology)

Creativity is one of the keywords for education of colleges of technology. If we wish to encourage students to be creative in mathematical education, they themselves need to notice something about mathematical contents. As they need to have enough basic skills of mathematics to do it, they need to be pretty good at mathematics. However, we have made it possible by using technology such as graphing calculators we lend to our first-year students. We give them several assignments to make them notice something. In this paper, we would like to introduce their reports about Pythagorean theorem and their comments about their assignments, and then consider the relation between achievements of assignments and math examination results.

KEYWORDS: creativity, graphing calculators, open-ended problem

1. はじめに

高専を取り巻く環境は，JABEEや認証評価等で激変している。この中では「創造力」が高専教育の重要なキーワードとなってきており，ロボットコンテストを始めとして，主に工学実験に関わる部分で特色ある試みが数多くなされている。

そのような創造性を発揮するには，まず「何かに気づくこと」が全ての出発点と思われる。そして，その「気づき」を現実化していくには，工学等に関する基礎知識の他に，いろいろな要素を関連づけて論理的に考えていく数学的思考力が必要とされるであろう。

従来の数学教育でその部分を取り上げるには，学生が数学の基礎力を十分に持っていることが前提となる。しかし，そこにテクノロジーを活用すれば，さらに多くの学生に数学的な事柄についての「気づき」を得させることが可能になる。

著者は，平成16年度の本校1年生に数式処理電卓(TI–89)を貸与し，そのような「気づき」を得させるために「自由研究」としていろいろな課題を学生に与えた。以下では，この電卓を利用して学生が行った自由研究の内容や，それを行った学生の感想などを紹介すると同時に，成績との関連性などについて分析する。

なお，この研究は，平成16・17年度科学研究費補助金・基盤研究(C)，課題番号16500566の支援を受けて行われたものである。

2. 数学教育における「自由研究」

高専における通常の数学の授業は，最初に概念や例題等を解説し，その後は定型的な問題を解かせるスタイルが普通である。総合的な応用問題を考えさせたくとも，そのような時間はなかなか取れないのが現状と思われる。また，成績下位の学生にとっては，分からない問題は友人や教員に聞く以外に解決策はない場合が多い。

このような数学教育の状況を打破するための一つの改善策として，数式処理電卓の活用が注目されている。それは数式処理機能(CAS)を持つグラフ電卓であり，微分方程式の解析解や3次以上の行列の固有値も求めることができる。単純計算の部分や単なるグラフ表示を電卓側に任せてしまえば，計算時間を縮めると同時に，個々の学生のもつ能力差の問題もある程度解消できる。

大阪・清風高校の公庄や石川高専の阿蘇は，数

*一般教科自然科学系　umesan@ichinoseki.ac.jp

式処理電卓を学生に長期間貸与して数学に関する探究活動を実践し，その結果を報告している [1) 2)]。福井高専では数式処理電卓を新入生全員に購入させ，数学科全体での活用が試みられている [3)]。いずれにおいても，学生は与えられたテーマにつき自分の興味・関心にもとづいて自分の考えを発展させ，教師が予想した以上の考察を行っている。その探究活動は，学生により様々な答え方が可能であり，一般には「オープンエンドの問題」と呼ばれているものである [4)]。

一関高専でもこの電卓を活用した授業を行い幾つかの実践結果を報告した [5) 6)]。そこでは，数式処理電卓 (TI–89) を主に数学の定理や性質への理解を深めさせるために使用させたが，その経験の中で感じたことは，この電卓は単に学生に持たせておいて，ときどき課題を与えるだけでも十分な効果が期待できるのではないだろうか，ということである。

そこで，平成 16 年度は，授業の中で特定の理解を得させるために使用するのではなく，それを授業外で利用させて数学に関する内容で試行錯誤を行わさせ，その中から何らかの数学的法則を発見させることを目的として貸与することにした。貸与したのは本校の 1 年生 (168 名) である。平成 16 年 7 月中旬から平成 17 年 2 月末まで貸与し,「自由研究」として 3 回にわたり幾つかの課題を与えた。時期は 7 月下旬，10 月下旬，そして 12 月下旬である。それぞれ約 1 ケ月の考察期間を与えた。課題は複数題を与え，その中から自分の取り組みやすい問題を選択させるようにした。

しかし,「数学的な事柄について考察せよ」と言われても，何をどう考察してよいか分からない学生が多いことも予想された。そこで，グラフ電卓で具体的にどのような操作をしたのか，その操作に対してどのような表示がなされ，それを見て何を感じ，どのようなことを予想したのか等々，各自の思考経過をまとめればよいことを説明した。「いろいろやってみたが何も分からなかった」というときは,「やった内容を書いてくれればよい」ことを強調した。

各時期の課題は，以下のような内容である。

夏期課題

[1] $(x+1)^n$ の展開式において，指数 n と展開された式の係数との関係に関する考察

[2] x^n-1 の因数分解において，指数 n と因数分解された式の形との関係に関する考察

[3] 繁分数の値の間に成立する関係に関する考察

$$\frac{1}{1+1},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\ \cdots$$

[4] $f(x)$ のグラフと絶対値関数 $|f(x)|$ のグラフとの関係に関する考察

秋季課題

[5] 3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフの形と，係数 a, b, c との関係に関する考察

冬季課題

[6] 三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c に関する考察

[7] x^n+a が因数分解できるための自然数 n, a に関する考察

[8] 3 次関数 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフと a, b, c の値との関係に関する考察

3. 学生のレポートの内容

学生がどのようなことを書いてきたかを示すため，ここでは，冬季課題の「[6] 三平方の定理」に関して提出されたレポートから，学生が指摘してきた内容を幾つか紹介する。

冬季課題の提出率は 91.0%である。そのうち，大多数 (94 名) が三平方の定理に関する課題を選択した。この課題を提示したプリントの解説では，3 つの数が連続する場合，2 つの数が連続する場合など，学生が考えやすいように具体的に考察すべき内容にも言及した。

配布プリントでの解説内容

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として，$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ が良く知られています。このような自然数は，他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように，連続する 3 つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように，3 つのうち 2 つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは，他にあるでしょうか。つまり，$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では，$a^2=c^2-b^2$ も成立しています。そして，そのような自然数 a, b, c は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

この課題に対して，学生はさまざまなアプローチの仕方をしている。

(1) 3 つの数が連続する場合の指摘

これが成立するのは，$3^2+4^2=5^2$ のときだけである。いろいろ調べてみて，この場合しか見つけられなかったことから,「この場合だけである」と結論づけている学生も多かったが，13 名の学生はその証明も与えている。

証　3つが連続するのは，$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$ の場合である。整理すると $(n+1)(n-3)=0$ となるので，$n=3$ の場合しかない。

(2) b,c が連続する場合の指摘

この場合は，実に多くの指摘がなされてきた。以下に，その幾つかを箇条書きする。

- a を 1 以外の奇数とすると，b,c については $b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$ である。
- $a^2=b+c$ である。
- a は奇数である。
- $a+b-c$ は 2 の倍数である。
- $a=2n+1, b=2(n^2+n), c=2(n^2+n)+1$
- $a=2k+1$ とすると $b=(a+1)k, c=b+1$
- $a=2n+1$ とすると，
  $b=4(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)$
  $c=4(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)+1)$

(3) a,b が連続する場合の指摘

$3^2+4^2=5^2$ の次は，$20^2+21^2=29^2$ であり，その次は $119^2+120^2=169^2$ となるなど，値がどんどん大きくなるので，学生はかなり苦労したようである。大きな数では，$4059^2+4060^2=5741^2$ が指摘されている。$n^2+(n+1)^2=2n(n+1)+1$ が平方数となるような n について考えればよく，そのような n に対して $a=n, b=n+1$ であることも指摘されている。

(4) その他の指摘

三平方の定理を成立させる式として，次の式が指摘されてきた。

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

以下のような指摘もある。

- $a=(b+c)/3$ であれば $a:b:c=3:4:5$
- $a^2+b^2=c^2$ が成立すれば，a,b,c を n 倍した an,bn,cn についても成立する。
- $3^2+4^2=5^2$ に 11^2，111^2 などを乗ずれば $33^2+44^2=55^2$，$333^2+444^2=555^2$ も成立

具体的にどのような形で発見に到ったかをみるため，以下に，学生のレポートの一部を紹介する。

S.I. 君は，b,c が連続する場合として，

$$5^2+12^2=13^2$$
$$7^2+24^2=25^2$$
$$9^2+40^2=41^2$$

があることに気づく。そして，

$$12+13=25=5^2$$
$$24+25=49=7^2$$
$$40+41=81=9^2$$

であることから，三平方の定理の 2 つの数 b,c が連続する場合は $b+c=a^2$ であるとしている。周知のように，a を奇数とするとき

$$b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$$

であるので，この結果は正しい。

H.O. 君は，b,c が連続する場合を移項して

$$5^2-4^2=3^2$$
$$13^2-12^2=5^2$$
$$25^2-24^2=7^2$$
$$41^2-40^2=9^2$$

の形の式 $c^2-b^2=a^2$ を考える。右辺は $3,5,7,\cdots$ と奇数から始まって 2 ずつ増えるので奇数であることを指摘した後，左辺の $5,13,25,\cdots$ の増え方に着目する。その増分は $8,12,16,\cdots$ と 4 の倍数で増えているので c は $4n+1$ の形であるとする。さらに，n の値は，$5^2-4^2=3^2$ を 1 段目として k 段目にある場合は，1 から k までの総和 $1+2+\cdots+k$ である。たとえば，$41^2-40^2=9^2$ は 4 段目にあるので，

$$4n+1=4(1+2+3+4)+1=41$$

であるとしている。実際，$a=2k+1$ とすると，$1+2+\cdots+k=k(k+1)/2$ であるから，

$$c=4n+1=2k(k+1)+1=(a^2+1)/2$$

となるので，この結果も正しい。

M.A. 君は，a,b が連続する場合を考え，次の場合を見出している。

$$3^2+4^2=5^2$$
$$20^2+21^2=29^2$$
$$119^2+120^2=169^2$$
$$696^2+697^2=985^2$$

そして，この数値の現れ方を考察した結果，a は 1 つ前の値を 6 倍した値から，2 つ前の値から 2 を引いた値を引けばよいこと，そして，c は 1 つ前の値を 6 倍した値から，2 つ前の値を引けばよいことを発見する。たとえば，

$$119=20\times 6-(3-2)$$
$$169=29\times 6-5$$

である。一般に，$a, a+1, b$ が三平方の定理を満たせば，$3a+2b+1, 3a+2b+2, 4a+3b+2$ も三平方の定理を満たすことが知られているので [7]，その次の値を $A, A+1, B$ とすると，

$$A = 17a + 12b + 8,\ B = 24a + 17b + 12$$

である。M.A. 君の計算方法では

$$6(3a + 2b + 1) - (a - 2) = A$$
$$6(4a + 3b + 2) - b = B$$

となるので，M.A. 君の結果は正しい。

このように多数の指摘がなされたが，その一方では,「120 組も調べたのに，規則性はさっぱり分かりませんでした」と書いてきた学生もいる。

4. 「自由研究」に関する学生の感想

冬季課題 [6] は，三平方の定理という良く知られた定理について考察するものであるが，前節のように実に多くの事柄を学生は指摘してきた。他の課題でも，同様に多数の指摘がなされている。学年末の最後の時間には，1 年間の授業の感想をアンケート調査した。その自由記述欄で，3 回行った自由研究の感想について記述するよう求めたところ，168 名中 142 名から記述が得られた。その内容は，大きく分けると次のように分類される。

(1) 楽しかった，おもしろかった，良かった
(2) 勉強になった，理解が深まった
(3) 大変だった・面倒だったが，おもしろかった・勉強になった・良かった
(4) 分からなかった，難しかった
(5) その他の内容

以下に，その代表的なものを紹介する。

(1) 「楽しかった」「おもしろかった」

- 1 つの発見を見つけるまでに時間がかかるが，発見したときの喜びが大きい。
- 今までは規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった。
- 自由研究によって，数学の法則性を見つけることの楽しさを知り，また，友人との協調性も高めることができました。
- 始める前は，すっごいイヤなんだけど，一度始めてみると，こうすればもっとよくなる，この場合はどうなんだろう？と，どんどんその課題にのめり込んでいました。

(2) 「勉強になった」「理解が深まった」

- 今までは，ただ計算し，理解せずに書いていたが，自由研究によって理解しながら解けるようになった。
- 自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった。
- 自由研究をやることで，数学的なことを発見することができたし，レポートをまとめることで国語の文章作成の勉強にもなった。
- 今までに学習してきたことを復習しながら，いろいろ応用させていけるので自分のためになった。

(3) 「大変だったが，勉強になって良かった」

- 難しかったけど，進めていくうちにもっと調べたいという考えが出てきて，時間がもっとあれば，と思った。
- 始めは面倒だと思っていても，いざ始めると没頭してしまった。
- いろいろな法則を見つけたりするのが大変だったけど，柔軟な考えを養うことができたので良かった。
- 自由研究は，出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った。

(4) 「難しかった」「分からなかった」

- 全々分からなかった。
- 自分なりに考えて取り組んだが，内容が濃くて難しかった。
- 友達と一緒にやって，その友達はどんどん新しい共通点などを発見したのに，自分はほとんどできなかった。
- 問題の意味から答え方まで，何をやったらいいのか，分からなくて最悪だった。

(5) その他の感想

- 意外に法則性が沢山あるので，凄いと思った。
- 最初はとまどったが，これをやることによって仕組が分かり，意欲も高まると思いました。
- 自由研究をやって，今まで考えなかった考え方をするようになった。
- 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見することができるようになったと思う。

5. 成績との関連性

この自由研究では，前節で示したように非常に

多くの学生が数学に関する事柄を「発見した喜び」を語り,「数学のおもしろさ」を実感した。ここで，この学生の感想と成績との関連性をみてみよう。数学の成績は，著者の担当科目である基礎数学 I の年 4 回の試験点の平均点として，それをもとに 4 段階に区分した。表 1 は，この成績区分と，前節で示した自由研究に対する感想との関連性をみたものである。

表 1 を見ると,「(4) 分からなかった，難しかった」とする学生は全体の 2 割未満であり必ずしも成績が下位にあるわけではない。むしろ，成績の上下にはよらないことが分かる。他の (1)〜(3) の感想に対しても同様であり，それらは成績の上下とは関連していない。

図 1 と図 2 は，自由研究に対する感想を，学年末に行ったアンケート調査の質問項目からみたものである。図 1 を見ると，成績の上下によらず 4 割以上が「自由研究はおもしろかった」と答えている。図 2 でも同様に，成績の上下によらず，どの区分でも 4 割以上が「自由研究をやってみて，数学的なことで新しい発見があった」としている。

表 1： 成績区分と自由研究に対する感想

成績	自由研究に関する感想 (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
上位	17	6	9	5	3	40
中上	12	7	9	10	1	39
中下	11	6	5	5	4	31
下位	11	3	10	7	1	32
計	51	22	33	27	9	142
%	35.9	15.5	23.2	19.0	6.3	100

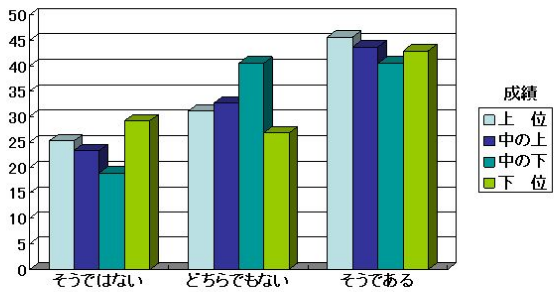

図 1： 自由研究は，おもしろかった

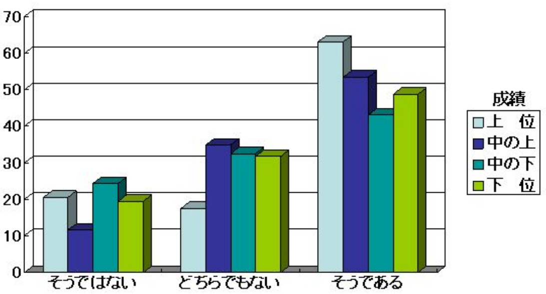

図 2： 数学的なことで新しい発見があった

では，学生が発見した内容とはどの程度の内容なのか，その数学としての到達度をみてみよう。学生から指摘のあった内容について,「よくそこまで気づいた」という内容を到達度が「高い」, ちょっと考えればすぐ気づく内容を到達度が「低い」，それ以外の指摘を「中間」として区分した。指摘内容が誤っている場合でも，それなりの根拠をもとに指摘されている場合は，その根拠の内容により到達度を判断した。なお，著者の判断結果は，本校の他の 3 名の数学教員にも見てもらい，2 名以上の教員から指摘のあった項目については到達度を変更した。そのような項目は全体の約 1 割である。

表 2 は，三平方の定理に関する課題について，このような到達度と成績との関係をみたものである。表 2 を見ると，成績と数学の到達度との間に若干の関連性は認められるものの，それほど大きなものではない。このうち，成績下位で到達度の高い 3 名の学生は，次のような指摘をしている。

A 君は,「ただ単に数字を代入していくだけでは時間がかかるので，仕組みを考えることにした」と述べ，3 辺のうち 2 辺が分かれば他の 1 辺は自ずと分かるから，変数 a, b と和・差・積・商・累乗などを駆使して $3^2+4^2=5^2$ を表せないかを考え，$a=2,\ b=1$ のとき

表 2： 成績区分と指摘内容の到達度

成績	数学としての到達度 低い	中間	高い	計
上位	4	15	8	27
中上	5	13	6	24
中下	7	11	4	22
下位	6	12	3	21
計	22	51	21	94
%	23.4	54.3	22.3	100.0

$$2^2-1^2=3,\quad 2\cdot 2\cdot 1=4,\quad 2^2+1^2=5$$

であることに気づく。そして，そのことから

$$x=a^2-b^2,\quad y=2ab,\quad z=a^2+b^2$$

を見出し，a, b に具体的な値を代入して次々に三平方の定理を満たす式を作り出している。

B 君は，連続する自然数の 2 乗の値を 3 から 26 まで書き出して，それらの差を計算する。そして，その差は奇数 $(2n+1)$ であることに気づ

き，そのことから，適当な奇数 a に対して連続する数の平方の差が奇数 a^2 となる数を見つければ，その連続する数が b, c であるとする。そして，a^2 に対して b, c は具体的には

$$b^2 = (a^2 - 1)/2, \quad c^2 = (a^2 + 1)/2$$

であることを見出している。

C 君は，$a^2 + b^2 = c^2$ において b, c が連続する場合の式を書き出した上で，それらの規則性について考える。そして，b は 4 の倍数であることに気づいた上で,「すべての式にあてはめることができる式を求めることができた」として，

$$(2n+1)^2 + (2(n^2+n))^2 = (2(n^2+n)+1)^2$$

を見い出している。この式が唐突に現れた印象はあるが，文面を読む限りは自分で気づいた式のように思われる。

このように，自由研究を考えることで，大多数の学生が数学的な事柄について何らかの気づきを得ており，そのような気づきを得ることができたことへの喜びを語っている。その喜びは数学に関する一般的な規則性を発見できたことから来ていると思われるが，それを成績の上下によらず，成績が下位の学生でも感じることができたことの意義には大きいものがあるだろう。適切な課題を継続的に与えていけば，学生の数学に対する見方が大きく変わることも期待され，数学教育における新な可能性が示唆されているように思われる。

6. おわりに

学生に課した課題の多くは，数式処理のできるグラフ電卓があって始めて可能になったものである。それを利用した自由研究で，多くの学生は数学的な事柄に関して何らかの気づきを得て，数学を考えることの「おもしろさ」「楽しさ」を実感した。このような形で，じっくり考えて何かに気づくことの喜びを何度も体験させることは，数学のみならず他の科目での取り組みにも影響を与えることが予想される。創造性も，このような積み重ねの中から育まれてくるのではないだろうか。1 年生なので自分の発見に証明を与えている学生は少ないが，このような課題を継続的に課していくことで，証明への関心も高まっていくことが期待される。

参考文献

1) 公庄庸三：数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.7，No.1，pp.146–150，2000
2) 阿蘇和寿：数学の授業における学生の探究活動–テクノロジーの効果的な活用に向けて–，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.9，No.1，pp.31–50，2003
3) 長水壽寛他 6 名：テクノロジーを用いた数学教育の理論と実践，論文集「高専教育」，第 26 号，pp.339–344，2003
4) 島田茂編：新訂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」，東洋館出版，平成 7 年
5) 梅野善雄：数式処理電卓を利用した微積分教育の改善，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.8，No.1，pp.13–30，2001
6) 梅野善雄：グラフ電卓を利用したグラフアートと関数理解，論文集「高専教育」，第 27 号，pp.191–196，2004
7) B. シェルピンスキー：ピタゴラスの三角形，東京図書，p.21，1993 年