平成16年度～平成17年度 科学研究費補助金　基盤研究 (C)(2)
研究成果報告書

高専における試行錯誤を伴う数学教材の開発・評価に関する実践的研究

(課題番号 16500566)

平成18年3月

研究代表者　梅野善雄
(一関工業高等専門学校・一般教科・自然科学系・教授)

平成16年度～平成17年度 科学研究費補助金　基盤研究 (C)(2)

研究成果報告書

高専における試行錯誤を伴う数学教材の開発・評価に関する実践的研究

(課題番号 16500566)

平成18年3月

研究代表者　梅野善雄

(一関工業高等専門学校・一般教科・自然科学系・教授)

科学研究費補助金　(基盤研究 (C)(2))

高専における試行錯誤を伴う数学教材の開発・評価に関する実践的研究

(課題番号　16500566)

研究組織

代表者：梅野　善雄
(一関工業高等専門学校・一般教科・自然科学系・教授)

研究費

平成 16 年度	500(千円)
平成 17 年度	500(千円)
合計	1,000(千円)

研究発表

1. 学会誌等

(1) 梅野善雄：3 次関数の性質に関する高専 1 年生の自由研究，数学教育研究 第 7 号，71–83 頁，平成 17 年 1 月

(2) 梅野善雄：試行錯誤で「三平方の定理」を考える，数学教育研究 第 8 号，113–125 頁，平成 18 年 1 月

(3) 梅野善雄：数学教育における創造力を育む試み，論文集「高専教育」第 29 号，135–140 頁，平成 18 年 3 月

2. 口頭発表

(1) 梅野善雄：数式処理電卓を利用した自由研究 (1)，日本数学教育学会 第 87 回算数・数学教育研究 (鹿児島) 大会，平成 16 年 8 月

(2) 梅野善雄：3 次・4 次関数に関する高専 1 年生の発見，T^3Japan 第 8 回年会 (東京大会)，平成 16 年 8 月

(3) 梅野善雄：3 次・4 次関数の極値に関する高専 1 年生の発見，数学教育の会 (2004 年夏の集会)，平成 16 年 9 月，学習院大学

(4) 梅野善雄：数式処理電卓を利用した自由研究 (2)，日本数学教育学会 第 87 回算数・数学教育研究 (長野) 大会，平成 17 年 8 月

(5) 梅野善雄：創造力を育む数学教育の試み，平成 17 年度高専機構主催教育教員研究集会（伊勢市），平成 17 年 8 月

(6) 梅野善雄：試行錯誤で「三平方の定理」を考える，教育の会 (2005 年夏の集会)，平成 17 年 9 月，学習院大学

目 次

研究組織 iii
研究発表 iv

第 I 部　研究成果報告 **1**

第 1 章　本研究に至るまでの経過 **3**
1.1 はじめに 3
1.2 これまでの取り組み 4
1.3 総括 8

第 2 章　本研究の目的と方法 **9**
2.1 本研究の目的・意義 9
2.2 研究の方法 10

第 3 章　高専学生の行った試行錯誤 **11**
3.1 連分数の値 11
3.2 二項定理 14
3.3 $x^n - 1$ の因数分解 18
3.4 $x^n + a$ の因数分解 21
3.5 三平方の定理 25
3.6 3 次関数のグラフ 27
3.7 絶対値関数のグラフ 32
3.8 曲線で囲まれた図形の面積 34
3.9 グラフ・アートの作成 36

第 4 章　試行錯誤を伴う数学課題に対する学生の感想 **41**
4.1 はじめに 41
4.2 学生に提示した課題 41
4.3 平成 16 年度の学生の感想 42
4.4 成績等との関連性 48

第 5 章　試行錯誤を伴なう課題の評価 **51**
5.1　はじめに 51
5.2　「三平方の定理」に関する指摘事項 51
5.3　評価のための分析項目 53
5.4　評価方法の検討 55

第 6 章　本研究のまとめ **61**
6.1　試行錯誤を伴う数学教材 61
6.2　学生の反応 65
6.3　試行錯誤を伴う数学教材の評価 66
6.4　試行錯誤を伴う数学教材の意義 67

参考文献 **68**

第 II 部　外部発表論文 **71**
3 次関数の性質に関する高専 1 年生の自由研究
— 数学教育研究 第 7 号，71–83 頁，平成 17 年 1 月 73
試行錯誤で「三平方の定理」を考える
— 数学教育研究 第 8 号，113–125 頁，平成 18 年 1 月 87
数学教育における創造力を育む試み
— 論文集「高専教育」第 29 号，135–140 頁，平成 18 年 3 月 101

第 III 部　学生向け配布資料 **109**
数ナビ「TI–89」の使い方 111
夏季休業の課題 118
夏季課題に対する学生の発見 119
平成 16 年度の秋季課題 124
秋季課題に対する学生の発見 125
平成 16 年度の冬季課題 129
冬季課題に対する学生の発見 130
数ナビに関する意識調査 134
数学に関する意識調査 136
平成 17 年度の春季課題 137
平成 17 年度の夏季課題 139
春季・夏季課題に対する学生の発見 141
数学に関する意識調査 (2) 147
冬季休業課題 149

第Ⅰ部

研究成果報告

第1章　本研究に至るまでの経過

1.1　はじめに

初等教育や後期中等教育における数学の学習内容は，最近の一連の学習指導要領の改革により大きく変化してきた。それに対して工業高等専門学校の数学の学習内容は，高専創設時と比べて多少の変動はあったものの小中高ほどの大きな変化はみせていない。高専では，専門科目の学習が本格化する3年までに微分積分の基礎知識を一通り終えていなければならないので，数学の学習内容を大きく変更する余地が少ないためと思われる。また，微分積分を学習するには，それ以前に数列や主要な初等関数について学んでおかなければならない。そのせいもあってか，授業は定められた学習項目を次々に教え込むスタイルの授業になりがちである。既習事項をもとにして総合問題を課すような時間的余裕は，なかなか取れないのが実情である。

一方，欧米の数学教育に目を向けると，欧米では数学教育にグラフ電卓を活用する方向に転換しつつある。たとえば，2000年に発表されたNCTM(全米数学教師協議会)のSTANDARDSでは，グラフ電卓を活用した教育が推奨されており[1)]，数学の授業でグラフ電卓の使用は常識化していると言われる。たとえば，米国において高校在学時に大学の微積分の単位が認められるAP Calculusのコースでは，グラフ電卓の浸透率は90%とされている[2)]。日本でも1990年代後半にグラフ電卓を数学教育の中で活用する研究が科学研究費補助金を利用して行われた[3, 4)]。関連する図書も発行されたが[5)]，その後の大きな普及には至っていない。今だに，一部の教師だけの関心事に留まっている。

そのような中でグラフ電卓自体の機能も向上し，高度の数式処理機能を持つようになってきた。その機能に著者が触れたのは平成10年に筑波大学で開催された「第3回：数学におけるテクノロジーに関するアジア会議[6)]」においてである。その機能を目の当たりにして実際に購入し，その機能の一つ一つを時間をかけて確かめていった。そして，高校の微積分から大学の応用数学までを守備範囲とする高専の数学教育においてこそ，この電卓はより大きな効果を発揮するだろうことを確信した。平成11年度の年度末には，幸いにも数式処理電卓TI–89を1クラス分を購入することができた*。そこで，この電卓の数学教育における効果を確認すべく，次節で述べるような取り組みを行った。

---

*この電卓は級数展開，微分方程式の解析解，さらには行列の固有値の計算など高度の数式処理機能を持つ。石川高専の阿蘇和寿[7)]は，この電卓は単なる計算ツールとしてではなく，数学上の思考のツールとして利用されるべきであるとし，数学ナビゲータ(略して「数ナビ」)と呼ぶことを提唱している。この提案に著者も同意し，本報告書では利用する数式処理電卓TI–89を「数ナビ」と呼ぶことにする。

1.2　これまでの取り組み

1.2.1　平成 12 年度の取り組み

高専の 2 年生に数ナビ (数式処理電卓 TI–89) を 6 月から翌年の 2 月末まで，約 9ヶ月間貸与した。以下に，この数ナビを学生に利用させて得られる典型的な教育効果を示す [8]。

(1) グラフ機能による一目瞭然の理解

数ナビのグラフ機能を利用すると，従来は教師が黒板で説明してきた内容を学生自身に一目瞭然に気づかせることができる。たとえば，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を例にとる。図 1 は，分子と分母の関数の原点付近のグラフである。これを何度か拡大すると，図 2 のようなグラフになり 2 つのグラフが一直線で表示される。$y1=\sin x$ と $y2=x$ との比 $(y3)$ が 1 になることは一目瞭然であろう。図 3 により座標データを表形式で表示すれば，数値上の理解を得させることもできる。多くの学生は，この作業を通して比が 1 になることに自分で気づいている。

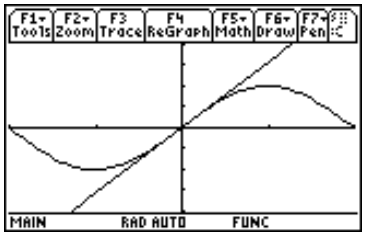


図 1

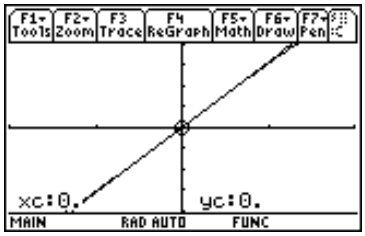


図 2

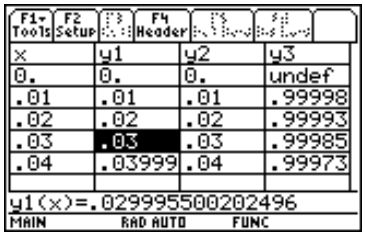


図 3

(2) 数式処理機能の利用による数学的な気づき

数ナビの数式処理機能機能を利用させることで，いろいろな計算の中に含まれる数学的性質に気づかせることもできる。たとえば，合成関数の微分公式を以下の手順で考えさせた。

(1) $y=(3x-5)^4$ などを，$y=f(u),\ u=g(x)$ と 2 つの関数に分解させる。
(2) $y=f(u), u=g(x)$ の導関数を自分で計算させる。
(3) 関数 $y=f(g(x))$ の導関数を，電卓の数式処理機能を利用して求めさせる。
(4) 導関数 dy/dx, dy/du, du/dx の間にどのような関係があるかを考えさせる。

この手順により，約半数の学生が $dy/dx=dy/du\cdot du/dx$ に気づいた。中には，3 つに分解する場合も同様であることを自分で確かめ，自分の発見に「すごい」とほくそえんでいる学生もいた。

(3) 高度の数学的内容に対する真の理解

グラフ機能と数式処理機能を併用することで，従来はなかなか真の理解を得させることが困難であった内容について，その理解を深めさせることができる。次頁の図は，数ナビを利用して和の極限としての定積分の定義や微積の基本定理に気づかせようとしたものである。操作手順はプリントにまとめて学生に配布した。その手順にしたがい考察させることにより，平成 12 年度の試行ではクラスの 1/4 の学生が積分して微分すると元の関数に戻ることに気づいている。

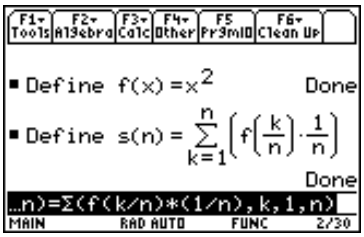


図 4

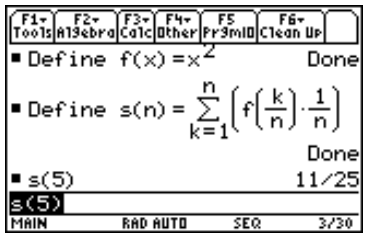


図 5

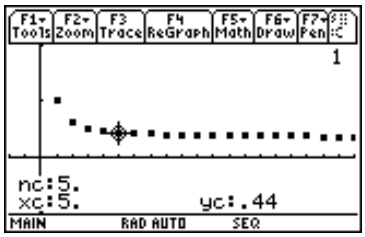


図 6

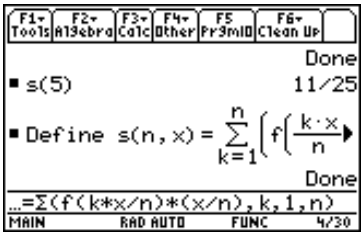


図 7

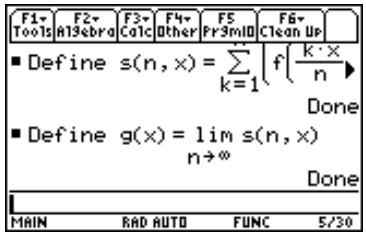


図 8

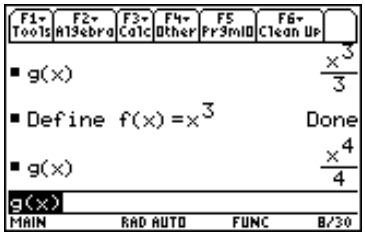


図 9

図 4 で，$f(x) = x^2$ に対して区間 $[0, 1]$ を n 等分した場合の和を $s(n)$ と定義し，事前に幾つかの n に対する和 $s(n)$ を自分で計算させる。図 5 は，その答え合わせとして $s(n)$ の値を表示させたものである。図 6 は数列 $s(n)$ の収束の様子を示している。図 7 は区間 $[0, x]$ で同じことを考えて $s(n, x)$ を定義し，図 8 で $n \to \infty$ のときの極限を $g(x)$ と定義した。図 9 では，$f(x)$ をいろいろな関数に変えて $g(x)$ を表示させている。いろいろな $f(x)$ に対して $g(x)$ を表示させることにより，$f(x) = x^n$ のとき $g(x)$ がどのように表されるかや，$g'(x) = f(x)$ であることに気づかせることができる。

このような形で，この年度の授業ではできるだけ数ナビを積極的に利用するようにした。そして，年度末に数ナビを利用した数学の授業に関する質問紙調査を行い，以下の結果を得た。

(1) 数学の授業への興味・関心が増加
「この電卓を使用した授業はおもしろい」と思う者が，電卓の使用期間が長くなるにつれ増加した。(7 月：39.2%，10 月：46.5%，2 月：49.3%)

(2) 成績上位学生への効果
成績上位学生の 43.5%は，この電卓の使用で「理論的なことへの関心が高まった」と答えている。

(3) 成績中位学生への効果
成績中位学生の数学の学習に対する不安感は有意に減少した。

(4) 成績下位学生への効果
成績下位学生の 52.4%は，この電卓を使用するようになって,「難しい計算もやってみようという気になる」と答えている。

(5) 数学理解の促進効果
成績の上下によらず，どの層の学生も，半数以上は，この電卓を使用すると「数学の理解がさらに深められる」と答えている。

1.2.2　平成 13 年度の取り組み

この年度では，1 年生 4 クラスの関数を担当した。4 クラスに貸与できるだけの数ナビは無いので，通常の黒板による説明をしながら授業を行った。そして，三角関数までを一通り終えた 1 月下旬に，不足分は販売代理店による短期間の無償貸与制度を利用して 1 年全クラスの学生に数ナビを貸与した。そして，残りの 1ヶ月間に関数の総復習をさせる中で，単なる「答え合わせ」として利用させて以下の結果を得た [9]。

(1) 電卓の操作に対する習熟度と成績の良し悪しとの間には強い関連性がある。
(2) 成績が下位の者ほど、数ナビの利用で「数学が前よりも分かるようになった」(図 11)、「数学の理解が深められる」(図 12) と感じている。
(3) 成績下位学生は「数学が分かるようになるためのツール」として電卓を使用している。
(4) コンピュータ操作を苦手とする学生は、数ナビの操作も苦手としている。

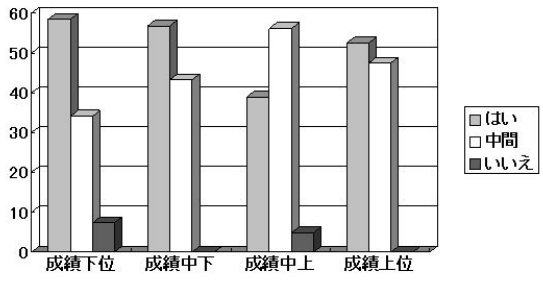


図 11: 数学が前より分かるようになった

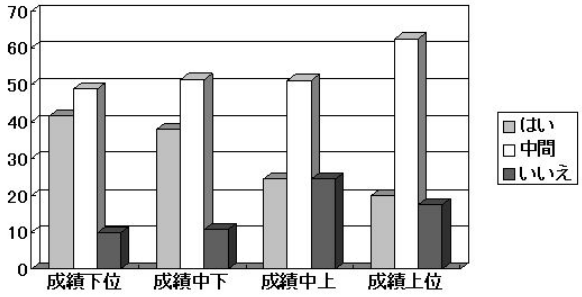
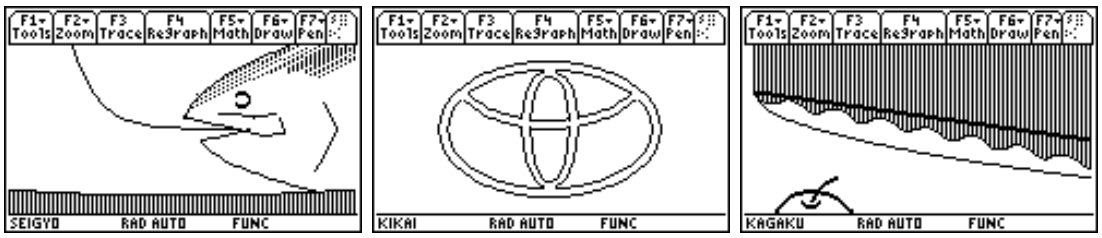


図 12: 数学の理解が深められる

1.2.3　平成 14 年度の取り組み

この年度も，1 年生 4 クラスの関数を担当した。通常の黒板による説明をしながら授業を行い，三角関数のグラフを終えた 12 月中旬に不足分は販売代理店の貸与制度を利用して学生に貸与した。関数の総復習をさせる中で前年度と同様に「答え合わせ」として利用させ，数ナビの利用により数学に関してどのような理解を得たのかを調査した [11]。しかし，数ナビの利用で得られた理解の内容は個々の学生により異なり，一般的な傾向は見出せなかった。理解できない部分は学生により異るためと思われる。

また，復習をかねて関数のグラフをつなぎ合わせて絵 (アート) を作成させたところ，多くの学生が興味・関心をもって根気強く取り組み，下図のような自分の作品を完成させた。



事後に感想を書かせると，大部分の学生は「大変だったけどおもしろかった」「勉強になった」「達成感があった」などの感想をのべている。グラフ・アートの作成では，学生は作成しようとする図柄と共に，以下の事柄も自分で考えなければならない。いずれも関数を総合的に理解していることが必要なので，関数の総復習として適切な題材と思われる。

(1) 作成しようとする図形の構成曲線を描くには，どのようなタイプの関数のグラフを利用すればよいかを判断すること。
(2) そのグラフで図形の該当部分を表示させるには，どのような平行移動や対称移動を行えばよいかを考えること。
(3) 係数等を適切に決めて，その関数の式を具体的に決定すること。
(4) 複数のグラフで構成されるときは，その接続箇所の座標を求めること。

1.2.4 平成 15 年度の取り組み

平成 14 年度の年度末に 1 学年分の数ナビを購入できたので，この年度では 7 月中旬に数ナビを 1 年全クラスの学生に貸与した。そして，数ナビを利用した試行錯誤を通して数学的性質を発見させる課題を出した。学生からは実に多様なレポートが提出され，こちらの予想を上回る発見がなされている [12]。

(1) $b-a=c-b$ のとき，$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフの
　　山の頂点の座標は　$(b-0.57735(b-a), 0.3849(b-a)^3)$　であり，
　　谷の最下点の座標は　$(b+0.57735(b-a), -0.3849(b-a)^3)$　である。
(2) $y=(x-a)^2(x-b),\ (a<b)$ となる式で，
　　谷の最低値の座標は　$(a+0.66667(b-a), -0.148148(b-a)^3)$　であり，
　$y=(x-a)(x-b)^2,\ (a<b)$ となる式で
　　山の最大値の座標は　$(a-0.666667(b-a), 0.148148(b-a)^3)$　である。
(3) $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，

$$y=x^3-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}\,x$$

　のグラフを，x 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$，y 軸方向には

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9}-abc$$

　だけ平行移動したものである。
(4) $X=\dfrac{a+b+c}{3},\ \alpha=-\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ とおくと，$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の変曲点の座標は $(X,(X-a)(X-b)(X-c))$ であり，
　　極大値は　$\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}, \left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)\right)$
　　極小値は　$\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}, \left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)\right)$
　のときである。

(5) $y=(x-a)(x-b)^3$ の最小値を与える点は，$\left(\dfrac{3a+b}{4},\ -\dfrac{3^3\times(a-b)^4}{256}\right)$ である。

(6) $b-a=d-c$ のとき $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ の最小値は，次式で与えられる。

$$-\left\{\frac{(b-a)(c-a)}{2}\right\}^2$$

数ナビに式を定義すればグラフが簡単に表示されるので，学生は成績の上下によらず何らかの規則性について考察できる。成績上位の学生の場合は，自分で思考を押し進めて数学の世界にはまっていく学生も出てきた。数ナビを利用した試行錯誤の数学教育における有効性について，再認識させられた思いがある。

1.3 総括

以上で紹介したように，個々の学生に数ナビを貸与して利用させることで，従来の数学の授業では得られないような理解を学生に得させることができる。学生の反応を調べると，成績の上下や数学の好き嫌いの区別にかかわらず，また，数ナビを使いこなすことができたかどうかにもかかわらず，多くの学生は「この電卓を利用して数学の理解が深められた」と答えている。この電卓を成績上位の学生が思考のツールとして活用した場合には，学生は相当高度の知見にまで到達可能と思われる。反対に，成績下位の学生は，数ナビを通して教師には聞けないような疑問も即座に解決することができる。

数学教育に関しては,「数学離れ」や「基礎学力の低下」などがいろいろな調査から明らかにされているが，未だ有効な対応策は打ち出されていない。数ナビを活用して得られた数学教育上の効果は，現在の数学教育が抱える困難な状況に対して，有効かつ具体的な改善策を与えるものといえるのではないだろうか。特に，試行錯誤を伴なう課題では，数学に対する学生の興味・関心や，学生の潜在的な能力が大きく開花する可能性が高まることが期待される。そのような課題を継続的に提出させるには，問題の収集・開発の他に，提出されたレポートの評価方法に関する研究が不可欠であることから，本研究費の申請に至ったものである。

第2章　本研究の目的と方法

2.1　本研究の目的・意義

本研究は，高専1年生を対象に，個々の学生の能力や関心の向け方により様々な形態の解答の仕方があり，しかも，その解答を考えるにはある程度の試行錯誤（一部でテクノロジーも利用）が必要であるような数学教材の収集・開発を行うこと，そして，そのような課題に対して提出されたレポートに対する評価方法を確立することを目的とする。

高専における通常の数学授業は，教師の説明・例題提示等を経て，類似問題の演習を課す形の授業が多いが，本研究では，まず，解答の仕方が一通りとは限らないような問題を収集・開発する。その課題では，学生は自らの能力や問題意識によりさまざまな角度から，さまざまな答え方が可能である。その課題を考える中では，数学的な事柄に関して学生はいろいろな試行錯誤が必要になる。そのような試行錯誤をすること自体が困難な学生も予想されるので，自力での計算が困難な場合や複雑な関数のグラフ表示などでは，テクノロジーとして数式処理電卓 (数ナビ) の利用も許容する。それにより，学力の優劣を問わず，全ての学生が数学的な事柄に関して何らかの「気づき」を得る可能性が期待できる。

高専第1学年のうちから，このような試行錯誤の中から何かを発見する喜びや，一つの事を継続して考え抜く経験をさせることは，高専5年間の学習を継続する上で，特に創造性育成の観点において重要である。また，学生の気づいた内容をレポートにまとめさせて提出させることは，数学的な事柄に対するプレゼンテーション能力を育成することにも繋がる。

この研究では高専1年生を対象とするが，高専第1学年の内容は大部分が高校における内容であるので，この研究の成果は高校の数学教育にも還元できる内容である。

数学教育において答え方や解が一通りとは限らない問題は「オープンエンドな問題[4)]」と呼ばれているが，そのような問題に関する研究は主に小中学校におけるものが多く，高専のような高等教育機関における研究は少ない。数学上の試行錯誤にテクノロジー (数式処理電卓) を活用させることは，数学教育の幅を大きく広げることにもなると思われるが，その活用方法や教育上のノウハウに関しても不明のことが多い。

高専では，数学の必要性は明らかであり，学生も数学やテクノロジーには強い関心を持つ学生が多い。数学においてこのような試行錯誤を伴う課題は，高専学生であれば十分に対応できると思われる。特に，工学現象との関連において問題を考察させることができれば，学生が感じている数学と工学との間の垣根を取り払うことにもなろう。

2.2　研究の方法

初年度は，参考文献を検討しながら問題の収集・作成を図ると同時に，幾つかの課題に対しては授業での実践を行い，提出されるレポートの評価方法についての基礎データを収集する。具体的には，以下のようなスケジュールとする。

(1) 高専新入生に，5 月の連休明けに数式処理電卓を貸与して，主要な使用方法を説明する。
(2) 試行錯誤が必要な課題を課しても，学生は数学の問題でそのような経験はほとんど無い。まず，数学的な内容に関して自分の考えをレポートにまとめる訓練が必要である。
(3) そこで，最初は，単純な使用方法だけで考察可能な探究課題を課し，提出されたレポートをもとに,「自分の考えをどのように記述すべきか？」という，書き方に関する指導を行う。たとえば，入学直後であっても，テクノロジーを利用することで $(x+1)^n$ の展開式の係数について考察させることが可能である。
(4) 提出されたレポートでは，他の学生の気づいた内容を整理して全員に紹介する。自分の考えが紹介されることや，他の学生の考えを知ることは，次の課題が与えられたときの探究心を刺激すると思われる。
(5) レポートを提出させる際には，その課題に対する興味・関心の度合や，考察にあたっての難易度，テクノロジー利用の有無などの情報も収集し，内容の適切さを検討する際の資料とする。
(6) 提出されるレポートは，その評価をどのような観点からどのように行うべきかを検討するため，レポートのまとめ方や数学としての内容などについて，さまざまな観点からの情報を収集し，評価にあたっての観点項目を抽出したい。

2 年目は，初年度に収集・開発した課題について，初年度の実践で得られた学生の反応やその分析結果などをもとに，課題の内容，表現方法，その説明の仕方などに工夫を加え，同様の実践を行う。特に，初年度の分析で考案されるであろう評価方法が適切かどうかを実際のレポートで確認し，必要があればそれを修正する。そして，2 年間の成果を報告書にまとめたい。

第3章　高専学生の行った試行錯誤

3.1　連分数の値

3.1.1　この課題の意図

1年生は，式の計算の箇所で繁分数の計算の仕方を学ぶ。その計算の仕方をなかなか修得できない学生もいるので，そのような繁分数への関心を持ってもらうと同時に，複雑そうに見えながらある程度の規則性を含む内容として，次の連分数の値を計算させた。平成16年度の1年生の夏季休業の課題 (p.118) とし，複数の課題の中から選択できるようにした。

繁分数の値

次の繁分数の値を求めてみてください。そして，同様のことをもうちょっと続けてください。そして，一般に，どのような値になるかを考えてください。たとえば，3番目の値の場合は,「$1/(1+1/(1+1/(1+1)))$」となります。数ナビで確認するときは，括弧の対応関係に注意してください。

$$\frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

3.1.2　連分数の規則性に関する学生の発見

この課題は，32名の学生が選択した。この問題を考えるには，まず，できるだけ多くの値を計算してみることが必要である。次のような値となる。

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \frac{144}{233},\ \frac{233}{377},\ldots$$

この値を見ながら，その規則性について考えることになるが，選択した学生のほぼ全員が分子と分母の和が次の分数の分母であることに気づいた。また，分母が次の分数の分子になっていることも，多数の学生から指摘されてきた。しかし，他の性質については，それぞれ数名からの指摘に留まった。具体的には，以下のような指摘である。

- 最初の分数 $\frac{1}{2}$ が分かるだけで，他の分数を次々に求めることができる。
- 隣りあう2つの分数の分子の和と，分母の和は，その次の分数の分子と分母になっている。したがって，最初の2つの値が分かれば，次々と値を求めることができる。

- それぞれの分数の分母にある $1+\cdots$ の $\cdots$ の部分は，1 つ前の分数の式と同じ式である。したがって，たとえば $\dfrac{8}{13}$ の次の分数は次のように求められる。

$$\frac{1}{1+\dfrac{8}{13}}=\frac{13}{13+8}=\frac{13}{21}$$

- 1 以外の自然数で考えると，分子と分母の和が次の分数の分母になるということは成立しない。実際,

$$\begin{array}{ll}(2\text{ にした場合}) & \dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{7},\ \dfrac{14}{19},\ \dfrac{19}{26},\ \dfrac{52}{71},\cdots \\ (3\text{ にした場合}) & \dfrac{6}{7},\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{27}{34},\ \dfrac{34}{43},\ \dfrac{129}{163},\cdots\end{array}$$

- 1 の代わりに自然数 a で考えると，最初の値は a がどんな値でも $\dfrac{1}{2}$ である。
- 1 以外の自然数 a で考えると，分母が次の分数の分子になることと，分母の a 倍が次の分数の分子になることが交互におきる。
- 1 以外の自然数 a で考えると，前の分数の分母が次の分数の分子になっているとき，前の分数の分母の a 倍と分子の和が次の分数の分母になり，前の分母の $a+1$ 倍と分子の和は，2 つ目の分数の分母になる。
- 数の大小を比較すると，奇数番目の値はその前後の値より小さく，偶数番目の値はその前後の値より大きい。つまり，次のような状況になっている。

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}>\frac{3}{5}<\frac{5}{8}>\frac{8}{13}\cdots$$

- 1 だけではなく，どこか 1 箇所を 2 にしても類似の規則性がある。
  (注) この学生は，以下のタイプについて，同様のことを考えている。

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \frac{1}{2+\dfrac{1}{1+1}},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+2}}$$

平成 17 年度の 1 年生の指摘事項

平成 16 年度は，最初の分数を $\dfrac{1}{1+1}$ としてしまったので，平成 17 年度の夏季休業の課題 (p.140) では $\dfrac{1}{1}$ から始まるようにした。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \frac{144}{233},\ \frac{233}{377},\cdots$$

この値に関して，平成 16 年度に指摘された事柄以外では，次のことが指摘されている。

- 前の値を x とすると，次の分数は $\dfrac{1}{1+x}$ である。
- $\dfrac{B}{A}$ の次の分数は $\dfrac{A}{A+B}$，$\dfrac{B}{A}$ の前の分数は $\dfrac{A-B}{B}$ である。

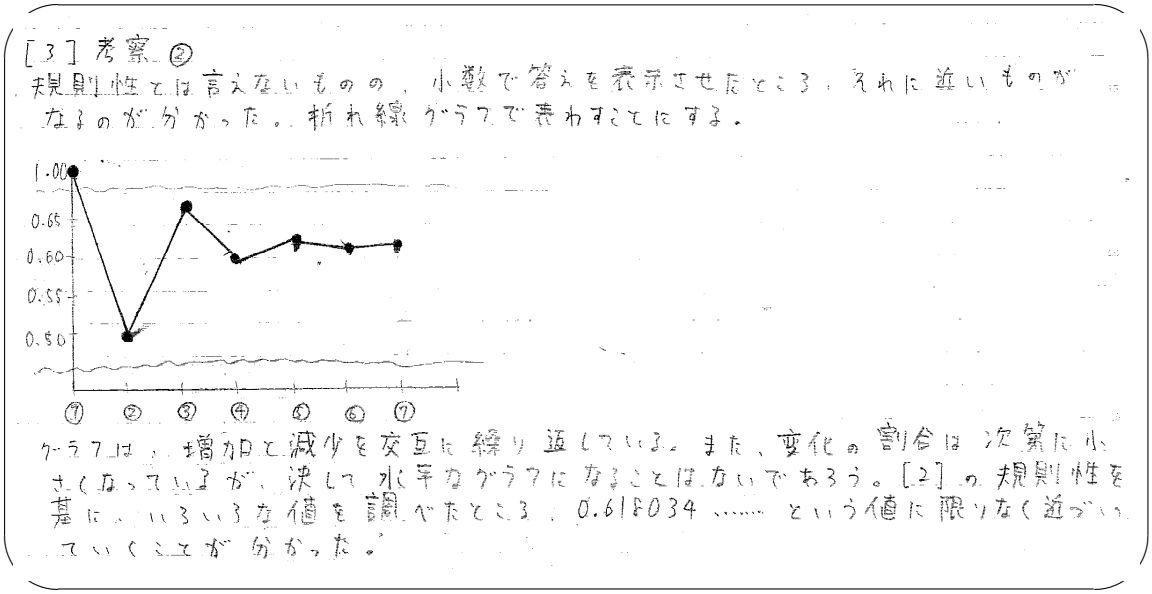
- n 番目の分数を a_n と表すと，$a_n = \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$ という関係にある。分母が次の分数の分子になり，分数と分子の和が次の分数の分母になるは，$a_{n-1} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，

$$a_n = \frac{1}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{(a_{n-1}\text{の分母})}{(a_{n-1}\text{の分子})+(a_{n-1}\text{の分母})}$$

  となるからである。
- 最初の分数を $\dfrac{b}{a}$ とすると，その続きの分数は次のようになる。

$$\frac{b}{a},\quad \frac{a}{a+b},\quad \frac{a+b}{2a+b},\quad \frac{2a+b}{3a+2b},\cdots$$

- 現れてくる数字の並び方 $1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$ は，フィボナッチ数列である。
- 先に行くにつれ，増加・減少の幅がどんどん狭まっていく。
  このことを，値が増加・減少を繰り返すグラフを書いて確認した学生もいる。
- 1 番目，2 番目を，それぞれ a_1，a_2，$\cdots$ のように表すと，$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > a_6 < \cdots$ となっているが，偶数番目だけで考えると，$a_2 < a_4 < a_6 < \cdots$ であり，奇数番目だけで考えると，$a_1 > a_3 > a_5 > \cdots$ である。a_7 の値が分からなくとも，$a_6 < a_7 < a_5$ という関係になる。
- 偶数番目は番号が若いほど小さく (つまり，増加)，奇数番目は番号が若いほど大きい (つまり減少) している。
- ジグザグを繰り返しながら，一定の値になろうとしている。
  先に行くにつれ，ある値 (0.618$\cdots$) に近づいていく。たぶん，無理数だと思う。
  増減を繰り返しながら，0.61〜0.62 の間で安定する。
- 詳しい値は，0.61803398874989 である。



- 隣りあう分数の分母の比は，その分数の逆数と一致する。
  たとえば，$\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{5}$ では，$\frac{5}{3} = \frac{1}{3/5}$ である。
- 分数にしたとき，分母の数はどんどん大きくなる。
- 繁分数で表すとき，1 の個数は 2 個ずつ増えていく。
- 分数に直したとき，分子は奇数・奇数・偶数の順，分母は奇数・偶数・奇数の順に繰り返されている。

3.1.3　教育効果・反省点

単純に 1 だけから構成される分数であるが，フィボナッチ数列と関連する分数であることもあり，非常に多くの指摘がなされてきた。分数に直せば誰でもすぐに気がつく部分を含んでいるため，学生にとっても取り組みやすかったと思われる。

また，文字式に直して考える者や，問題を自分で再設定して考える者など，この種の課題の良さが現れている。平成 17 年度の学生は，最後に次のような感想を記していた。この課題の意図を見事に見抜かれたことになる。

> この自由研究では，何より「気づく」ことが重要な役割をしていたことが分かった。何かに気づくことによって何らかの規則性や証明ができるのであって，そのことが重要な私たちの能力なのだということを思い知らされた。この自由研究で得た，この「気づく」という能力を他のことでもっと伸ばしていきたいと思う。そして，ここで分からなかったことを解明した。

平成 17 年度は小数に直している学生が多いが，それは解説の中で「その分数の値はどのような値に近づいていくのかなどを考えてください。」として，小数の値も調べてみるよう誘導したためと思われる。ただし，小数に直していながら,「だんだん 0 に近づいていく」「0.6 に近づく」「1 に近づいていく」とする学生も少なからずおり，これらの学生は数値の大小に対する感覚が十分ではないように感じられる。

また，数ナビは浮動小数点で 12 桁までしか表示できない。標準では 6 桁の数しか表示しないので,「最終的には 0.618034 に近づいていく」とか「15 番目以降の数値は変わらない」とする学生もいた。電卓としての機能の説明も必要であったと反省された。

3.2　二項定理

3.2.1　この課題の意図

1 年の「数と式の計算」では 2 乗や 3 乗の展開公式を学ぶので，その延長で二項定理を考えさせることができる。組み合わせの記号は学習していないが，この二項定理の中には多くの規則性が含まれており，数式処理機能を利用して展開された式を書き写すだけで誰でも何らかの気づきが得られ，低学年に対してはきわめて適切な題材と思われる。福井高専 [3] など，すでに多数の学校で実践されている題材である。以下は，平成 17 年度の 1 年生に提示した内容である。

$(x+1)^n$ の展開

数ナビを利用すると，具体的な自然数 n について $(x+1)^n$ の展開式を表示させることができる。たとえば，$(x+1)^4$ であれば，基本画面 (HOME を押して現れる画面) で F2 3:expand を押し，入力行 (一番下の行のこと) で expand$((x+1)^4)$ ENTER とすればよい。括弧が 2 つ必要なので注意すること。

この機能を利用して，できるだけ多くの n について $(x+1)^n$ の展開式がどうなるかを調べてください。そして，展開式の係数の現れ方に，何かの規則性がないかどうかを考えてください。展開式をそのまま書かないで，係数だけを書き出した方が規則性を見抜きやすいです。この中には，沢山の規則性が含まれています。2 つ 3 つ見つけただけで安心しないで，できるだけ多くの規則性を発見してください。そして，可能なら，なぜそうなるのか，その理由を考えてください。

3.2.2 二項定理に関する学生の発見

二項定理のついて考察するには，最初にできるだけ多くの n について，その展開式を書き出すことが必要である。その作業を促すために，平成 16 年度の課題提示では「$(x+1)^n$ の展開を，できるだけ多くの自然数 n について行い，その結果を書き写してください。」と明記している。

$$
\begin{aligned}
(x+1)^1 &= x+1\\
(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\
(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\
(x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1\\
(x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\\
(x+1)^6 &= x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1\\
(x+1)^7 &= x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1\\
(x+1)^8 &= x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1\\
(x+1)^9 &= x^9+9x^8+36x^7+84x^6+126x^5+126x^4+84x^3+36x^2+9x+1
\end{aligned}
$$

学生は，このような式を多数書き出して係数の間の規則性を考察した。係数だけを三角形状に書き出せば規則性の発見が容易と思われたが，平成 16 年度の学生には，そのようなヒントは与えなかった。平成 16 年度は，夏季休業の課題 (p.119) とし複数題から選択する形としたが，半数以上の学生 (72 名) がこの課題を選択した。平成 17 年度は，授業中にある程度の考察を行わさせ (p.137)，1 週間後に提出させた。多くの学生が,「最大次数の項は n 次である」「最後の係数は 1 である」「次数が 1 つずつ小さくなる」「係数は左右対称である」「n が奇数のときは中央に同じ係数がある」「x^{n-1} と x の係数はいずれも n である」ことに気づいた。以下は，学生から指摘された事項を，2 年度分まとめたものである。多くの指摘なされていることが分かる。

(1) 項の個数について

- n が偶数のときの項の数は奇数，n が奇数のときの項の数は偶数である。
- n が 1 つ増えると，展開式の項の数も 1 つ増える。
- x を含む項の数は n 個である。
- 展開式の項の数は $n+1$ 個である。

(2) 最大の係数について

- n が奇数のときは最大の係数が 2 つあり，偶数のときは 1 つである。
- 係数が最大になるのは，次数が $\frac{n}{2}$ のときである。$\frac{n}{2}$ が小数のときは，その前後の整数のときである。たとえば，$n=6$ のときは x^3 の項の係数が最大であり，$n=5$ のときは $\frac{5}{2}=2.5$ の前後の x^2, x^3 の項の係数が最大になる。
- n が偶数のときは次数が $\frac{n}{2}+1$ のときの係数が最大になる。n が奇数のときは次数が $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ (小数点以下切り上げ) のときの係数が最大になる。
- n が偶数のときは，中心の項の係数が最大になる。
- n が奇数 $2k+1$ のとき，係数が最大になるのは次数が $n-k$ のときである。
- n が素数のとき，係数の最大値は 2 つある。
- n が偶数のとき，中央の係数は偶数である。
- 指数が奇数のとき，1 番大きい係数を 2 倍すると，次の展開式の係数の最大の数になる。
- 指数が偶数のとき，1 番大きい係数と 2 番目に大きい数を足すと，次の展開式の係数の最大の数になる。

(3) 係数の対称性について

- 降べきの順に展開しても昇べきの順に展開しても係数の並び方は同じである。
- 次数が奇数のとき，$(n+1)/2$ 個ずつに分けると，左右の数が対称に並んでいる。

(4) 係数の値について

- 両端の隣りの係数は指数と同じ数がくる。2 番目の係数は，指数 n と同じである。
- 左から 3 番目の係数 $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$ は，それぞれ $2, 3, 4, 5, \cdots$ ずつ増加している。
- $(x+1)^{n+1}$ の左から 3 番目の係数は，$(x+1)^n$ の左から 3 番目の係数に指数 n を加えたものである。
- 左から 3 番目の係数は，1 から $n-1$ までを足した数である。たとえば，$n=5$ のとき 3 番目の係数 10 は，$1+2+3+4=10$ である。
- 左から 3 番目と右から 3 番目の係数を足して n で割ると，$n-1$ になる。
- n が奇数 $2k+1$ のとき，左と右から 3 番目の係数は，$n=2k+1$ に k を掛けた数である。
- 左から 4 番目の係数 $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$ は，それぞれ $2, 3, 4, 5, \cdots$ ずつ増加している。
- $n=2k$ のとき，左から 2 番目の係数を $k-1$ 倍して k を加えると 3 番目の係数になる。$n=2k+1$ のときは，左から 2 番目の係数を k 倍すると 3 番目の係数にな

る。たとえば，$n = 6 = 2 \times 3$ のときは，$6 \times (3-1) + 3 = 12 + 3 = 15$ が 3 番目の係数であり，$n = 7 = 2 \times 3$ のときは，$7 \times 3 = 21$ が 3 番目の係数である。

- 左から 3 番目の項 (x^{n-2}) の係数は $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ である。
- 左から 3 番目の項の係数は，左から 2 番目の項の係数を $\dfrac{1}{2}(n-1)$ 倍したものである。
- $(x+1)^n$ の展開式の x^2 の係数は，$(x+1)^{n-1}$ の展開式の x^2 の係数に $n-1$ を足したものである。
- $(x+1)^n$ の展開式に含まれる x の数 (展開式の x^k の指数 k の和) は，$(x+1)^{n-1}$ の展開式の x の数と n の和である。
- 上述の和は，$(x+1)^n$ の x^2 の係数になっている。
- $(x+1)^n$ の左から 3 番目の項の係数は，$(x+1)^{n-1}$ の左から 3 番目の項の係数に $n-1$ を加えたものである。
- 前の展開式の隣り合う項 (x^k と x^{k-1}) の係数の和は，次の展開式の x^k の係数である。
- 前の展開式の左から k 番目の項の係数と，次の展開式の左から k 番目の項の係数との差は，前の展開式の左から $k-1$ 番目の項の係数である。
- x^m を左半分の項とすると，その係数は x^{m+1} の係数を $\dfrac{1}{n-m}$ 倍して $m+1$ をかけたものである。
- 左から数えて k 番目の項の係数と指数をかけて k で割ると，次の項の係数になる。たとえば，$(x+1)^4$ の展開式の 2 番目の項 $4x^3$ では $4 \times 3 \div 2 = 6$ が 3 番目の項の係数である。

  [注] この学生は，最初の係数が 1 であることを自明とすると，二項定理の係数の現れ方を完全に把握したことになる。実際，$(x+1)^n$ の展開式の最初の項は $1 \cdot x^n$ であるので，

  2 番目の x^{n-1} の係数は　$1 \times n \div 1 = n$
  3 番目の x^{n-2} の係数は　$n \times (n-1) \div 2 = \dfrac{1}{2}n(n-1)$
  4 番目の x^{n-3} の係数は　$\dfrac{1}{2}n(n-1) \times (n-2) \div 3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3}n(n-1)(n-2)$

  などとなる。

(5) 係数の和

- 係数の和は，n を 1 つ増やすごとに 2 倍になる。係数の和を 2 倍した値は，次の式の係数の和である。
- 係数の和は偶数である。係数の和は 2 の倍数である。
- $n \geqq 2$ のとき，係数の和は 4 の倍数である。
- $(x+1)^n$ の係数の和は 2^n である。
- 斜めに係数を加えると，右下の係数がその和になる。たとえば，$1+3+6=10$, $1+4+10=15$ であり，10, 15 はいずれも右下にある。

(6) その他

- 中央にいくほど，係数は大きくなる。係数は中央に行くほど大きくなり，中央から離れるほど小くなる。
- n が 1,2 のとき，3,4 のとき，5,6 のときというように，n が 2 つ増えるごとに同じ係数の組の数が増えていく。
- 両端の 1 以外の係数は，n を素因数分解したときの素因数のどれかで割り切ることができる。
- $n = 4$ までは，係数を繋げてできる数は 11^n である。たとえば，$11^2 = 121,\ 11^3 = 1331$ である。
- 数ナビは，$(x+1)^{128}$ まで計算できる。

3.2.3 教育効果・反省点

このような単純な展開式の係数の中に多くの規則性があることには，多くの学生が驚いたようである。規則性を見つけることができて「楽しかった」「おもしろかった」という学生がいる反面，単純な展開式を多数書き写す作業が「面倒だった」「嫌になってきた」という学生もいた。

平成 17 年度は，規則性に気づきやすいようプリントに最初から n が 1 から 3 までの場合の係数を三角形状に書いて配布したが，その配慮に気づかずに考察を進めた学生も少なくない。また，あまり三角形状にこだわりすぎると，左端を揃えた場合の別な規則性に気づかなくなるので，書き出し方も含めて全てを学生に任せた方がよいかもしれない。

1 年の前半で課した課題ということもあり単純な部分の指摘が多いが，中には二項係数の現れ方を完全に把握した学生も現れた。二項係数の性質としては「パスカルの三角形」以外にも，11^n の値，フラクタル図形，フィボナッチ数列，そして $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ のべき級数展開の係数など，多様な性質が含まれている [15]。

いずれにしろ,「式の展開」という単純なことの中にも多数の数学的性質が含まれていることを実感させるには最適の教材と思われる。

3.3 $x^n - 1$ の因数分解

3.3.1 この課題の意図

1 年の「数と式の計算」では，$x^2 - 1$ や $x^3 - 1$ の因数分解の公式を学ぶ。数式処理の因数分解の機能を利用すれば，その延長で $x^n - 1$ の因数分解を考えさせることができる。多数の自然数 n について $x^n - 1$ が因数分解された式を書き写すだけで，誰でも何らかの気づきが得られるので，低学年には適した題材と思われる。以下は，平成 17 年度の 1 年生に提示した内容である。なお，清風高校の公庄は，TI–89 と同様の数式処理機能をもつグラフ電卓 TI–92 を高校生に貸与したときの，高校生の発見を報告している [1]。関西の有名進学校の生徒ということもあり，下記の内容を上回る発見がなされている。

$x^n - 1$ の因数分解

数ナビを利用すると，具体的な自然数 n について $x^n - 1$ を因数分解させることができる。たとえば，$x^4 - 1$ であれば，基本画面 (HOME を押して現れる画面) で F2 2:factor を押し，入力行 (一番下の行のこと) で factor$(x^4 - 1)$ ENTER とすればよい。

この機能を利用して，できるだけ多くの n について $x^n - 1$ の因数分解がどのような式になるかを調べてください。そして，指数 n と因数分解された式との間に，何かの規則性がないかを考えてください。この中には，沢山の規則性が含まれています。2 つ 3 つ見つけただけで安心しないで，できるだけ多くの規則性を発見してください。そして，可能なら，なぜそうなるのか，その理由を考えてください。

3.3.2 $x^n - 1$ の因数分解に関する学生の発見

この課題を考察するには，最初にできるだけ多くの n について，$x^n - 1$ が因数分解された式を書き出すことが必要である。

$$
\begin{aligned}
x^1 - 1 &= x - 1 \\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) \\
x^7 - 1 &= (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \\
x^8 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \\
x^9 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1) \\
x^{10} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) \\
x^{11} - 1 &= (x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \\
x^{12} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}
$$

これを見ながら，指数 n と右辺の式の形との関連性について考えることになる。「$x-1$ が含まれる」「n が偶数のときは $(x-1)(x+1)$ が含まれる」というようなことについては，ほぼ全員が気がついた。他にも，以下のことが指摘されている。平成 16・17 年度の高専 1 年生からの指摘である。

(1) 指数が奇数・偶数のとき

- n が偶数のとき，$(x+1)(x-1)$ 以外の因数の最高次数は偶数である。
- n が偶数 $n = 2m$ で，m が奇数のとき，$x^n - 1$ の因数分解した式は，$x^m - 1$ を因数分解した式を含む。
- n が偶数のとき，$(x-1)(x+1)$ 以外の式を展開すると，$x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1$ になる。この式に x を含む項は $n/2 - 1$ 個ある。
- n が奇数のとき，$x - 1$ 以外の式を展開した式の係数は 1 である。
- n が奇数 $2k + 1$ のとき，因数分解された式の真ん中に x^k の項がある。
- n が奇数のとき，$x^{2n} - 1$ の因数分解の式には，$x^n - 1$ の因数分解に現れた式で係

数が -1 ののものが含まれる。たとえば，$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ に対して，$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ である。

(2) 指数がある数の倍数のとき

- n が 3 の倍数のときは，x^2+x+1 が必ず含まれる。
- $x^{3n}-1=(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)$ である。
- n が 4 の倍数のときは，$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ が必ず含まれる。
- n が 5 の倍数のときは，$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ が含まれる。
- n が 6 の倍数のときは，x^2-x+1 が必ずある。
- n が 7 の倍数のときは，$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ が必ずある。
- n が 8 の倍数のときは，x^4+1 が必ずある。
- n が 9 の倍数のときは，$(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ が必ずある。
- n が 10 の倍数のときは，$(x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ が必ずある。
- 指数が nm の形の式は，x^m-1 を因数にもつ。

(3) 素数に関連するとき

- n が素数のときは，$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ である。
- p を素数として $n=2p$ のときは，
$$x^{2p}-1=(x-1)(x+1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)(x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots+x-1)$$
という形である。

(4) 指数がべき乗のとき

- 指数が 2^n のときは，$x^{2^n}-1=(x-1)(x+1)\underline{(x^2+1)(x^4+1)\cdots}$ となり，下線部は $n-1$ 個の積である。
- n が 2 のべき乗のときは $x^{\frac{n}{2}}+1$ が含まれる。
たとえば，$x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ である。
- $x^{2^n}-1$ の因数分解の式で，因数の数は $n+1$ 個である。
- 指数が 3^n のときは，$x^{3^n}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)\cdots$ の形である。

(5) その他

- 因数分解した式の $x-1$ 以外の項をまとめると $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ になる。
- n の約数の数と，因数分解された式の因数の数とは一致する。
- $n=3$ のときから 5 つの式を挟んだ次の式には x^2+x+1 が含まれる
- 因数分解された式の最高次数の和は n である。
- 因数分解した全ての項の最後の数は 1 である。

3.3.3　教育効果・反省点

x^n-1 の因数分解は，二項定理のときのような左右対称性がないので，一つ一つの式の特徴をじっくりと調べていくことが求められる。学生の感想を見ても，二項定理と比べて x^n-1 の因数分解の式の特徴は掴みにくかったようである。その分,「自分の見つけたこと以外にどのような規則性があるのかを早く知りたい」という強い思いを感想に書いている学生も多い。複素数を学んでいる場合は，$z^n=1$ の解の図形的な意味と関連させることもできるだろう。

しかし，多くの指摘がなされる一方，誤った指摘も幾つかなされてきた。いずれも，その指摘が自分の書き出した以外の式について成立するかどうかの検証が不足しているためと思われる。

誤った指摘

- 因数分解できたときの式の係数は ±1 だけである。　(反例がある [1])
- n が奇数のときは $(x-1)(x^2+x+1)$ が含まれる。　($n=5$ のとき含まれない)
- n が偶数のときは $x^{2n}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{\frac{n}{2}}+1)$ である。
　($n=6$ のとき異なる式になる)
- n が 8 の倍数のときは，$x^2+1, x^4+1, x^6+1, \cdots$ のような因数の積になる。
　($n=24$ のときは異なる式になる)
- n が偶数のとき，同じタイプで係数の符号の違う式が含まれる。
　($n=8$ のときはそうではない)
- グラフで表すと，y 軸と平行な直線になる。

3.4　x^n+a の因数分解

3.4.1　この課題の意図

「数と式」の箇所では，x^3+a^3 の因数分解や，工夫すれば x^4+4 も因数分解できることを学ぶ。数式処理機能を利用すると，この延長として x^n+a が因数分解できるための自然数 n, a の条件について考察させることができる。以下は，平成 16 年度の 1 年の冬季休業の課題 (p.129) として出したものである。これは，清風高校の公庄が行った x^4+n の因数分解についての教材 [19] を一般化させたものである。

x^n+a の因数分解

x^4+4 は，一見すると因数分解できないように見えますが，

$$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

と因数分解できます。一般に，x^n+a が因数分解できるのは，指数 n や定数項 a がどのようなときでしょうか。指数 n や定数項 a は自然数とし，因数分解された式の係数は整数とするとき，x^n+a が因数分解できるための n, a の条件について考えてみてください。

3.4.2　学生の発見

冬季休業中の自由研究は 3 題の中から 1 題選択させたが，この因数分解の課題は 41 名が選択した。この課題を考察するには，まず，いろいろな n, a について $x^n + a$ の因数分解を幾つか書き出してみることが必要である。それらを眺めていると，容易に何らかの規則性に気づくと思われる。$x^4 + 4$ の因数分解の変形過程を記したのは，式変形を自分で考える際のヒントにもなっている。

(1) $x^n + 1$ について

- n が素数のときは，$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \cdots)$ とプラスとマイナスが交互に現れる。
- $x^{2^n} + 1$ は因数分解できない。$x^n + 1$ は，$n \neq 2^k$ のとき因数分解できる。
- n が偶数で 2^k のタイプではないとき，n の約数の最大の偶数を m とすると，
  $x^n + 1 = (x^m + 1)(x^{n-m} - x^{n-2m} + x^{n-3m} - \cdots - x^m + 1)$ であり，
  n が奇数のときは $x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \cdots - x + 1)$ である。
- $n = 2, 6, 10, \cdots$ のときの因数には，$x^2 + 1$ がある。
- $x^{3^n} + 1$ の因数分解の式には，$x^{2 \cdot 3^{n-1}} - x^{3^{n-1}+1}$ が含まれる。

(2) $x^n + 4$ について

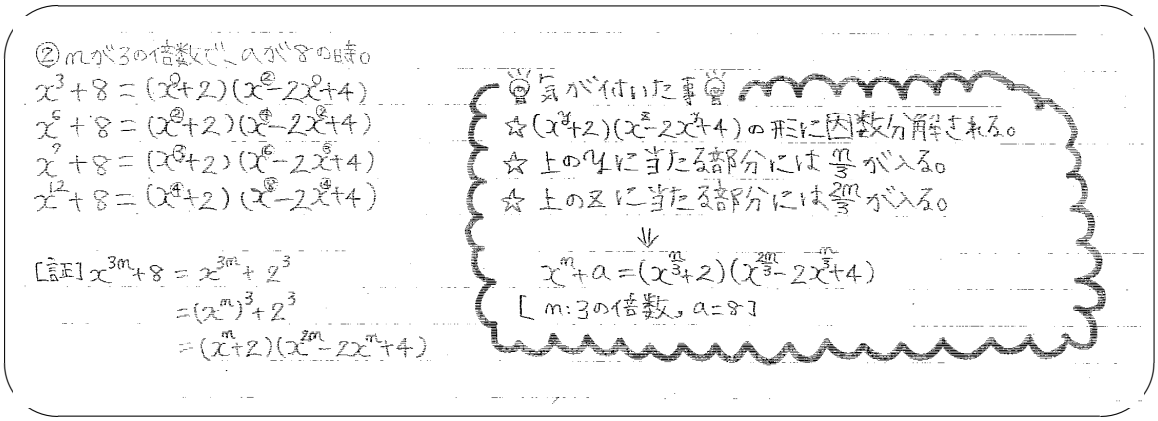
- $x^n + 4$ は，n が 4 の倍数のときに因数分解できる。
- $x^n + 4$ が因数分解できるときは，3 つの式からなる 2 つの因数に分解される。
- n が 4 の倍数のとき，$x^n + 4$ は $x^n + 4 = (x^{\frac{n}{2}} + 2x^{\frac{n}{2}} + 2)(x^{\frac{n}{2}} - 2x^{\frac{n}{2}} + 2)$ と因数分解できる。
- $n = 2^{2k+4}$ $(k > 0)$ のとき，$x^n + 4$ は因数分解できる。
- $x^{4n} + 4$ が因数分解されることの証明は次のとおり。

$$\begin{aligned} x^{4n} + 4 &= (x^{2n})^2 + 4 = (x^{2n})^2 + 4x^{2n} + 4 - 4x^{2n} \\ &= (x^{2n} + 2)^2 - (2x^n)^2 = (x^{2n} + 2x^n + 2)(x^{2n} - 2x^n + 2) \end{aligned}$$

(3) $x^n + 8$ について

- $x^n + 8$ は n が 3 の倍数のとき因数分解できる。
  $x^{3n} + 8 = (x^n)^3 + 2^3 = (x^n + 2)(x^{2n} - 2x^n + 4)$ である。
  n が 3 の倍数のとき，$x^n + 8$ は $x^n + 8 = (x^{\frac{n}{3}} + 2)(x^{\frac{2n}{3}} - 2x^{\frac{n}{3}} + 4)$ と因数分解できる。

- $x^3 + a$ は，$a = b^3$ のタイプのときに因数分解できる。
  $x^{3n} + a^3$ は，$x^{3n} + a^3 = (x^n)^3 + a^3 = (x^n + a)(x^{2n} - ax^n + a^2)$ と因数分解できる。



(4) x^n+a^n について

- x^n+2^n は，n が 2 の累乗の数 (2^k) のときは因数分解できない。
- x^n+3^n は，$n=2^k$ のタイプのときは因数分解できない。
- x^n+a^n が因数分解できれば，因数分解された式は a の値によらず同じ形である。
  - ⋆ たとえば，$x^6+a^6=(x^2)^3+(a^2)^3=(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$
- x^n+n^n で n が素数の場合は，$x^n+n^n=(x+n)(x^{n-1}-nx^{n-2}+n^2x^{n-3}-\cdots+n^{n-1})$ の形に因数分解される。
- x^n+32 は n が 5 の倍数のとき，x^n+64 は n が 3 の倍数のとき，x^n+128 は n が 7 の倍数のとき因数分解できる。

(5) その他

- x^n+a は，$n=1,2$ のときは因数分解できない。
- x^2+a は因数分解できない。
- x^n+2，x^n+3 は因数分解できない。
- x^3+a^3 は因数分解できる。
- $x^4+4^{2k+1}=(x^2+2^{k+1}x+2^{2k+1})(x^2-2^{k+1}x+2^{2k+1})$ である。
- x^4+a が因数分解される a は，$a=4,64,1024,16384,\cdots$ であり，前の値を 16 倍した値のときである。
- x^5+a^5 は，$(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-ax^3+a^4)$ と因数分解される。
- x^5+5^{5k} は因数分解できる。x^5+32^n は因数分解できる。
- x^6+a^3 は，x^3+a^3 のときの因数分解と同じタイプに因数分解される。
- x^6+6^{3k} は因数分解できる。$x^6+a^3=(x^2+a)(x^4-ax^2+a^2)$ である。
- $x^{3n}+a^3$ は因数分解できる。
- $x^7+a^7=(x+a)(x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^2x^4-ax^5+a^6)$
- x^8+4^{2k-1} は因数分解できる。
- x^9+a^3，x^9+a^9 は因数分解できる。
- x^n+n は，$n=4^{2k-1}$ のとき因数分解できる。
- x^n+a は，n が 4 の倍数で，$a=4\cdot16^k$ のタイプのとき因数分解できる。

- x^n+a が 1 次式との 2 つの積に因数分解できるとき，1 次式でない方の式の項の数は n 個である。
- 下記より，x^n+a は n が 4 の倍数で $\sqrt[4]{4a}$ が整数になるときに因数分解できる。

$$\begin{aligned} x^n+a &= \left(x^n+2\sqrt{a}\sqrt{x^n}+a\right)-2\sqrt{a}\sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{2\sqrt{a}\sqrt{x^n}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}+\sqrt{2\sqrt{a}\sqrt{x^n}}\right)\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}-\sqrt{2\sqrt{a}\sqrt{x^n}}\right) \\ &= \left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}+\sqrt[4]{4a}\sqrt[4]{x^n}\right)\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}-\sqrt[4]{4a}\sqrt[4]{x^n}\right) \end{aligned}$$

- 下記により，x^n+a は $\sqrt{a}$ と $(2\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}$ が整数になるときに因数分解できる。

$$\begin{aligned} x^n+a &= \left(x^n+2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}+a\right)-2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}} = \left(x^{\frac{n}{2}}+\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}}\right)^2 \\ &= \left(x^{\frac{n}{2}}+\sqrt{a}+\sqrt{2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}}\right)\left(x^{\frac{n}{2}}+\sqrt{a}-\sqrt{2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}}\right) \end{aligned}$$

  ⋆ $\sqrt{x^{\frac{n}{2}}}=x^{\frac{n}{4}}$ のルートがはずれる必要があるので,「n が 4 の倍数である」という条件も必要である。

3.4.3 教育効果・反省点

この因数分解に関しても，これまでと同様に多様な発見がなされてきた。その多様性は，x^n-1 の因数分解は指数 n を変えるだけであるが，x^n+a の因数分解では，指数 n と定数項 a とを変えながら考察することが必要なためではないかと思われる。学生のレポートを見ると，できるだけ一般性のある表現で記述しようとしているほか，式による証明を加えてきた学生も少くない。すでに，2 回の自由研究の経験を経て，その書き方等について慣れてきたためと思いたい。

しかし，これまでと同様，自分の見つけた性質が一般性のあるものかどうかの検証にかける指摘も見られた。これらの誤りについては，反例等を示しながら学生に解説した (p.130)。

誤った指摘

- x^n+a は，$a=1,4,8$ のときしか因数分解できない。
- 因数分解した式の係数に奇数はない。
- x^n+a は，a が奇数のときは因数分解できない。
- $x^{2n}+1$ は因数分解できる。
- n が 4 の倍数のとき，x^n+1 は次のいずれかに因数分解される。
  $(x^2+1)(x^{n-2}-x^{n-4}+\cdots+1)$, $(x^4+1)(x^{n-4}-x^{n-8}+\cdots+1)$
- $x^{4n}+a$ が因数分解できるのは $a=4$ のときだけである。
- x^n+a^n は因数分解できる。
- 2 つにすると，$(x+b)(\cdots)$, $(x^2+b^2)(\cdots)$ の形になる。

3.5　三平方の定理

3.5.1　この課題の意図

三平方の定理は，中学校 3 年生で学ぶ内容である。直角三角形の 3 辺の間に $a^2+b^2=c^2$ という関係があることを学生はよく知っている。しかし，このような関係をみたす a,b,c の具体的な値については，$3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$ のときや，3 辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ と $2:1:\sqrt{3}$ のときくらいしか知らない場合が多い。

そこで，平成 16 年度の 1 年生の冬季休業の課題の中で，三平方の定理をみたす自然数 a,b,c について考察させた。学生に提示した内容は，以下のような内容である。

三平方の定理

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として，$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ が良く知られています。このような自然数は，他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように，連続する 3 つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように，3 つのうち 2 つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは，他にあるでしょうか。つまり，$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では，$a^2=c^2-b^2$ も成立しています。そして，そのような自然数 a, b, c は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。数ナビの操作ばかりではなく，ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

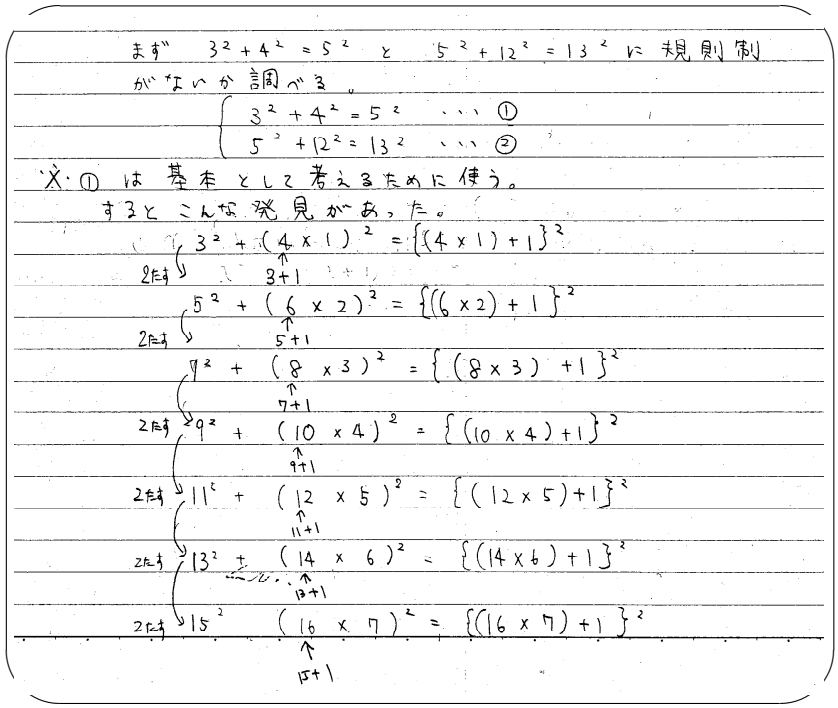
この課題は，冬季休業中の自由研究 (p.129) として複数題の中から選択させた。167 名中 94 名がこの課題を選択した。学生の発見した内容は，外部発表論文「試行錯誤で三平方の定理を考える」(p.87) で詳述したが，ここではその中から幾つかの結果を紹介する。

3.5.2　三平方の定理に関する学生の発見

- $A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x について，x の 1 の位の数は 0,2,4 のときに限られる。
- $a^2+b^2=c^2$ で b,c が連続する数のとき，a は奇数である。$3^2+4^2=5^2$ を既知とするとき，次の式は $5^2+b^2=c^2$ のタイプであるが，この b は $(5^2-3^2)\div 2=8$ を 4 に加えた値である。以下，同様のことを繰り返せばよい。
- $a^2+b^2=c^2$ において b,c が連続する場合は，次のようになっている。

$$
\begin{aligned}
3^2+(4\times 1)^2&=\{(4\times 1)+1\}^2 \qquad (4=3+1)\\
5^2+(6\times 2)^2&=\{(6\times 2)+1\}^2 \qquad (6=5+1)\\
7^2+(8\times 3)^2&=\{(8\times 3)+1\}^2 \qquad (8=7+1)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

つまり， a は必ず奇数 ($a\geqq 3$) で，b は a を 2 で何回割れたかという回数を $a+1$ に掛けた数である。



- b, c が連続するとき，$3^2+4^2=5^2$ から数えて k 段目の式の b は，$b=ak+k$ である。たとえば $a=9$ は 4 段目なので $b=9\times4+4=40$ である。
- $a^2+b^2=(b+1)^2$ に対して，その次の式を $(a+2)^2+B^2=(B+1)^2$ とすると，$B=((a+2)^2-a^2)/2$ である。
- b, c が連続するとき，次のことが成立する。$(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+\cdots+1))^2=(4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$。
- b, c が連続するとき，そのような a, b, c は，60 の倍数になっている。
- b, c が連続する a, b, c の和 $a+b+c$ の第 2 階差は 8 になり一定である。
- a, b が連続する場合として

$$3^2+4^2=5^2$$
$$20^2+21^2=29^2$$
$$119^2+120^2=169^2$$
$$696^2+697^2=985^2$$
$$4059^2+4060^2=5741^2$$

である。n 段目の式を $a_n^2+b_n^2=c_n^2$ とすると，

$$a_n=6\times a_{n-1}-(a_{n-2}-2),\quad c_n=6\times c_{n-1}-c_{n-2}$$

という関係がある。

- $3^2+4^2=5^2$ であることから，$333^2+444^2=555^2$ や $3333^2+4444^2=5555^2$ も成立

する。さらに，

$$3333^2 = 5555^2 - 4444^2 = (5555+4444)(5555-4444) = 9999 \cdot 1111$$
$$4444^2 = 5555^2 - 3333^2 = (5555+3333)(5555-3333) = 8888 \cdot 2222$$

であり，右辺の 2 数の和は，いずれも 11110 となって一致する。

- $3a = b+c$ のとき，$a : b : c = 3 : 4 : 5$ である。さらに，$3a = b+c$, $4a = b+c$, $5a = b+c$ となるものが存在するので，$na = b + c$ となるものが存在するはずである。
- a, b, c の中には，一定量ずつ増えているものがある。たとえば，$6^2+8^2 = 10^2$ は 2 ずつ増えている。12 ずつ増えるのは，$a^2 + (a+12)^2 = (a+24)^2$ を解いて $a = 36$ である。

3.5.3　教育効果・反省点

この課題の考察には，数ナビを特に必要としない。実際，数ナビを使用しないで考察した学生もいた。通常の四則計算と根号機能のある電卓があれば十分と思われるが，いろいろな試行錯誤をするには，数ナビの履歴機能が役にたったと思われる。

いずれにしろ，既知の定理である「三平方の定理」を調べてみて，実に多様な性質があることに感動した学生が多い。

3.6　3 次関数のグラフ

3.6.1　この課題の意図

1 年生は，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを前期に学んでいるが，3 次以上の整関数は $y = ax^n$ のグラフに触れる程度である。一般の整関数のグラフを描くには微分法によらなければならないが，グラフ電卓を利用すれば，試行錯誤を通してグラフの特徴をある程度把握させることができる。一般の整関数のグラフが 1 年で必要になることはないが，そのグラフの形状を知っていることは，高次不等式の解法の際に役立つと思われる。そこで，平成 16 年度の 1 年生に対して，秋季課題として 3 次関数のグラフの形状と係数 a, b, c との間の関係について考察させた (p.124)。

[課題] 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフ

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフは，係数 a, b, c がどのようなときに，どのようなグラフになるかを調べよ。

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考えるとき，3 つの係数 a, b, c を同時に変化させるのも大変なので，$y = x^3 + ax^2$, $y = x^3 + bx$, $y = x^3 + c$ などについて調べて，少しずつ係数の数を増やしながら考察することもできる。係数 a, b, c は，グラフのどのような変化と関連しているのか。軸との共有点はどのようなときか。共有点の数は，a, b, c の値のあり方によりどのように変わるか。グラフの山や谷の頂点の座標を a, b, c の式で表せないか。放物線では $y = ax^2$ を平行移動するだけであった。3 次関数について同様のことを考えることはできるか。グラフの対称性について何か

特徴はないか，などなど，いろいろグラフを表示させる中で，各自の関心を持った部分について考察せよ。　まとめ方としては，各自がどのような問題意識をもったか。それに対して，数ナビにどのようなグラフを表示させ，それを見て何を思い，どのようなことを予想し，その予想をどのようにして確かめたか。というような，各自の思考の経過をまとめればよい。なお，a, b, c は整数とは限らない。

課題提示：10 月 28 日，提出〆切：11 月 19 日

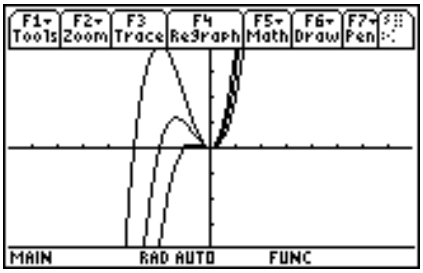
考えやすいよう，$y = x^3 + ax^2$ や $y = x^3 + bx$ などから調べていけばよいことに触れ，どんな学生でも何かに気づくことができるように配慮した。3 次関数のグラフをいろいろ表示させてみることにより，各係数の意味を感覚的につかんでほしい，ということを意図した課題である。

3.6.2　3 次関数のグラフに関する学生の発見

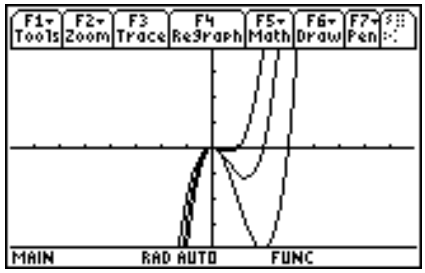
学生から指摘された事項については，平成 15 年度の結果と併せて外部発表論文「3 次関数の性質に関する高専 1 年生の自由研究」(p.73) で詳述したので，ここでは概略のみ述べる。なお，学生の指摘してきた全事項は，学生向け配布資料 (p.125) にある。

(1) $y = x^3 + ax^2$ のグラフ

変化させるのが a だけであるので，グラフがどのように変化するかはすぐに気がついたと思われる。ただし，$a > 0$ の場合しか試さない学生も多かった。



$a = 1, 2, 3$



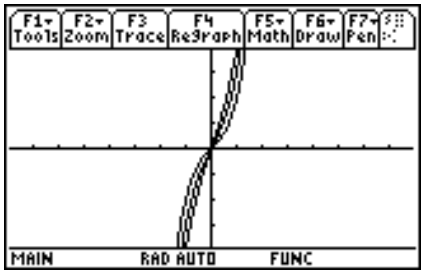
$a = -1, -2, -3$

a の値を変化させると山や谷の部分が大きくなることや，原点と $(-a, 0)$ が x 軸との共有点であることには多くの学生が気づいた。曲線の揺れの幅が「広くなる・狭くなる」という形でも表現されている。$a > 0$ のときの山の頂点の座標は $\left(-\frac{2}{3}a, \frac{4}{27}a^3\right)$ であることを見抜いた学生もいる。

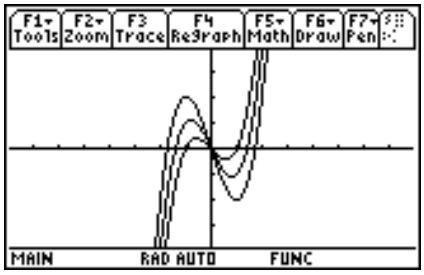
グラフの対称性についても指摘があり，「$y = x^3 + ax^2$ は偶関数でも奇関数でもないので，対称性はない」ことや，「$y = x^3 + ax^2$ と $y = x^3 - ax^2$ とは原点に関して対称である」「$y = -x^3 + ax^2$ と $y = x^3 + ax^2$ とは y 軸に関して対称である」ことが指摘されている。グラフの対称の中心点の x 座標は，a が増えるにつれ減少するとの指摘もあった。また，「$y = x^3 + ax^2$ のグラフを平行移動すると $y = x^3 - ax^2$ になる」という形の指摘もあった。

(2) $y = x^3 + bx$ のグラフ

b を正の方に変化させるとグラフは y 軸に近づき，b を負の方に変化させると山や谷の部分が大きくなることや，グラフが原点に関して対称であることには多くの学生が気がついた。$y = -x^3 + bx$ のグラフは $y = x^3 - bx$ のグラフと y 軸に関して対称であるとの指摘もある。



$b = 1, 2, 3$



$b = -1, -2, -3$

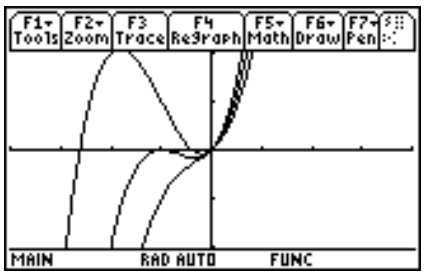
x 軸との共有点についても正しく指摘され，$b > 0$ のときは 1 個，$b < 0$ のときは 3 個，そして $b = 0$ のときの共有点は原点だけであることが指摘されている。共有点の x 座標は，$b < 0$ のときは $0,\ \pm\sqrt{-b}$ である。また，$b > 0$ のとき，b を 1 ずつ増すと $y = x^3 + bx$ の値は x 座標の分だけ減り $b < 0$ のときに b を 1 ずつ減らすと x 座標の分だけ増えるとの指摘もある。

(3) $y = x^3 + c$ のグラフ

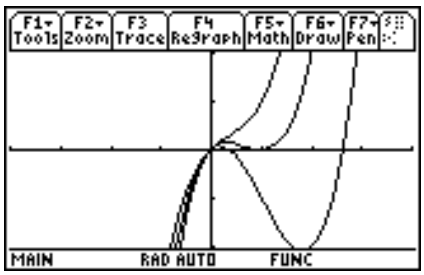
このグラフは y 軸方向に c だけ平行移動しているだけである。多くの学生がそのことに気づいた。y 軸との共有点が $(0, c)$ であり，x 軸との共有点は $(\sqrt[3]{-c}, 0)$ であることも指摘されている。

(4) $y = x^3 + ax^2 + bx$ のグラフ

今度は，a, b の 2 つの値をいろいろと変えながらグラフの変化を眺めなければならない。やみくもに a, b の値を変えるのではなく，いずれか一方を固定して考えればグラフの特徴が見えてくる。

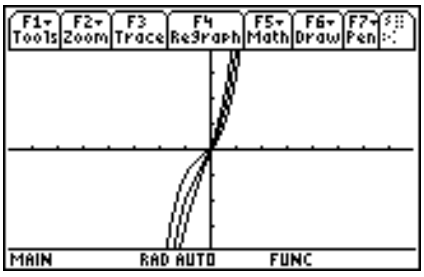


$a = 1, 2, 3, b = 1$

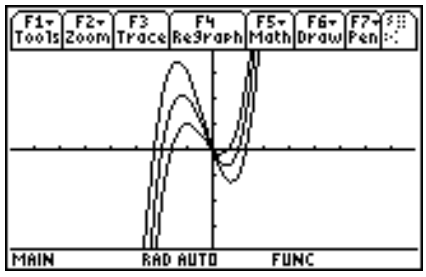


$a = -1, -2, -3, b = 1$

この関数の場合は，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の判別式との関連性に気づくことを期待したものである。共有点の個数は 1〜3 個で必ず原点を通ること，それ以外の共有点を持つのは $a^2 - 4b \geqq 0$ のときであり，共有点の x 座標は $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ であることが正しく指摘された。



$a = 1, b = 1, 2, 3$



$a = 1, b = -1, -2, -3$

グラフの対称性に関しては，$y = x^3 + ax^2 + bx$ と $y = x^3 - ax^2 + bx$ のグラフは，原点に関して対称であること，$y = x^3 + ax^2 + bx$ が点 (p, q) を通れば $y = x^3 - ax^2 + bx$ は点 $(-p, -q)$ を通ること，なども指摘されている。

(5) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフ

この関数は，$y = x^3 + ax^2 + bx$ のグラフを y 軸方向に平行移動しただけなので，$y = x^3 + ax^2 + bx$ のグラフが分かれば十分であることに気づくことを期待したものである。そのことは正しく指摘されている。また，$y = x^3 + ax^3 + bx + c$ の a, b, c の役割は，$y = x^3 + ax^2, y = x^3 + bx, y = x^3 + c$ の a, b, c の役割と同じであるとの指摘もあった。この関数の変曲点の x 座標は $x = -a/3$ でであるが，a が対称の中心の x 座標を決めていることを見抜いた学生もいる。

$y = x^3 + ax^2 + bx + c = x(x^2 + ax + b) + c$ であることより，この式は次のように表せる。

$$y = x\left(x - \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)\left(x - \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right) + c$$

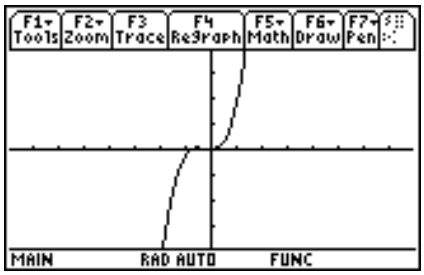
したがって，$A = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$，$B = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ とおくと，グラフは 3 点 (B, c)，(A, c)，$(0, c)$ を通る。このことから，$y = x(x - p)(x - q) + c$ と表わされるとき，グラフは 3 点 $(0, c)$，(p, c)，(q, c) を通ることを指摘した学生もいる。

(6) その他の指摘

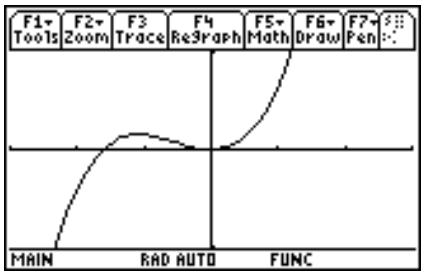
上述のこと以外では，$y = x^3 + ax^2$ と $y = -x^3 + ax^2$ のようなグラフの対称性に関する指摘や，$y = x^3 + ax^2$ は必ず 3 点 $(-1, a - 1), (0, 0), (1, a + 1)$ を通るなど，関数の式の形により必ず通る点を指摘してきた学生もいる。また，x 軸との共有点の数について，まとめた学生もいる。

(7) 誤った指摘事項

数ナビの表示するグラフをみて，誤った指摘をしてくる学生もいる。たとえば，次頁の左側のグラフをみて，$y = x^3 + ax^2$ のグラフは，$0 < a < 1$ のときは山や谷が現れないと書いてきた学生がいる。



$y = x^3 + 0.8x^2$



$-1.5 \leqq x \leqq 1.5, -0.5 \leqq y \leqq 0.5$

グラフの拡大，座標のテーブル表示，あるいは，x 軸との交点を考えれば，このような誤りは起こりえないはずである。グラフに過度に頼りすぎることの危険性を示している。

3.6.3 いろいろな感想

この 3 次関数の課題は，複数題の中から選択させるのではなく全員に課した。単に式を入れてグラフを眺めて，そこから規則性を考えるわけであるが，1 次関数や 2 次関数と違い，係数をちょっと変えるだけでグラフが大きく変化する様子には，多くの学生が驚いたようである。学生のレポートを見ると，自分の発見した事をワクワクしながら書いていることが推測された。以下に，このレポートに記されている学生の感想を幾つか紹介する。

- 係数 a, b, c を大きくするとグラフも大きくなると思ったが，そうではなかった。
- $y = x^3 + bx$ で $b > 0$ だと直線に近づいていくのがおもしろいと思った。
- 係数を変えるだけで，まったく異なる特徴を持つグラフになり，とてもおどろいた。
- 係数が負のときは，グラフがただ反対になるだけだろうと思っていたけど，やってみると全く違うグラフになったりしてびっくりした。
- 最初は法則が分からなくて，ただグラフを書くだけだったが，進むにつれ法則が分かり面白くなった。
- 係数が平方根や分数のときは，整数のときのグラフとはかなり違うグラフになると思ったのに，そんなに変わらないのは意外だった。
- たった 3 次式のグラフでさえ，こんなに色々な形をしていて，私の見つける事のできない法則がまだ幾つも隠されているのかと思うと，凄いと思った。
- $y = x^3$ とは何か？ このようなグラフになることを見い出した数学者達の思いがヒシヒシと伝わってくるのが，研究をしている中での第 1 の感想。例えば，Weierstrass, 彼の言った「幾分なりとも詩人でないと数学者は完全な数学者とはいえない」この言葉が心を巡った。関数という一つの点からできる線。それは宇宙 (そら) の星を 1 つ 1 つパズルのように組み合わせる，そんな研究だった。
- 関数のグラフについて，ここまで深く考えたことは初めてで，いろいろ考えてみると気づくことが多く，自分が今気づいたことよりも，まだ規則性的なことがあると思う。やってみると意外と楽しかった。
- 初めは難しそうで面倒くさそうで全くやる気が起きなかったけれど，やっていくうちに，いろいろ考えるのがとても楽しくなってきた。

3.7　絶対値関数のグラフ

3.7.1　この課題の意図

学生は,「絶対値」を非常に苦手としている。そこで，絶対値に関する理解を深め，それを含む関数のグラフを容易にイメージできるようになることを目標として，以下のような課題を平成 16・17 年度の夏季休業の課題 (p.119, p.140) とした。

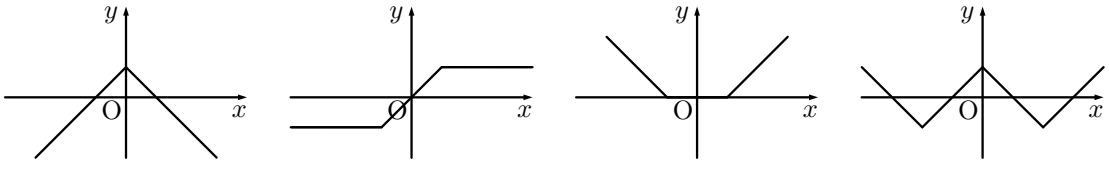
絶対値関数のグラフ (平成 17 年度)

$y = |x|$ のグラフは，数ナビでは ♦ F1 で，たとえば $y1 = \mathrm{abs}(x)$ として入力します。abs は alpha を利用します。あるいは， CATALOG = を押しても出てきます。$y = |x|$ は，$x \geqq 0$ のときは $y = x$ であり，$x < 0$ のときは $y = -x$ ということです。

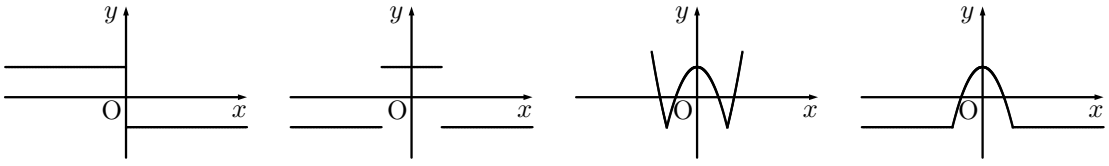
そこで，$y1$ には適当な関数を定義し，$y2$ は $y2 = \mathrm{abs}(y1(x))$ として $y1$ と $y2$ のグラフを比較してください。$y2 = |y1(x)|$ としたことになります。グラフを表示させるには ♦ F3 です。グラフがうまく表示されないときは， F2 4 を押してみてください。たとえば， ♦ F1 で $y1 = x^2 - 1$, $y2 = \mathrm{abs}\,(y1(x))$ として ♦ F3 でグラフを表示させると，どのようなグラフが表示されるでしょうか。これは，$y = x^2 - 1$ と $y = |x^2 - 1|$ のグラフを表示させたことになります。ただし，2 つのグラフが重なって分かりにくいので， ♦ | で Leading Cursor の箇所を ON に変更した方がグラフが分かりやすくなります。

$y1$ にいろいろな関数を定義して，$y1$ と $y2 = |y1(x)|$ のグラフを比較してください。そして，一般に $y = f(x)$ と $y = |f(x)|$ のグラフの間にはどのような関係があるかを考えてください。さらに，$y = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, $y = \dfrac{f(x) + |f(x)|}{2}$, $y = ||f(x)| - p|$ などは，どのようなグラフになるでしょうか。それは，何故でしょうか。

絶対値を含む関数や，それらの和・差・積・商を利用すると，いろいろなグラフを描くことができます。次のグラフは，どのような関数のグラフでしょうか？ また，絶対値を利用して，もっとおもしろいグラフはできないでしょうか。



(1)　(2)　(3)　(4)



(5)　(6)　(7)　(8)

$y = f(x)$ のグラフで，x 軸より下側のグラフの符号を反対にしたものが $y = |f(x)|$ のグラフであることを，いろいろな関数のグラフを見るなかで実感させようと意図した。しかし，残念ながら，この課題を選択したのは，平成 16 年度は 4 名，平成 17 年度は 3 名だけであった。「絶対値」というだけで拒絶反応が起きているのかもしれない。

3.7.2 絶対値関数に関する学生の指摘事項

この課題に取り組んだ学生の数は少かったものの，例示したグラフについて，取り組んだ学生からは以下のような式が提示されている。

(1) $y = -|x| + 1$，$y = -|f(x)| + p$ $(p > 0)$，$y = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ -x+1 & (x \geqq 0) \end{cases}$

(2) $y = -|x-1| + |x+1|$

(3) $y = |x+1| + |x-1| - 2$，$y = \dfrac{|x+p|}{2} + \dfrac{|x-p|}{2} - p$

(4) $y = \big||x| - p\big| - q$，$y = |x+4| + |x-4| - |x| - 5$

(5) $y = \dfrac{|x|}{-x}$，$y = \dfrac{x}{|x|}$

(6) この関数についての指摘はなかった。たとえば $y = \dfrac{|x+1|}{x+1} - \dfrac{|x-1|}{x-1} - 1$ がある。

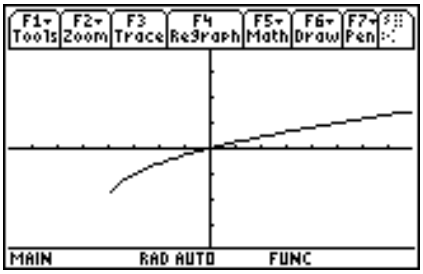
(7) $y = |x^2 - 3| - 2$

(8) $y = |x^2 - 2| - |x^2| + 1$

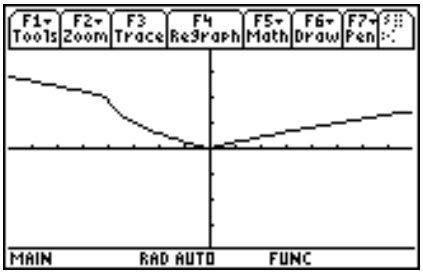
3.7.3 教育効果と反省点

絶対値を含むいろいろな関数のグラフを調べることにより，絶対値に関する拒絶反応を薄めようと意図したものであったが，各年度とも数名からしか選択されなかった。絶対値に焦点を絞るのであれば，他に選択する余地を与えず，この課題だけを単独で課した方がよかったかもしれない。また，取り組んだ学生の中には，$y = |ax|$ のグラフしか試さなかった学生もいた。具体的な式を幾つかあげて，もう少し誘導する必要があることを反省させられた。

なお，数ナビで絶対値関数と無理関数を含む関数のグラフを表示させるときは，ちょっと注意が必要である。それは，数ナビは複素数の計算も可能であることによる。たとえば，数ナビで $y(x) = |\sqrt{x+4} - 2|$ のグラフを表示させると，$x < -4$ の部分は $\sqrt{x+4} - 2$ の複素数としての絶対値を計算して表示してくる (右図)。正しく表示するには，定義域の $x \geqq -4$ を指定する必要がある。



$y = \sqrt{x+4} - 2$



$y = |\sqrt{x+4} - 2|$

3.8　曲線で囲まれた図形の面積

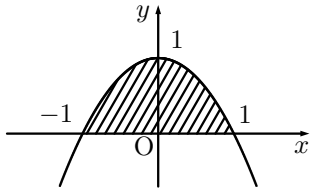
3.8.1　この課題の意図

図形の面積を扱うには区分求積法の考え方が必要になってくる。微分・積分について何も知らない 1 年生が，この問題をどこまで考えることができることができるかを見るために，以下の課題を平成 17 年度の冬季休業の課題とした。冬季休業では学生に 5 つの課題を提示して選択させたが，面積の課題を選択した学生は 9 名だけであった。

なお，石川高専の阿蘇 [2] は，高専の 2 年の微分法学習中に $y = x^2$ と x 軸 $(0 \leqq x \leqq 1)$ との間で囲まれた図形の面積について同様の考察を行わさせ，区分求積法の考えが自然に出てきたことを報告している。

図形の面積

皆さんが面積の求め方として知っているのは，長方形，平行四辺形，台形，そして三角形の面積です。これらの図形を組み合わせることで，他の図形の面積を求めることはできないでしょうか。たとえば，$y = 1 - x^2$ のグラフは，$y = -x^2$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフなので右図のグラフです。このグラフと x 軸との間で囲まれた図形の面積を求めるにはどうすればよいでしょうか。できるだけ正確な近似値を求める方法を考案してください。そして，具体的にその値を計算してください。



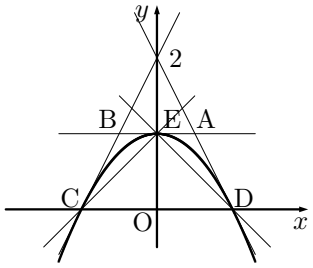
また，一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との間で囲まれた図形の面積を計算するには，どのようにすればよいでしょうか。その一般的な方法についても考えてみてください。そして，自分で適当な関数のグラフを考え，そのグラフと x 軸との間で囲まれた図形の面積を計算してみてください。

3.8.2　曲線で囲まれた面積に関する学生の考察

解説で，長方形や台形の面積など既知の図形の面積を組み合わせることに触れたこともあり，簡単な図形で外側と内側を囲もうとしているのが 5 名，区分求積の考え方で考察している者が 4 名であった。以下に，その主な概要を紹介する。

既知の図形の面積による近似

(1) 2 名の学生は，求める図形は台形 ABCD で近似できると考えて，まず，$x < 0$ の側の台形 EBCO の面積 3/4 を求める。そして，与えられた図形と △BCE の共通部分の面積は，図を眺めることにより △BCE の面積のほぼ半分とみる。台形 BCOE の面積 3/4 から △ECO の面積 1/2 を引くと △BCE の面積は 1/4 となるので，



求める図形の面積は

$$\left(\triangle \mathrm{BCE} \times \frac{1}{2} + \triangle \mathrm{ECO}\right) \times 2$$

を計算して $\frac{5}{4}$ であるとしている。

(2) 2 名の学生は，この図形は単位円の上半分に近いことから，近似値として半円の面積 $\pi/2 \fallingdotseq 1.57$ を考えている。

(3) ある学生は，求める図形の面積は $\triangle$ECD の面積と半円の面積の中間にある考え，

$$\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \div 2 \fallingdotseq 1.285$$

としている。

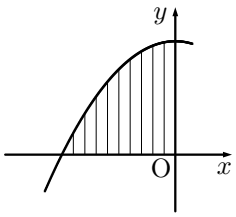
区分求積の考え方による考察

区分求積の考え方で図形を幾つかの図形に細かく分けて面積を求めようとしたのは 4 名である。そのうち 2 名は関連する参考書を見て書いているが，残りの 2 名は「自分で考えた」と述べている。自分で考えた学生の考え方は，以下のとおりである。

(1) ある学生は，縦長の台形で近似できると考え，左側の部分を 10 個の台形に分割して，その面積を実際に計算する。

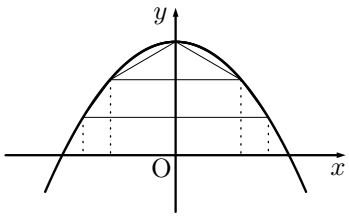
$$\frac{1}{2}\left\{(0.99+1)\cdot 0.1 + (0.96+0.99)\cdot 0.1 + \cdots + (0.19+0.36)\cdots 0.1\right\} = 0.665$$

となるので，全体では $0.665 \times 2 = 1.33$ とし，この値は $\frac{4}{3}$ であることを見抜いている。

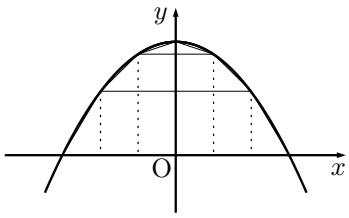


この学生はレポートを直接研究室まで持ってきたので,「すごいね！」と言うと,「べつに〜，誰でもやるんじゃないですか？」と言い，自分で考えて自然に出てきた考えであることがうかがわれた。

(2) 別な学生も同じように台形に分割するが，縦長ではなく横長の台形で分割する。ただし，上段は三角形で近似する。最初は 3 分割した図形で考え方を固め，次に,「近似値を求めるには，より多くの図形に分けることが必要である」として，10 分割した図形で実際の計算を行っている。



y 軸を等分した場合



x 軸を等分した場合

ただし，y 軸を 10 等分するのではなく，x 軸を 10 等分して考えている。そのため，台形の高さはすべて異なる図形で考えたことになる。たとえば，$\frac{2}{10} \leqq x \leqq \frac{3}{10}$ の部分

の台形の面積は

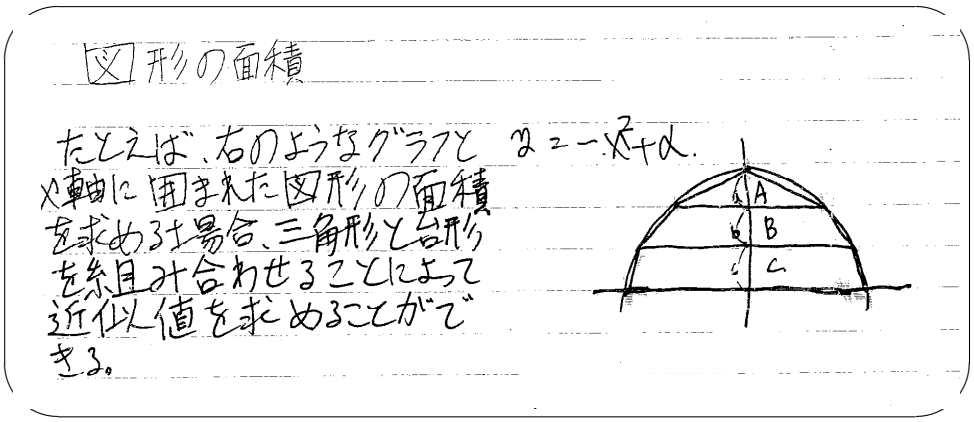
$$\left\{\left(\left(-\frac{2}{10}\right)^2+1\right)-\left(\left(-\frac{3}{10}\right)^2+1\right)\right\}\times\left(\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\right)\times 2\times\frac{1}{2}$$

として計算し，10 分割して計算した面積の合計として 1.33 を得る。また，その計算過程から，

$$\frac{1}{1000}(1^2+3^2+5^2+\cdots+17^2+19^2)=\frac{1330}{1000}=1.33$$

となることに気づいている。

学生のレポートの図は y 軸を分割したかのような図であったが，具体的な計算式を見ると，上述のように x 軸を分割した計算である。



3.8.3　教育効果・反省点

曲線で囲まれた図形の面積を求める課題は 9 名しか選択しなかったが，2 名の学生は自分の力で区分求積の考え方に至っている。そこでは，以下のような定積分導入時の基本となる考え方が自然になされている。この課題を全員に考えさせた場合は，同じ考え方をする学生が，さらに多く現れたであろうことが予想される。

(1) 求める図形を既知の図形で外側と内側から挟もうとしていること
(2) 求める図形を既知の図形で分割して，その面積の和として求めようとしていること
(3) 求める図形の面積を求めるには，分割を細かくする必要があるとしていること

区分求積法による定積分の定義は，ややもすると敬遠されがちであるが，このような課題を経た後に説明すれば，十分に学生の理解が得られるのではないかと思われる。その意味では，定積分の導入前に考えさせるのが効果的かもしれない。また，課題を与えるときに面積の値も示しておけば，さらに考察の継続につながったかもしれない。

3.9　グラフ・アートの作成

「グラフ・アート」とは，数ナビ TI–89 のグラフ機能を利用して，関数のグラフを繋ぎ合わせて何らかの「絵」を作成するものである。何かの問題を考察するわけではないが，自分

の思い描いた絵を作成するには，どのような関数のグラフが適切であるか，また，そのグラフのどの部分 (範囲) を採用すればよいかを自分で判断することが求められる。つまり，関数の式と範囲を自分で決めながら一つ一つの曲線が描かれる。そして，その総合として一つの絵が完成する。その過程で，学生は関数の式とグラフとの対応関係を身をもって体験することになる。また，関数の式の係数や平行移動の量は，ある程度の試行錯誤を伴いながら決定していくので，関数の総復習としての意味合いも持っている。日本では金沢高専で最初に行われた。その後，福井高専が中心になってグラフ・アートの全国大会を開催するまでになっている。

この課題は，平成 16 年度と平成 17 年度の 1 年生に対して行った。課題を与える前には，範囲の指定の仕方や個々の曲線の表示方法の種別指定などにについて説明した (pp.116–117)。次頁に学生の主な作品を紹介する。いずれも，関数のグラフをつなぎ合わせて作成されている。平成 16 年度の作品のうち，6 作品が第 1 回全国グラフ・アートコンテストに入選した。また，平成 17 年度の作品では，クラス投票などの結果をもとに各クラスから 3 作品を応募した。

第 1 回全国グラフ・アートコンテスト入賞作品 (平成 16 年度)

優秀作品 2 位	[D3] 八面体
優秀作品 3 位	[E4] アメリカ大陸の断面図
佳作 B	[A1] はさみ，[C2] $y = x$ ，[C4] 音符，[C6] ORI ON THE

第 2 回全国グラフ・アートコンテスト応募作品 (平成 17 年度)

機械工学科	[A1] 笑う富士山，[A2] ドラえもん，[A7] かぁーびー
制御情報工学科	[B1] 釣られる寸前の魚，[B2] 流し目，[C1] がらがら
電気情報工学科	[D1] EZ Web，[D5] call，[E2] ウェーブ
物質化学工学科	[F3] バラ，[F4] PM1:26，[F5] 海と樹海と雲と山

学生がグラフ・アートをどのような関数を用いて作成しているかをみるため，以下に平成 17 年度の幾つかの作品について，その構成関数をみてみよう。

笑う富士山

(1) $y = -|\sqrt{2^2 - x^2}| + 3$　　(2) $y = |\sqrt{2^2 - x^2}| - 3 \qquad -3 < x < 3$

(3) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - (x-2)^2}$　　(4) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - (x+2)^2}$

この作品は，僅か 4 個の関数で定義されている。個々の関数のグラフについて，そのグラフの上側・下側の塗りつぶしや，線の太さなどを指定できるので，そのような機能も利用されている。絶対値を利用することで根号内が負になる場合のグラフも表示されているが，そのことを学生が意図的に行っているのかどうかは不明である。

流し目

(1) $y = \sqrt{10^2 - (x+5)^2}$　　(2) $y = -\sqrt{10^2 - (x+5)^2}$

(3) $y = 3(x+1)$ $0.5 < x < 3$ (4) $y = -3(x+8)$ $-13 < x < -10.5$

(5) $y = 6(x+6)$ $-4.5 < x < -3.5$ (6) $y = -1/2x + 13$ $-15 < x < 5$

(7) $y = (x-7)^3 - 5$ (8) $y = \sin x$ $-10 < x < 0$

この作品は，8 個の関数で構成されている。右側は (7) の関数の下側を塗りつぶしたものであり，目の中では目玉がサインカーブを描きながら動く。

ウェーブ

(1) $y = 3\sin(16x)$

この作品は，1 個の関数だけである。液晶ドットの精度の関係で，このように表示されてしまう。これを作成した学生はコンピュータに強い学生であることもあり，ドットの精度の関係だろうことに気づいていた。

バラ

(1) $y = 2^{x+3.2} - 9$ $-0.5 < x < -0.2$ (2) $y = -2^{-x+3.1} + 8$ $x < -0.1$

(3) $y = -\sqrt{-3x+5} + 0.7$ $-0.2 < x$ (4) $y = -9^{-x+0.2} + 0.5$ $-0.2 < x < 1.6$

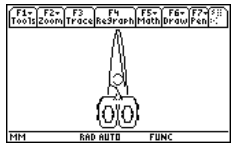
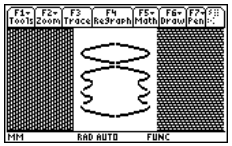
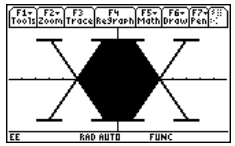
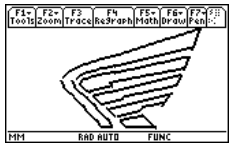
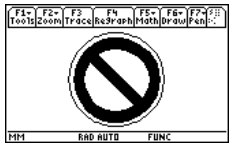
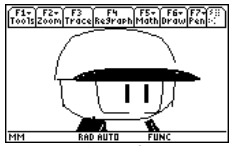
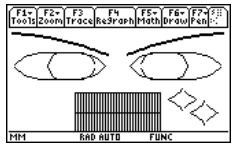
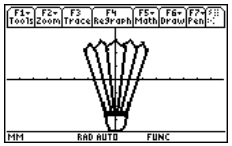
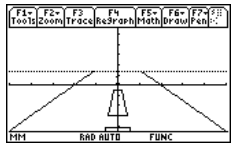
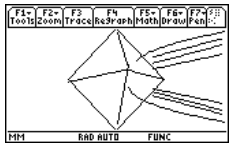
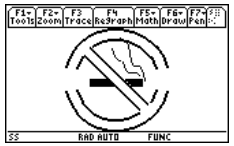
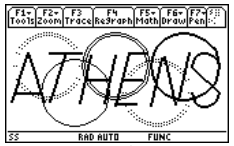
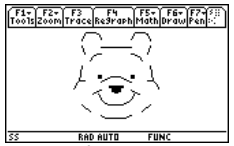
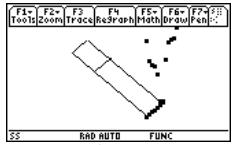
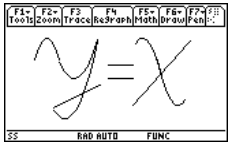
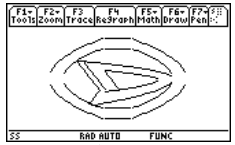
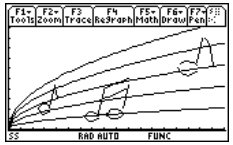
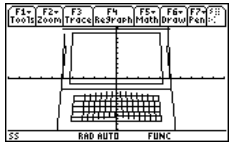
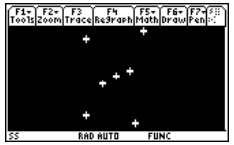
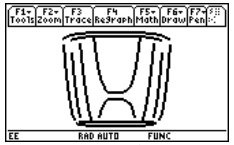
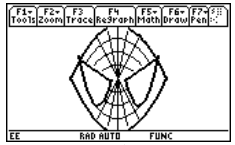
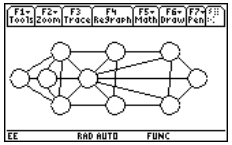
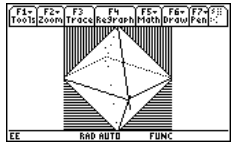
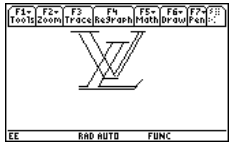
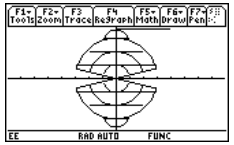
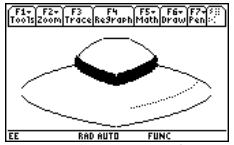
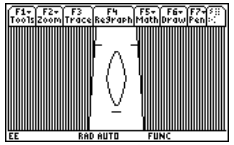
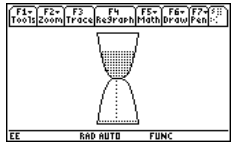
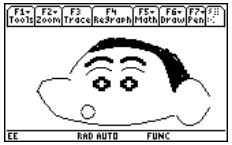
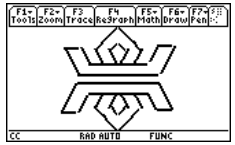
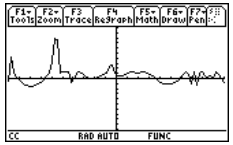
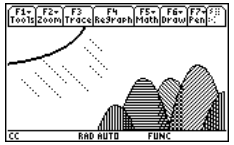
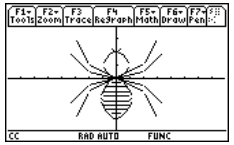
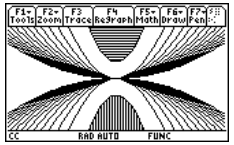
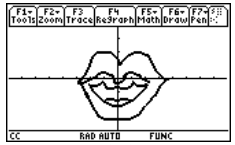
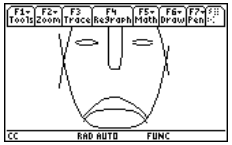
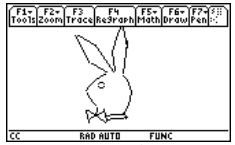
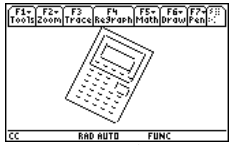
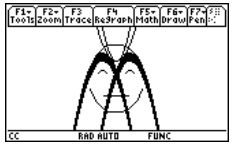
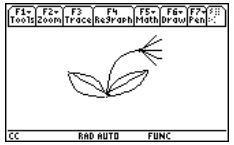
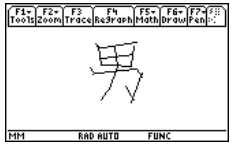
(5) $y = -3(x+1.1)^2 + 1$ $-0.9 < -0.2$ (6) $y = \sqrt{2x+2} + 1$ $x < -0.8$

(7) 以下、省略する。

この作品は，全部で 30 個の関数が利用されている。使用されている関数は，指数関数，無理関数，2 次関数である。指数関数としては 2^x, 20^x, 30^x などが，無理関数は $\sqrt{ax+b}$ のタイプであるが，$a = -100$ の場合のグラフも含まれている。

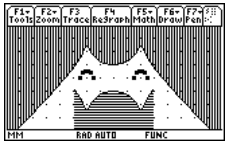
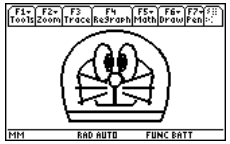
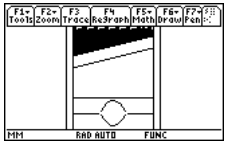
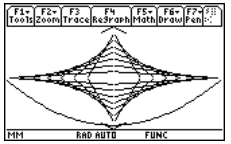
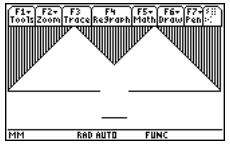
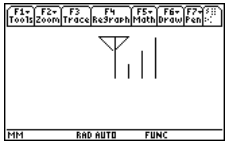
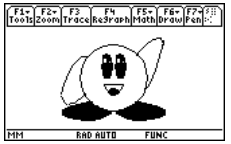
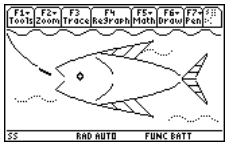
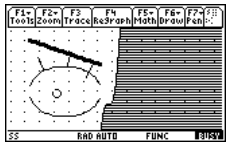
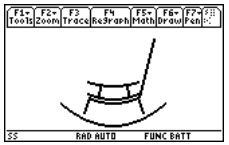
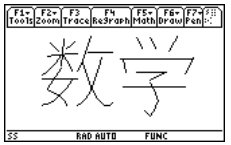
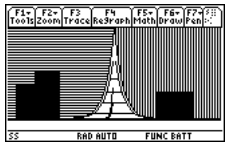
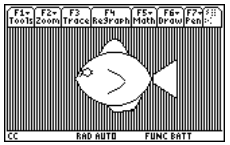
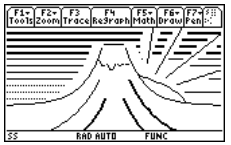
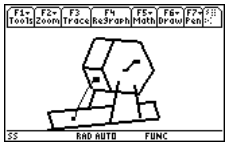
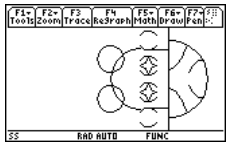
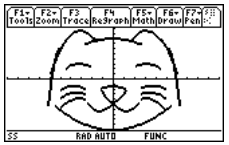
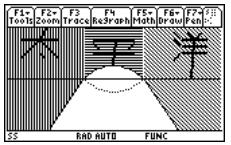
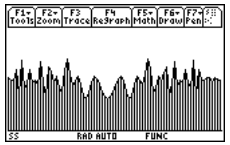
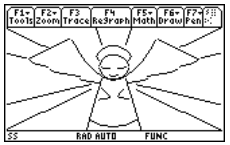
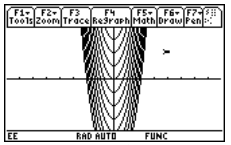
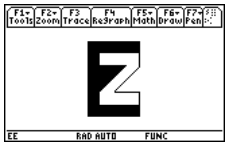
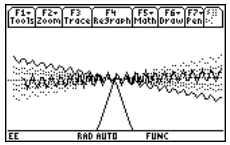
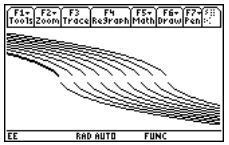
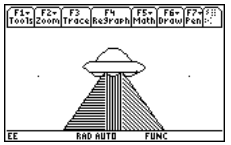
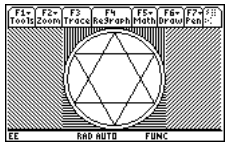
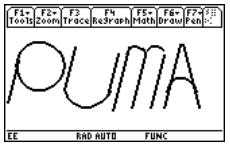
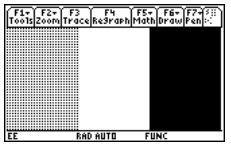
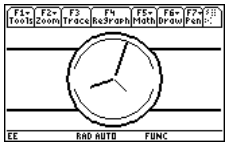
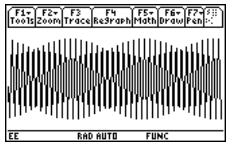
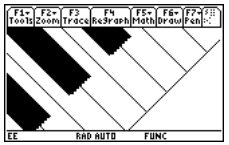
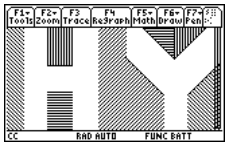
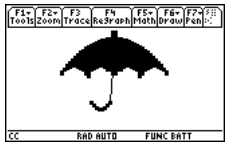
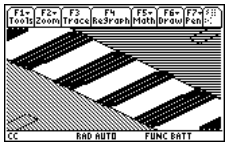
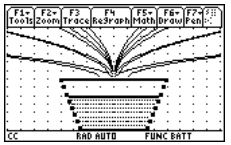
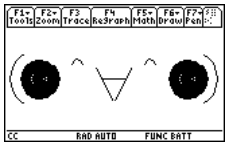
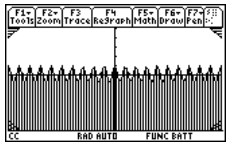
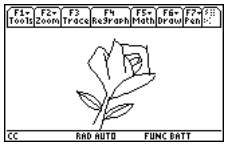
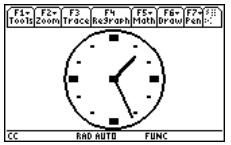
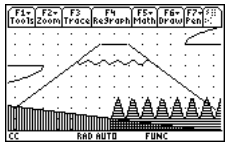
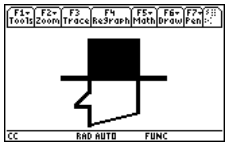
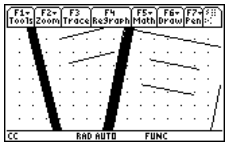
いずれにおいても，学生はこのような関数を自分で選択して，その係数や範囲なども自分で決定している。通常の授業の中で，このような関数を学生が自分の意志で取り扱うことはないであろう。関数グラフの総復習として有効と思われる [11]。

平成 16 年度夏季休業課題　数ナビ「TI–89」によるグラフ・アート

	1	2	3	4	5	6	7
A	 ハサミ	 あいモード	 HUNTER	SAS2004 ロゴ	 HONDA	 タ値イリ禁シ	 ベースボールプレーヤー
B	 アハハハ	 シャトル	 道	 第 5 使途ラミエル	 禁煙マーク	 オリンピック	 プーさん☆
C	 ボイすて	 $y = x$	 ダイハツ	 音符	 ノートパソコン	 ORI ON THE	 ホンダ
D	 スパイダーマン	 カバラ	 八面体	 L.VITTON	 ちょうちん	 むぎわらしゃっぽ	 T.K の彼女
E	 砂時計	 クレヨンしんちゃん	 岩手県のマーク	 アメリカ大陸の断面図	 自然	 クモ	 未知の世界へ
F	 発音練習	 ウルトラマン	 ウサギ	 数ナビ	 まゆじいさん	 花が咲いた	 男

(一関工業高等専門学校 1 年生の作品)

平成17年度　数ナビ「TI–89」によるグラフ・アート　(一関高専、1年生の主な作品)

	1	2	3	4	5	6	7
A	 笑う富士山？	 ドラえもん	 ギロチン	 富士山の反射	 ベジータかネコか	 電波状況	 かぁびー
B	 釣られる寸前の魚	 流し目	 ゆりいす	 数学	 東京	 おさかなさぁん	 日の出
C	 がらがら	 お化けキノコ	 ネコ	 大海原	 魚のパックに入っている緑のヤツ	 天使	 木に近づく虫
D	 EZ Web	 電波発生！	 川	 侵略者	 call	 PUMA	 France
E	 時計	 ウェーブ	 ピアノ	 HY	 カサ	 横断歩道	 未知の生物
F	 顔文字	 狙撃手の視界	 バラ	 PM1:26	 海と樹海と雲と山	 紳士	 NOTE BOOKS

第4章　試行錯誤を伴う数学課題に対する学生の感想

4.1　はじめに

平成16・17年度の1年生には，試行錯誤を伴う数学課題を「自由研究」としてそれぞれ3回にわたり課した。これらの年度の1年生は，通常の数学の問題とは異なり,「数学的な事柄について自分で考察する」体験をしたことなる。課題の提出率は，いずれの年度も90%前後であった。学生は，このような課題に対して，どのような感想を持ったであろうか。年度末の最後の時間では，このような「自由研究」に対する感想を自由記述式で書いてもらった。ここでは，平成16年度の学生の感想を紹介するとともに，その内容について分析する。

4.2　学生に提示した課題

平成16年度に提示した課題は，7月下旬，10月下旬，そして12月下旬の3回である。課題の概要は，以下のようなものである。複数題あるものは，その中から1題選択させた。

夏期課題 (平成16年度) の概要

(1) $(x+1)^n$ の展開

$(x+1)^n$ の展開を，できるだけ多くの自然数 n について行い，その結果を書き写してください。そして，この展開式の係数の間に成り立つ一般的な規則性を，できるだけ多く見つけてください。できれば，その証明も考えてみてください。

(2) x^n-1 の因数分解

x^n-1 の因数分解を，できるだけ多くの自然数 n について行い，その結果を書き写してください。そして，因数分解された式の形に，何かの規則性がないかどうかを考えてください。規則性に気がついたら，何故そうなるかという証明も考えてみてください。

(3) 繁分数の値

次の繁分数の値を求めてみてください。そして，同様のことをもうちょっと続けてください。そして，一般に，どのような値になるかを考えてください。数ナビで確認するときは，括弧の対応関係に注意してください。

$$\frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

(4) 絶対値関数のグラフ

$y1$ には適当な関数を定義し，$y2 = \mathrm{abs}(y1(x))$ として ♦ F3 でグラフを描画させてください。$y1$ にいろいろな関数を定義してみて，一般に $y = f(x)$ と $y = |f(x)|$ のグラフの間にはどのような関係があるかを考えてください。

秋季課題 (平成 16 年度) の概要

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフは，a, b, c がどのようなときに，どのようなグラフになるかを数ナビを利用して調べよ。

冬季課題 (平成 16 年度) の概要

(1) 三平方の定理

三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ が成立するような自然数 $a,\ b,\ c$ をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数 $a,\ b,\ c$ は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。

(2) 因数分解

$x^4 + 4$ は，一見すると因数分解できないように見えますが，

$$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$
$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

と因数分解できます。一般に，$x^n + a$ が因数分解できるのは，指数 n や定数項 a がどのようなときでしょうか。ただし，指数 n や定数項 a は自然数とし，因数分解された式の係数は整数とします。

(3) 3 次関数のグラフ

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフについてはすでに考察しました。そこで，今度は，$y = (x - a)(x - b)(x - c)$ のタイプのグラフについて考えてみてください。a, b, c の値のあり方により，この関数のグラフはどのような変化をみせるでしょうか。各自の問題意識にもとづいて考えてみてください。

(4) その他

以上の他に，各自が何か考えてみようという問題があれば，それについてまとめてきてもかまいません。ただし，それは，通常の問題集にあるような問題ではなく，ここにあげているようなタイプの問題とします。

4.3 平成 16 年度の学生の感想

平成 16 年度の最後の授業では，1 年間の著者の数学の授業に対する質問紙調査を行った (p.134)。その中には,「『グラフ・アート』や『自由研究』をやってみての感想を書いてください。」という設問を設け，自由記述による回答を求めた。何らかの記述があったのは，168 名中 142 名である。その記述内容を分類すると，おおむね次頁のように分類される。以下では，この区分により学生の記述内容を紹介する。

(1) 楽しかった，おもしろかった，良かった	51 名 (35.9%)
(2) 勉強になった，理解が深まった	22 名 (15.5%)
(3) 大変だった・面倒だったが，おもしろかった・勉強になった	33 名 (23.2%)
(4) 分からなかった，難しかった	27 名 (19.0%)
(5) その他の内容	9 名 (6.3%)

(1) 楽しかった・おもしろかった・良かった

- やってみると，思ったよりおもしろかった。
- 楽しくできた。いろんなことが分かった。
- いろんなことが分かり，おもしろかった。
- 規則性や新しい発見をすると達成感か満足感が得られて楽しかった。
- 規則性を発見するのが楽しかったです。
- 身近に使っている公式などを違った側面から見れておもしろい。
- 取り組む前は大変そうだと思ったけど，実際取り組んでみると，色々な事が見えてくるので楽しかった。
- 1 つの発見を見つけるまでに時間がかかるが，発見したときの喜びが大きい。今度やるとしたら，もう少し時間をかけてじっくり考えたい。
- 私達が普段使っている関数も，裏には様々な発見があったり，それを使って絵もできたり，驚いてばかりだったけど，楽しかったです。
- 今までは規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった。
- 自由研究は大好きです！ 考えることが，ますます好きになりました！
- 普段はやらないようなことをして，色々と発見があり良かった。
- 自由研究で，一つの規則性や法則のようなものを発見したときが一番おもしろかった。
- 自由研究によって，数学の法則性を見つけることの楽しさを知り，また，友人との協調性も高めることができました。
- ちゃんと因数分解できたときは，楽しかったです。
- 私的には，式の展開みたいなやつより，三平方の定理をやっている方が，やっていて楽しかった。
- 三平方の定理のやつは，考えがどんどん発展していって，とても楽しかった。
- グラフ・アートより，ぱっと見た感じがとっつきにくそうな自由研究の方が，規則性を発見できて楽しかったと思った。
- 時間はかかるが，完成したときはうれしい。
- 普段考えないことを考えるので時間はかかったが，法則性を発見したときは，とてもうれしいし，ためになる。
- 普段考えないようなことを考えさせられたので良かったし，おもしろかった。

- 友達と相談したり，新な発見があり面白かった。
- グラフ・アートや自由研究をやってきて，自分でも数学に対する考え方が変わったのが良く分かった。自由研究は，自分で新しい法則 etc が発見できるので，楽しかったです。
- 数ナビがあったので，あまり苦労せずにやれました。いろんな規則が見つかって面白かったです。
- 始める前は，すっごいイヤなんだけど，一度始めてみると，こうすればもっとよくなる，この場合はどうなんだろう？と，どんどんその課題にのめり込んでいました。レポートを書くのは好きじゃないけど，グラフを表示させたり，調べる時間はとても楽しい時間でした。自分の想像通りのグラフを表示させることができたときは，とても嬉しかったです。
- なかなか面白いことが分かり，意外な図を描けたり，なかなか面白かった。
- 数ナビで調べるのが楽しかったです。
- 幾つかあるテーマから選んで進めることができたので，どちらかといえば楽しんでできた。

(2) 勉強になった・理解が深まった

- 自由研究では，今まで気付かなかったことに気付いて，新しい発見があって理解力が高まった。
- 普段，何気なく使っている公式や計算の仕方などについて，どうしてこうなるかと考えることができて，とても勉強になった。
- 詳しくやってみると，新しい発見が見つかって勉強になった。
- 授業とは違った内容で，新な発見ができた。
- 数学について，色々な発見をすることができた。
- 自分のためになったし，「へえ，こうなるんだ」というところがたくさんあって，楽しかったです。
- 毎回，興味深い課題が提示されたので，とても楽しく調査・研究ができた。
- 今まで考えたことのなかった数学の中身を見ることになったので，勉強になった。
- 普通の問題とは違う視点からの問題が多かったので，とても面白かったと思う。
- 三平方の定理や因数分解など，普段よく使うものについて自分で詳しく勉強できたので良かった。
- 今までは，ただ計算し，理解せずに書いていたが，自由研究によって理解しながら解けるようになった。
- 自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった。
- 今まで考えなかったことを追及できるので，参考になりました。
- 自由研究をやることで，数学的なことを発見することができたし，レポートをまとめることで国語の文章作成の勉強にもなった。

- 今までに学習してきたことを復習しながら，いろいろ応用させていけるので自分のためになった。
- 式の色々な法則を見つけることにより，理解を深めることができた。
- 自分からは考えようとしない課題だったので，勉強になりました。
- 自分の考えられない解き方が見つかったり，とても参考になりました。

(3) 大変だった・難しかったが，おもしろかった・勉強になった

- 正直面倒くさかったけど，ちょっと楽しかったし，新しい発見があった。
- 正直面倒だったけれど，新しい発見があったりなど，とても良い勉強になった。
- やる前は面倒なのですが…，いざやってみると，なかなか楽しかったです。発見も多く，とても充実した自由研究でした。
- 面倒くさいと思ってみたけど，たまに新発見があって，少しおもしろかったです。
- 自由研究は大変だったが，色々勉強になったと思うので良かった。
- 自由研究は，やっているうちに，試したいことが増えていった。大変だったけど勉強になった。
- 難しかったけど，進めていくうちにもっと調べたいという考えが出てきて，時間がもっとあれば，と思った。
- 難しかったけど，色々な発見ができたので良かった。
- どこから手をつけてよいか迷ってしまうこともあったが，何かを発見したときはうれしかった。
- かなり大変だったが，やっていておもしろかった。
- 大変だったけど，勉強になったと思う。
- 関数のグラフを使って，色々なことをやるのは難しかったが，勉強になった。
- 大体せっぱつまってから始めたので内容が薄いものが多かったけれど楽しかった。皆の自由研究の結果が，とても面白かったし勉強になった。
- 始めは面倒だと思っていても，いざ始めると没頭してしまった。
- 面倒な気もしていたけど，どういった仕組でこうなるというのが分かってくると，興味や関心が少し強くなってきたので，数学の内容を深く知ることができたと思った。
- 難しかったけど，理解できたときとても嬉しかった。
- 正直面倒くさかったが，まあ，楽しかったと思います。
- 自由研究は難しかったけど，普段と違う感じでおもしろかった。
- 見ただけだと難しそーでイヤだったけど，実際少しずつやっていくと，いろんな発見が出てきて楽しかったです。
- やっているときは難しくてイヤになったが，何か 1 つでも分かると，やって良かったという達成感があって，やって良かったと思った。
- 自由研究は難しかった。でも，いつもと違う見方から数学を見ることができるの

で，いいと思う。長期休業に適していると思う。

- 自由研究は考えるのが難しく，発見できないとやる気がなくなるが，新しい発見をすると，少しでもやる気がでて勉強になった。
- 最初はとても面倒くさいなあ，と思っていたけど，数ナビをいろいろいじっているうちに，いろいろな発見があり，楽しかったです。
- 複雑なものが多かったが，やってみると意外と楽しかった。
- 面倒だと思ってやっていたが，グラフ・アートをやっているときよりは時間を惜しまずやれた。
- いろいろな法則を見つけたりするのが大変だったけど，柔軟な考えを養うことができたので良かった。
- 最初は難しそうでしたが，回を重ねるうちにだんだんと理解できるようになっていて，楽しく取り組むことができました。
- 考えることが多くなって，良いことだとは思っているけど，大変だった。
- 自由研究は，出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った。来年もやりたい。
- 自由研究は，最初のうちは規則性がポンポン見つかっていい気分でしたが，最後の自由研究は難しくて適当にやってしまいました。
- 何から手をつけていいか分からないことが多かったが，実際に手をつけてみると何かしらの発見があり，だんだん意欲が湧いてきた。
- いつも期限近くなってから始めてしまうので大変だったが，普段考えないようなことを考えたので良かったと思う。
- 普段は絶対考えなさそうな問題をやらなきゃいけない状況になったが，数学について少しでも考えることができて良かったと思います。
- 最初はやり方にとまどうが，分かると楽しくなってくる。でも，思うように成果が出ないと自分の数学力に自信がなくなって「うつ」になりそうになる。

(4) 難しかった・面倒くさかった・分からなかった

- できない課題ではないのですが，面倒くさかった。
- 気づいたところを見つけるのが大変でした。
- 問題を解くだけならいいけど，自由研究があると面倒くさかった。
- 難しかった。でも，失敗してもいいから，やってみる事の大切さは実感できた。
- 自分なりに考えて取り組んだが，内容が濃くて難しかった。
- 選んだ問題によっては，とても難しく，かなり苦労しました。
- あまり良くできなかった。
- 全々分からなかった。
- 大変だった。
- とても，しんどかった。

- 難しかった (6)。
- 難しくて，あまり独創的な考えができなかった。
- 法則性などを見つけるのが難しかったです。
- どう考えたら良いのか分からなくて，難しかったです。
- 何か法則を見つけることがとても難しく，あまりうまくいきませんでした。
- 自分の想像力や思いつき，ひらめきの無さを思いしらされた。
- 正直面倒だったが，勉強だと思ってやっていました。あまり自分で考えたことを書くことが苦手なので，時間もかかり，あまりうまくまとめれたことがありませんでした。
- 自由研究は，何をどうすればよいのか分からなくて困った。
- 本当に数学が好きな人や関数を得意としている人じゃないと，とても 1 人ではできないと思います。だから，自分は，皆でやった方がいいし，1 人でやったときは，とても難しくてできなかったです。
- 友達と一緒にやって，その友達はどんどん新しい共通点などを発見したのに，自分はほとんどできなかった。
- 問題の意味から答え方まで，何をやったらいいのか，分からなくて最悪だった。

(5) その他

- 意外に法則性が沢山あるので，凄いと思った。
- 新しい発見ができて良かった。
- 数学の新しい楽しさを見つけられて良かったと思う。
- 色々なパターンを発見できて良かった。
- グラフ・アートよりは自由研究の方が，いろいろな発見があって良かった。
- 数学の難しい部分が見えた。
- 考えるっていうのは，すばらしい。
- 自由研究は，関数のヤツ以外は，とても良かったです !!
- 教科書以外のことができて，よかった。
- 頭の体操になった。全く新しい事を見つけるのは，難しいことだ。
- 普段使っている公式・法則を新めて見直すことによって，新しい発見ができて良かった。
- 自分でも少し知りたいなと思っていた点を調べることができる機会だったので，とても良かった。
- 自分でいろいろ考えることができたので，良かったと思います。
- 最初はとまどったが，これをやることによって仕組が分かり，意欲も高まると思いました。
- 自由研究をやって，今まで考えなかった考え方をするようになった。
- 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見す

ることができるようになったと思う。
- 関数を利用したり，普段考えないようなことをやるのでいいと思う。
- 個性的なものが多かったので手こずることもあったが，何とかレポートにまとめられたので良かった。
- 自由研究は，自分で発見したことは頭に入っていいけれど，発見できなかったら，先生が 1 時間発表して終わるから，頭に入らないと思う。
- 先生が解説してくれたとき，こういう考えもあるんだなあ，と思った。
- 1 つの分野だけでも，いろいろな法則があるのが凄かったが，それを自分で調べたいとは思わない。
- 簡単なことしか調べられなかったので，他の人のも見てみて，考えてみようと思います。
- 自由研究は，行き詰まると大変だった。
- 自由研究は新しい発見があるけど，グラフ・アートはあまり新しい発見がなかったような気がした。
- 数ナビを使って関数の値を変化させたり因数分解したり，結果は分かったんだけど，なぜそうなるかは分からなかった。
- 気軽に取り組めて，数学の苦手な人にも易しい課題が良かったと思います。長期休業に丁度いいと思いました。
- 数ナビはあまり好きではないので，楽しいとは言い難い。
- 自由研究は，グループで意見を出しあいながらやった方が，自分で気づかなかった点に気づくことができたり，楽しくやれると思う。
- 普通の数学の授業とは違った，数学の楽しい部分があることを知った。

4.4 成績等との関連性

この自由研究では，前節で示したように非常に多くの学生が数学に関する事柄を「発見した喜び」を語り,「数学のおもしろさ」を実感した。ここで，これらの学生の感想と成績との関連性をみてみよう。数学の成績は，著者の担当科目である基礎数学 I の年 4 回の試験点の平均点として，それをもとに成績別に上位，中の上，中の下，そして下位の 4 段階に区分した。次頁の図 1 は，この成績区分と自由研究に対する感想との関連性をみたものである。

図 1 を見ると,「(1) 楽しかった，おもしかった」とする学生は，成績の上下にはよらないことが分かる。数学的性質を発見する課題で，成績の上下によらず約 1/3 の学生は「楽しかった」としている。「(4) 分からなかった，難しかった」とする学生は全体の 2 割未満であり，必ずしも成績下位の者に集中しているわけではない。ただし，成績下位の学生は「(3) 大変だったが･･･」とする者が他の区分と比べると多いが，(1)〜(3) の感想を合計すると，成績下位の学生の約 70%は，この数学の自由研究を行って「(1) 楽しかった」「(2) 勉強になった」「(3) 大変だったが，おもしろかった」という感想を持ったことになる。

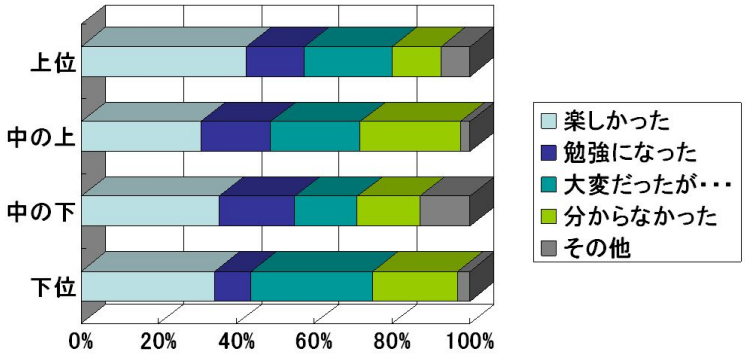


図 1： 成績区分と自由研究に対する感想

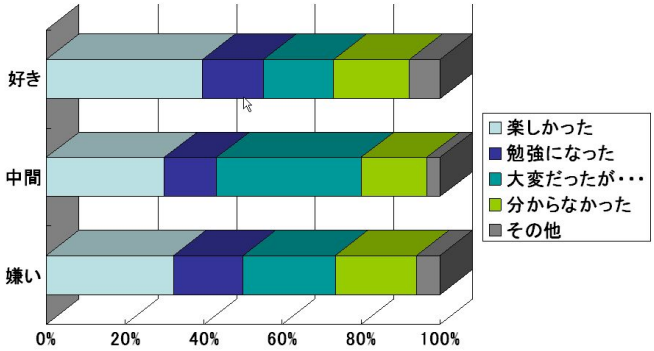


図 2： 数学の嫌悪と自由研究に対する感想

図 2 は，この自由研究に対する感想を，数学に対する好き・嫌いの別でみたものである。数学に対する好き・嫌いは，この自由研究に対する感想と同時に行った記名式のアンケート調査による。自由研究に対する感想を記述した 142 名中，数学が「好き」と回答した学生は 78 名,「どちらともいえない」は 30 名そして「嫌い」と回答した学生は 34 名である。高専ということもあり，数学は好きな学生が多い。

ここで図 2 を見ると，自由研究に対する感想は，この数学の好き・嫌いにもよらないことが分かる。数学が嫌いな学生でも，約 70%は「(1) 楽しかった」「(2) 勉強になった」「(3) 大変だったが，おもしろかった」という感想を持っている。

図 1 と図 2 は，記述式の感想を書いてくれた学生に対する分析であり，その記述がなかった学生は除外されている。最後の授業では記述式の感想とともにアンケート形式での調査 (p.134) も行い，当日の欠席者以外は全員の回答が得られている。このアンケート調査の質問項目の中では，自由研究に対する項目も設けた。図 3 と図 4 は，そのアンケート調査の項目から自由研究に対する感想をみたものである。

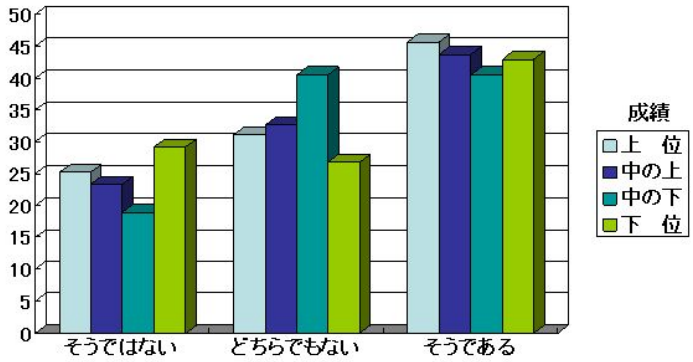


図 3： 自由研究は，やってみるとおもしろかった

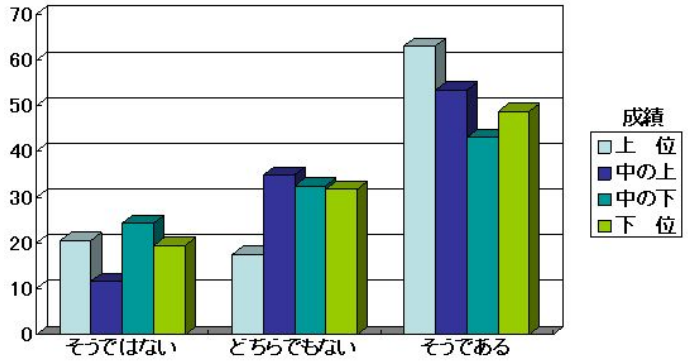


図 4： 自由研究をやってみて，数学的なことで新しい発見があった

図 3 を見ると，成績の上下によらず 40%以上は「自由研究は，やってみるとおもしろかった」と答えている。これは，記述のあった学生に対する感想 (図 1) とも一致している。成績下位の学生でも，40%以上が「おもしろかった」と感じている。

図 4 は,「自由研究をやってみて，数学的なことで新しい発見があった」という質問項目に対する回答である。この項目には，成績上位の学生の 60%が「そうである」と肯定している。成績下位の学生でも 50%弱が，この項目を肯定しており，成績の上下によらず「数学的なことに対する新しい発見」がなされたことになる。ただし，学生が発見したと思う具体的な内容は不明である。

このように，自由研究を考えることで，大多数の学生が数学的な事柄について何らかの気づきを得ており，そのような気づきを得ることができたことへの喜びを語っている。その喜びは数学に関する一般的な規則性を発見できたことから来ていると思われるが，それを成績の上下によらず，成績が下位の学生でも感じることができたことの意義には大きいものがあるだろう。適切な課題を継続的に与えていけば，学生の数学に対する見方が大きく変わることも期待され，数学教育における新な可能性が示唆されているように思われる。

第5章　試行錯誤を伴なう課題の評価

5.1　はじめに

試行錯誤を伴う数学課題を「自由研究」として学生に課してきたが，その評価はどのようになされるべきであろうか。第3章で見たように，この課題に対して，自由な発想をして教師が思いもしない考え方をしてきている学生も少なくない。また，第4章で見たように，この自由研究を行うことに対しては，成績の上下や数学の好き嫌いの区別に関係なく，多くの学生が「楽しかった」「おもしろかった」という感想を述べている。課題の提出率は，いずれも90%前後である。ここでは,「三平方の定理」に関する課題を例として，その評価のあり方について考察してみたい。

5.2　「三平方の定理」に関する指摘事項

三平方の定理は，平成16年度の冬季休業の課題としたものである。3つの課題を提示し，その中から1題を選択させた。三平方の定理は，167名中92名が選択した。課題の内容は以下のようなものである。学生がどのようなことを指摘してきたか，主な内容は**3.5**節ですでに述べた。学生のレポートの評価を考えるため，指摘されてきた全事項を次頁にまとめた。各指摘事項の到達度を3段階でランクづけをし，到達度1< 到達度2< 到達度3とした。「到達度1」は，すぐに気がつくと思われる事項,「到達度3」は証明や式変形を伴なうもの，あるいは一般的な規則性について言及したもの,「到達度2」はそれ以外のものである。

三平方の定理

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として，$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ が良く知られています。このような自然数は，他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように，連続する3つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように，3つのうち2つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは，他にあるでしょうか。つまり，$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では，$a^2=c^2-b^2$ も成立しています。そして，そのような自然数 a, b, c は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。数ナビの操作ばかりではなく，ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

表 1：三平方の定理に関する学生の発見

No	三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ に関する学生の発見	数	到達度
(1)	$a^2+b^2=c^2$ が成立すれば，$(na)^2+(nb)^2=(nc)^2$ も成立する	48	1
(2)	a,b,c が連続するのは，$a=3,\ b=4,\ c=5$ のときしかない 到達度は，単なる指摘は 2，証明つきで指摘した場合は 3 とした	44	
(3)	b,c が連続するとき，a は奇数である	32	1
(4)	b,c が連続するとき，それらは 4 の倍数ずつ増えていく	26	2
(5)	b,c が連続するとき，$a^2=b+c$ である	20	2
(6)	b,c が連続するとき，a,b,c のうちの 2 つの数は奇数である	14	2
(7)	b,c が連続するのは，奇数 a に対して $b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$ のときである	8	3
(8)	b,c が連続するのは，a^2 を 2 で割った商を b とすればよい	5	3
(9)	連続する 2 数の平方の差は奇数である	3	2
(10)	b,c が連続する場合として，次の場合がある $(2n+1)^2+(2(n^2+n))^2=(2(n^2+n)+1)^2$	3	3
(11)	a,b が奇数のとき，$a^2+b^2=c^2$ は成立しない	3	3
(12)	a,b が連続するとき，$c^2=2ab+1$ である	2	3
(13)	b,c が連続するとき，次のことが成立する $(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+\cdots+1))^2=(4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$	1	3
(14)	b,c が連続するとき，$(a-3)/2+1=n$ とおくと， $b=$(前の式の b)$+4n$ である	1	3
(15)	b,c が連続するとき，$3^2+4^2=5^2$ から数えて k 段目の式の b は， $b=ak+k$ である。たとえば $a=9$ は 4 段目なので $b=9\times4+4=40$ である	1	3
(16)	b,c が連続するとき，b は $a+1$ を 2 で何回割れたかを掛けた値である。たとえば，$17/2=8.5$ なので，$b=(17+1)\times8=144$ より，$17^2+144^2=145^2$ である	1	3
(17)	$a^2+b^2=(b+1)^2$ に対して，その次の式を $(a+2)^2+B^2=(B+1)^2$ とすると，$B=((a+2)^2-a^2)/2$ である	1	3
(18)	a_n,b_n が連続するとき，$a_{n+1}=6a_n-(a_{n-2}-2)$ である	1	3
(19)	$3^2+4^2=5^2$ が成立するので，$333^2+444^2=555^2$ や $3333^2+4444^2=5555^2$ なども成立する	1	3
(20)	どんなときでも，$a^2+1^2=b^2\ (a\neq0)$ は成立しない	1	2
(21)	a,b,c の中には，一定量ずつ増えているものがある。$6^2+8^2=10^2$ は 2 ずつ増えている。12 ずつ増えるのは，$a^2+(a+12)^2=(a+24)^2$ を解いて $a=36$ である	1	3
(22)	b,c が連続するとき，$a+b+c$ の第 2 階差は 8 である	1	3

No　　三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ に関する学生の発見	数	到達度
(23) b,c が連続するとき，$a>3$ であれば $b>2a$ である	1	2
(24) b の 1 の位が 1,3,6,8 のとき，b,c が連続するようにはできない	1	3
(25) b,c が連続するのは，b の 1 の位の数が 0,2,4 のときだけである	1	3
(26) $3a=b+c$ のとき，$a:b:c=3:4:5$ である	1	3
(27) $3a=b+c,\ 4a=b+c,\ 5a=b+c$ となるものが存在するので，$na=b+c$ となるものが存在するはずである	1	3
(28) $a+b-c$ は 2 の倍数である	1	3
(29) b,c が連続するとき，abc は 60 の倍数である	1	3
(30) 連続する 2 数の平方の和の差は，4 の倍数である	1	2
(31) a,b が連続するものより，b,c が連続するものの方が多い。	1	1
(32) a,b,c がすべて整数の三角形では，各の組み合わせが「$30°,60°,90°$」や「$45°,45°,90°$」にはならない。	1	1
(33) $x^2+y^2=z^2$ となる x,y,z は，原点を中心として半径 z の円上の点 (x,y) である	1	2
(34) $a^2+b^2=c^2$ の a,b,c を n 倍すると，$b-a$ の値も n 倍される	1	1
(35) 直角を作る直線に 1cm おきに目盛をつけ，縦横の目盛をつないだとき，その長さが整数であるような場合を見つければよい	1	1

5.3　評価のための分析項目

既存研究では，このようなオープンエンドの問題の評価は指摘事項と異なるアイデアの数により捉えられている [18)]。三平方の定理に関して同様のことを行おうとしたが,「異なるアイデアの数」の判断が極めて難しくて判断できなかった。そこで，ここでは，別な観点が考えられないかどうかを検討する。

このような課題を評価するにあたっては，誰でも気づく部分しか指摘してこなかった場合と，他の誰も気づかなかった指摘とは区別されるべきであろう。ただし，指摘した者が少ない場合は，それが高度の内容である場合と平易な内容である場合とがある。平易な内容であっても，指摘されて初めてそのことを意識する場合もあるので，その指摘には価値があると思われる。そこで,「他に誰も気づかなかった指摘」の判断は，その内容は区別せず単純に指摘事項の数の総数で行った。具体的には，表 1 の (1)〜(2) のように半数以上の者が気づいた内容を「希少度 1」，表 1 の (7) 以降のように 10 名以下の者しか気づかなかった内容を「希少度 3」とし，それ以外の指摘を「希少度 2」として区別した。

レポート全体の完成度も考慮する必要があると思われる。数学のレポートとしてみた場合は，証明の有無や一般化・抽象化のレベルなど，数学の思考の流れについても考慮する必要があろう。

表 2: 「三平方の定理」に関する指摘事項の分析項目

項目	内容
成績	4 回行われた定期試験の成績の平均値により，4 段階で区分した 1: 下位 (21 名)，2: 中下 (22 名)， 3: 中上 (24 名)，4: 上位 (27 名)
事項数	各学生について，指摘してきた項目の数 (1〜8)
到達値	各学生について，指摘事項の到達度の合計値 (1〜22)
到達区分	個々の項目の到達度の合計値である到達値により，全体を 4 段階に区分した。 1: 低い (1〜2，23 名)，2: やや低い (3〜5，28 名) 3: やや高い (6〜7，20 名)，4: 高い (8 以上，23 名)
総合到達度	個々の指摘事項からの計算ではなく，レポート全体を眺めた総合判断で 3 段階に区分した 1: 低い (22 名)，2: 中間 (51 名)， 3: 高い (21 名)
希少値	各学生について，指摘事項の希少度の合計値 (1〜20)
希少価値	希少値の値により，3 段階に区分した 1: 低い (1〜3，30 名)，2: 中間 (4〜7，36 名)， 3: 高い (8 以上，28 名)
証明の有無	指摘した事項に証明や説明を加えているかどうかで，2 段階に区分した 1: 証明無し (72 名)，3: 証明有り (22 名)
推測と確認	自分の予想が正しいことを，それまで調べたもの以外で確認しているかどうかで，2 つに区分した 1: 確認無し (50 名)，2: 確認有り (44 名)
一般化	一般化・抽象化しようとしているかどうかで 3 段階に区分した 1: そのような流れが見られない (25 名) 2: 特殊な場合について一般的化しようとしている (42 名) 3: 言葉や式を用いて一般化している (27 名)
思考の流れ	「こういう場合は，どうなるだろう？」という思考が連続しているかどうかで，3 段階に区分した 1: 単なる指摘だけで終わっている (14 名) 2: 「この場合は，どうなるだろう？」と 1 回だけ考察 (38 名) 3: 「この場合は，どうなるだろう？」が連鎖している (42 名)
習熟度	アンケート調査 (p.134) の (1)〜(20) の回答をもとに，数ナビの習熟度を 4 段階に区分した。 1: 悪い (20 名)，2: やや悪い (26 名) 3: やや良い (18 名)，4: 良い (26 名)
利用頻度	アンケート調査 (p.134) の回答をもとに，数ナビの利用頻度を 4 段階に区分した。 1: 悪い (18 名)，2: やや悪い (22 名) 3: やや良い (34 名)，4: 良い (20 名)

注：外部発表論文「数学教育における創造力を育む試み」で取り上げている「到達度」(p.106) は，この表の「総合到達度」である。ただし，投稿後にレポート全体をもう一度見直して再判定を行ったため，区分に属する数を若干変更した。

学生に課している自由研究では，貸与している数ナビを利用した試行錯誤を求めているので，この機器操作への習熟度がレポートの完成度に影響することも考えられる。そこで，最後の授業で行ったアンケート調査では，数ナビの習熟度や利用頻度に関する項目も設けた(p.134)。そして，その項目をもとに，数ナビの習熟度と利用頻度を 3 段階に区分した。他にも，表 2 のようなさまざまな分析項目を設け，これらの項目間の関係や成績との関連性などを調べながら，どのような観点で評価するのが望ましいかを検討する。

5.4 評価方法の検討

表 3 は，前節の項目別に，到達値，希少値，そして指摘事項の数の平均と標準偏差をみたものである。表 4 は，これらの項目間の相関係数である。

表 3 や表 4 をみると，次のようなことが分かる。

- 到達値は成績との関連性が若干見られるが，それほど強いものではない。
- 到達値と希少値との間には強く関連性がある。
- 一般化の傾向が強いほど，到達値や希少値は高い。
- 思考の流れが連鎖的であるほど，到達値や希少値が高い。
- 到達値や希少値は，数ナビの習熟度とは関連していない。
- 数ナビの利用頻度が高い者は，到達値や希少値が高い。

到達値が高い者ほど，誰もがあまり気づかないことを多く指摘してきているので，到達値と希少値とが強い関連性を見せるのは当然のことである。成績との関連性が見られるのも当然であろう。むしろ，それほど強いものではないことの方が重要と思われる。一般化しようとしているかどうか，また，次々に思考を連鎖させようとしているかどうかという項目との関連性も強く見られるが，一般性のあるいろいろな性質に気づくにはこのような思考過程が必要なので，これも当然の結果であろう。

一方，表 3 をみると，数ナビの利用頻度が高い者の到達値や希少値は，他の者より飛び抜けて高い。いろいろな試行錯誤の部分に数ナビを積極活用することにより，いろいろなことに気づく機会が増え，それがさらなる思考を後押ししているのではないかと推測される。

しかし，学生のレポートの評価を指摘事項の到達度の合計である到達値でみようとすると，その値を計算する作業はかなり繁雑であり現実的とは思えない。もう少し簡単な作業で，同様の評価は得られないだろうか。表 3 をみると，到達値は一般化や思考の流れとの関連性がみられた。そこで，これらの項目をクロスさせて，各セルごとに到達値を調べた。次頁の表 5 は，その到達値の平均である。左斜めの方向に一定の傾向が認められる。そこで，各セルを (一般化, 思考の流れ) の形で表すとき，$(1,1)$ をグループ 1，$(1,2)+(2,1)$ をグループ 2，$(1,3)+(2,2)+(3,1)$ をグループ 3，$(2,3)+(3,2)$ をグループ 4，そして $(3,3)$ をグループ 5 として新たに区別した。表 6 は，その区分ごとに到達値，指摘事項の数，そして学年末の成績を求めたものである。この新区分は，成績との関連性は薄いことが分かる。

表 3: 項目別の到達値・希少値・事項数

区分		数	到達値	希少値	事項数	成績
全体		94	5.39 (3.664)	5.95 (3.914)	2.98 (1.503)	50.8(9.276)
成績	上位	27	6.04 (3.425)	6.70 (3.998)	3.22 (1.476)	60.9 (2.929)
	中の上	24	5.83 (3.644)	6.33 (3.841)	3.13 (1.361)	53.6 (1.677)
	中の下	22	5.27 (4.822)	5.23 (4.927)	2.77 (1.926)	47.4 (2.088)
	下位	21	4.19 (2.272)	5.29 (2.452)	2.71 (1.189)	36.3 (6.945)
到達区分	高い	23	10.26 (3.250)	10.87 (3.429)	4.83 (1.154)	53.6 (10.53)
	やや高い	20	6.40 (0.503)	7.05 (1.849)	3.50 (0.513)	50.2 (9.801)
	やや低い	28	3.93 (0.858)	4.14 (1.268)	2.36 (0.678)	50.5 (8.412)
	低い	23	1.43 (0.507)	2.26 (1.815)	1.43 (0.788)	48.8 (8.385)
希少	高い	28	9.25 (3.627)	10.79 (2.948)	4.64 (1.129)	52.5 (10.39)
	中間	36	5.11 (1.703)	5.44 (1.081)	2.86 (0.723)	50.4 (9.681)
	低い	30	2.13 (1.358)	2.03 (0.928)	1.57 (0.817)	49.6 (7.602)
証明	説明有り	22	8.05 (4.756)	7.64 (4.541)	3.55 (1.711)	55.4 (6.411)
	証明無し	72	4.58 (2.837)	5.43 (3.579)	2.81 (1.401)	49.4 (9.586)
確認	確認有り	44	5.41 (3.926)	5.89 (4.200)	2.89 (1.631)	51.1 (8.245)
	確認無し	50	5.38 (3.458)	6.00 (3.687)	3.06 (1.391)	50.5 (10.17)
一般化	一般化	27	7.78 (4.397)	7.85 (4.213)	3.63 (1.548)	50.8 (8.725)
	傾向有り	42	5.24 (2.912)	6.24 (3.614)	3.10 (1.445)	51.3 (9.526)
	見られず	25	3.08 (2.139)	3.40 (2.614)	2.08 (1.115)	49.8 (9.718)
思考	連鎖的	42	7.29 (4.080)	7.98 (4.105)	3.69 (1.490)	53.4 (9.446)
	単発的	38	4.29 (2.525)	4.76 (3.044)	2.63 (1.282)	47.9 (8.723)
	指摘だけ	14	2.71 (1.590)	3.07 (1.940)	1.79 (0.975)	50.5 (8.451)
習熟度	高い	26	5.69 (3.519)	6.50 (3.992)	2.92 (1.598)	50.7 (10.63)
	やや高い	18	5.67 (2.679)	6.33 (3.464)	3.17 (1.425)	51.3 (8.681)
	やや低い	26	5.73 (4.712)	5.65 (4.409)	3.15 (1.617)	49.8 (9.282)
	低い	20	4.20 (3.334)	5.00 (3.839)	2.50 (1.395)	48.1 (11.54)
利用度	高い	20	7.55 (4.478)	8.35 (4.648)	3.70 (1.689)	52.1 (6.976)
	やや高い	34	4.85 (3.332)	5.15 (3.611)	2.76 (1.478)	50.9 (9.226)
	やや低い	22	4.95 (2.734)	5.86 (3.270)	3.05 (1.214)	49.1 (10.44)
	低い	18	4.56 (3.634)	4.89 (3.445)	2.50 (1.465)	48.1 (12.26)

平均値 (標準偏差)

表 4: 項目間の相関係数

	成績	到達	希少	証明	確認	一般化	思考	習熟度	利用頻度
成績	1	0.213*	0.184	0.283*	0.044	0.048	0.253*	0.100	0.100
到達	0.213*	1	0.818*	0.316*	0.036	0.440*	0.515*	0.162	0.200
希少	0.184	0.818*	1	0.207	−0.029	0.438*	0.506*	0.141	0.267*
証明	0.283*	0.316*	0.207	1	0.035	0.525*	0.439*	0.201	0.267*
確認	0.044	0.036	−0.029	0.035	1	0.031	0.147	0.031	0.079
一般	0.048	0.440*	0.438*	0.525*	0.031	1	0.430*	0.255*	0.249*
思考	0.253*	0.515*	0.506*	0.439*	0.147	0.430*	1	0.241*	0.223*
習熟	0.100	0.162	0.141	0.201	0.031	0.255*	0.241*	1	0.260*
利用	0.100	0.200	0.267*	0.267*	0.079	0.249*	0.223*	0.260*	1

∗ 印は，両側検定で優位水準 5%で優位差が認められた項目である。

表 5：一般化と思考の流れの別にみた到達値の平均

		思考の流れ 1: 指摘だけ	2: 単発的	3: 連鎖的	全体 (数)
一般化	1: 見られず	2.11 (9)	3.82 (11)	3.20 (5)	3.08 (25)
	2: 傾向あり	4.00 (3)	4.18 (22)	6.82 (17)	5.24 (42)
	3: 一般化	3.50 (2)	5.80 (5)	8.70 (20)	7.78 (27)
全体 (数)		2.71 (14)	4.29 (38)	7.29 (42)	5.39 (94)

表 6：新区分による到達値の平均

グループ	1	2	3	4	5	全体
数	9	14	29	22	20	94
到達値	2.11	3.86	3.97	6.59	8.70	5.39
標準偏差	1.054	2.248	2.692	2.282	4.714	3.664
事項数	2.28	2.85	3.83	3.50	4.14	5.00
標準偏差	1.054	2.248	2.692	2.282	4.714	3.664
成績	50.0	49.6	49.5	51.4	53.2	50.8
標準偏差	7.773	10.71	8.534	11.15	7.869	9.276

表 7: 自由研究をやって数学的なことで新しい発見があった

項目		否定	中間	肯定	% (数)
全体		12.8	26.6	60.6	100.0 (94)
到達区分	低い	8.7	30.4	60.9	100.0 (23)
	やや低い	21.4	25.0	53.6	100.0 (28)
	やや高い	5.0	30.0	65.0	100.0 (20)
	高い	13.0	21.7	65.2	100.0 (23)
総到達	低い	18.2	18.2	63.6	100.0 (22)
	中間	13.7	35.3	51.0	100.0 (51)
	高い	4.8	14.3	81.0	100.0 (21)
新区分	グループ 1	22.2	44.4	33.3	100.0 (9)
	グループ 2	21.4	35.7	42.8	100.0 (14)
	グループ 3	10.3	31.0	58.6	100.0 (29)
	グループ 4	13.6	18.2	68.2	100.0 (22)
	グループ 5	5.0	15.0	80.0	100.0 (20)
事項数	指摘事項 1	38.9	22.2	38.9	100.0 (18)
	指摘事項 2	20.0	25.0	55.0	100.0 (20)
	指摘事項 3	17.4	30.4	51.8	100.0 (23)
	指摘事項 4	15.0	35.0	50.0	100.0 (20)
	指摘 5 以上	23.1	38.5	38.5	100.0 (13)

「総到達」は，表 2 の「総合到達度」を表す。

この到達値は，指摘内容の数学的にみた到達度を表そうとした数値である。しかし，教師側からみると単純な指摘でも，学生自身にとっては大きな発見である場合もある。数学的に見た場合は平易な発見をして学生が喜びを感じているときに，その発見の到達値を学生に示すことはあまり教育的とは思えない。たとえば，三平方の定理の場合に，$a^2 + b^2 = c^2$ が成立すれば，それらを n 倍しても成立することを，$n = 2, 3, \cdots, 10$ の場合についてレポート用紙 5 枚を使って延々と書き出した学生がいる。この学生にとっては，レポート作成時には「2 倍しても成立する」「3 倍しても成立する」というワクワク感があったのではないかと思われる。平易な発見であっても，このようなワクワク感は大事にしたい。

そこで，表 7 によりこの質問項目への回答状況をみると，到達度に関する新区分は，到達値による区分や指摘事項の数でみるよりも，学生にとっての発見の有無の認識をある程度反映したものになっているように思われる。この区分を行うには，学生のレポートを 2 つの視点で点検し，それぞれ 3 段階の判定を行う。そして，その合計値を取ればよい。指摘事項の数を数える必要もなければ，指摘事項の数学としてみた場合の到達度を判定する必要もない。レポートの考察の進め方について，一般性のある記述をしようとしているかどうか，ま

た，思考の展開が次々に発展しているかどうかをみるだけである。判定者の主観がかなり混じる部分ではあるが，数学に関する部分の判定であるので，見る人による誤差にそれほど大きなものは現れにくいように思われる。

しかし，この新区分は，三平方の定理に関するレポートをもとにした区分である。「新しい発見があった」とする学生の回答は年間を通しての感想であり，必ずしも三平方の定理に関するものではない。上述の区分の仕方に一般性があるのかどうかについては，今後さらに検討を加えていきたい。

第6章　本研究のまとめ

6.1　試行錯誤を伴う数学教材

数ナビの数式処理機能やグラフ機能を利用して，試行錯誤を伴いながら数学的性質を発見させる教材として実践したものを下記にまとめる。

連分数

概要　$1/(1+1/(1+1/(1+1)))$ 等の値について考察させる。

主な発見

- n 番目の分数を a_n と表すと，$a_n = \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$ という関係にある。分母が次の分数の分子になり，分数と分子の和が次の分数の分母になるは，$a_{n-1} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，

$$a_n = \frac{1}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{(a_{n-1}\text{の分母})}{(a_{n-1}\text{の分子})+(a_{n-1}\text{の分母})}$$

  となるからである。
- 最初の分数が分かれば，その後の分数を次々に求めることができる。
- 分数の値は，ジグザグを繰り返しながら特定の値に近づいていく。

教育効果

既約分数に直す部分は数ナビを利用するので，繁分数を学習済みであれば学年を問わず実施できる。規則性についての発見も容易である。

発展性

フィボナッチ数列の豊富な世界につながっている。数列の漸化式や極限値について考察させることもできる。

二項定理

概要　$(x+1)^n$ を降べきの順に展開した式を見ながら，指数 n と展開式の係数との関係についての規則性を発見させる。

主な発見

- $a_k x^{n-k}$ の次の項の係数は $a_k \times (n-k) \div k$ である。
- 左から 3 番目の係数は，1 から $n-1$ までの和である。たとえば，$n=5$ のとき 3 番目の係数 10 は，$1+2+3+4=10$ である。
- n が奇数 $2k+1$ のとき，左と右から 3 番目の係数は，$n=2k+1$ に k を掛けた数である。

教育効果

数ナビの表示する展開結果を見ながら考えるので，誰でも何らかの規則性に気づくことができる。学年を問わないで実施可能である。単純な展開式の中に多様な規則性が含まれていることに学生は驚嘆する。

発展性

フラクタル，フィボナッチ数列，$1/(1-x)^n$ のべき級数展開の係数とも関連している [15]。$(x^2+x+1)^n$ 等の展開に発展させることもできる。

$x^n - 1$ の因数分解

概要　x^n-1 の因数分解した式の形と指数 n との関係について考察させる。

主な発見

- 指数が nm の形の式は，x^m-1 を因数に持つ。
- n が 2 のべき乗のときは $x^{\frac{n}{2}}+1$ が含まれる。
  たとえば，$x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ である。
- 指数 n の約数の数と，因数分解された式の数とは一致する。

教育効果

数ナビに因数分解を行わさせるだけなので学年を問わず実施可能である。ただし，学生にとっては，$(x+1)^n$ の展開と比べて規則性が見出しにくいようである。

発展性

複素数を学んでいる場合は，$z^n=1$ の解の図形的な意味と関連させることもできる。

$x^n + a$ の因数分解

概要　x^n+a が整数係数で因数分解できるための，自然数 n, a の条件について考察させる。

主な発見

- $x^{2^n}+1$ は因数分解できない。
- x^n+n は，$n=4^{2k-1}$ のときに因数分解できる。
- x^n+a は n が 4 の倍数で $\sqrt[4]{4a}$ が整数になるときに因数分解できる。

教育効果

数ナビを利用していろいろな因数分解を試していくだけであるが，n と a の 2 つを自分で工夫しながら試すので，その分多様な発見がなされてくる。学生自身での証明も十分可能な内容が多い。

三平方の定理

概要　三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数 a,b,c にはどのようなものがあるを考察させる。

主な発見

- $A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x について，x の 1 の位の数は 0,2,4 のときに限られる。
- a,b が連続する場合は，$3^2+4^2=5^2$ から数えて n 段目を $a_n^2+b_n^2=c_n^2$ とすると，$a_n=6\times a_{n-1}-(a_{n-2}-2)$, $c_n=6\times c_{n-1}-c_{n-2}$ という関係がある。
- b,c が連続するとき，次のことが成立する。
  $(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+\cdots+1))^2=(4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$

教育効果

三平方の定理というよく知られた定理に関する考察なので，関心をもって取り組ませることができ，学生のレベルに応じて多様な発見が期待できる。

3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフ

概要

$y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフと係数の間の関連性について考察させる。

主な発見

- $a>0$ のとき，$y=x^3+ax^2$ の山の頂点の座標は $\left(-\dfrac{2}{3}a,\dfrac{4}{27}a^3\right)$ である。
- $y=x^3+bx$ のグラフは，b を正の方に変化させていくとグラフは直線のようになり，b を負の方に変化させていくと山や谷の部分が大きくなっていく。
- $y=x^3+ax^2+bx$ と x 軸との共有点の個数は 1〜3 個であり，必ず原点を通る。それ以外の共有点を持つのは $a^2-4b\geqq 0$ のときであり，共有点の x 座標は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ である。

教育効果

2 次関数のグラフと違い，係数を少し変えるとグラフの形が大きく変わることに多くの学生は驚くようである。微分法の導入前に課すと効果的と思われる。

発展性

正弦関数の 1 周期分を近似する 3 次関数を探索的に求めさせ，級数展開につなげることもできるであろう。清風高校の公庄は，ある生徒が正弦関数の全範囲を $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ $\left(|x| \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とガウス記号を用いて表すことに成功したことを報告している [?]。

絶対値関数のグラフ

概要

1 次関数の絶対値を含む関数のグラフについて，そのグラフの形状について考察させる。

主な発見

提示したグラフ (p.140) に対して，下記の関数が示された。

- $y = ||x| - p| + q$
- $y = \dfrac{1}{2}|x + p| + \dfrac{1}{2}|x - p| - p$
- $y = \dfrac{|x|}{-x}$

教育効果

絶対値を苦手とする学生が多いので，問題を提示するときは，ある程度誘導するような表現とした方がよい。数ナビは複素数の絶対値も計算するので，根号を含む場合は定義域について注意が必要である。

曲線で囲まれた図形の面積

概要

曲線 $y = 1 - x^2$ と x 軸とで囲まれた図形の面積の求め方について考察させる。

主な発見

次のような考え方が自然になされてきた。

- 外側と内側から既存の図形ではさみ，それらの面積の中間として求める。
- 縦長の細かい図形 (台形) に分割して，それらの面積の総和として求める。
- 横長の細かい図形 (台形) に分割して，それらの面積の総和として求める。

教育効果

区分求積の考え方を自然に行う学生が現れるので，定積分の導入前に行うとより効果的と思われる。

発展性

円を利用して円周率 π の近似値を考えさせてもよいであろう。

3 次関数 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフ [23)] (平成 15 年度)

概要

$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフと a,b,c の間の関連性について考察させる。

主な発見

- $a<b<c$ で $b-a=c-a$ のとき，山と谷の y 座標の絶対値は等しい。
- $a<b<c$ で $b-a=c-b$ のとき，
  山の頂点の座標は $(b-0.57735(b-a), 0.3849(b-a)^3)$ であり，
  谷の頂点の座標は $(b+0.57735(b-a), -0.3849(b-a)^3)$ である。
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，$\alpha=\dfrac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{3}$ とおくと，$\alpha<0$ のときに山や谷が現れる。山や谷の頂点の x 座標は $A=\dfrac{a+b+c}{3}$ とおくと $x=A\pm\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}$ である。また，y 座標は $y=\left(A\pm\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(A\pm\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(A\pm\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)$ である。

教育効果

a,b,c は x 軸との共有点の x 座標であるので，$y=x^3+ax^2+bx+c$ の場合よりも特徴が捉えやすいと思われる。高次不等式を扱っているときに考察させるのが効果的と思われる。

発展性

展開して $y=x(x^2+ax+b)$ の形の場合や，次数を上げて 4 次関数 $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ の考察を求めてもよい。

6.2 学生の反応

年間で 3 回，数ナビを利用した試行錯誤を伴う課題を行ったことに対する感想を自由記述で求めると，以下のような感想が得られた。

(1) 楽しかった，おもしろかった，良かった	51 名 (35.9%)
(2) 勉強になった，理解が深まった	22 名 (15.5%)
(3) 大変だった・面倒だったが，おもしろかった・勉強になった	33 名 (23.2%)
(4) 分からなかった，難しかった	27 名 (19.0%)
(5) その他の内容	9 名 (6.3%)

これらの感想は成績の上下や，数学に対する好き嫌いにはよらない。成績下位の学生でも約 70%は，この数学の自由研究を行って「(1) 楽しかった」「(2) 勉強になった」「(3) 大変だったが，おもしろかった」という感想を持ったことになる。

以下に，このうちの主要な感想を再掲する。

- 今までは規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった。

- 自由研究をやってきて，自分でも数学に対する考え方が変わったのが良く分かった。自由研究は，自分で新しい法則 etc が発見できるので，楽しかったです。
- 今までは，ただ計算し，理解せずに書いていたが，自由研究によって理解しながら解けるようになった。
- 自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった。
- 始めは面倒だと思っていても，いざ始めると没頭してしまった。
- 面倒な気もしていたけど，どういった仕組でこうなるというのが分かってくると，興味や関心が少し強くなってきたので，数学の内容を深く知ることができたと思った。
- 自由研究は，出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った。来年もやりたい。
- 自由研究をやって，今まで考えなかった考え方をするようになった。
- 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見することができるようになったと思う。
- 普通の数学の授業とは違った，数学の楽しい部分があることを知った。

6.3 試行錯誤を伴う数学教材の評価

三平方の定理に関する学生のレポートを仔細に検討して，個々の指摘事項の数学としてみた場合の到達度を 3 段階で判定した。そして，三平方の定理に関する各指摘事項の到達度の合計をその学生の到達値とし，他のいろいろな項目との関連性を探ったところ，以下の傾向が見られた。

- 到達値には，ある程度成績との関連性が見られる。
- 三平方の定理に関する到達値が低くとも，年間を通してみると約 60%は「新しい発見があった」と感じている。
- 指摘事項が多くても，必ずしも「新しい発見をした」と感じているわけではない。
- 数ナビの利用頻度の高い学生の到達値は高い。
- レポートの内容を，一般性のある記述をしようとしているかどうか，また思考が次々に発展しているかどうかをそれぞれ 3 段階 (1〜3) で判定し，これら 2 つの項目の判定値の合計により新な区分けを行った。新区分で高い位置にあるほど,「新しい発見があった」とする割合が多い。

このような試行錯誤を行わさせる課題では，学生自身にとっての発見の喜びをできるだけ味あわせることが重要と思われる。一般性と思考の流れに関する項目を利用した区分は，学生自身の発見体験との関わりがあることが推測されるが，他の課題で確認するまでには至らなかった。他の課題でも同様のことが言えるかどうかは，引き続き検討していきたい。

6.4　試行錯誤を伴う数学教材の意義

このような試行錯誤を伴う課題の意義としては，まず，数学の１つの問題を長時間考え抜く体験をさせることができることが上げられる。しかも，時間をかけて考えた結果，多くの学生に数学的な事柄を発見する喜びを成績の上下によらずに感じさせることができた。それは，考えさせた問題が，ちょっと考えると誰でも何かに気づく部分を含んでいたためと思われる。中には，そのような部分に気付いたことで終わることなく，さらに独自の視点で問題設定をして教師側が予想もしない内容に踏み込む学生も現れている。

このことは，学生に与える問題内容を吟味することで，数学に関する発見の喜びを，教師側が意図的に学生に感じさせることができることを示唆している。適切な課題を継続的に与えていけば，学生の数学に対する見方が大きく変わることも期待され，数学教育における新な可能性が示唆されているように思われる。しかも，この効果を得るために，通常の授業体系を大きく変更する必要はない。教師は，単に問題を提示しただけである。

また，成績下位の学生でも何らかの発見ができたのは，課題の内容に関する部分に加えて，数学的な試行錯誤にテクノロジーとして数ナビ (数式処理電卓) を利用できたことも大きく寄与している。このツール無くしてこのような結果は得られなかったであろう。三平方の定理は単なる四則計算のできる電卓でも十分に考察可能と思われるが，グラフ電卓を利用することで入力した式の履歴が残り，さらに考えやすかったのではないかと思われる。特に，このツールの利用頻度の高い者は到達値が飛び抜けていたことは特筆されるべきである。このツールを使いこなした暁には，学生の思考回路が飛躍的に開花するのではないか予想していたが，そのことがある程度裏づけられたように感じられる。

対象とした学生は高専１年生ということもあり，自分の発見したことの証明まで考察できた学生は少ない。しかし，まず数学的なことについて何かを発見する体験をさせ，それにより通常の問題解法では得られない喜びを感じさせることができたことだけでも，この試行錯誤を伴う数学教材の役割には十分なものがあると思われる。

一方，教師側にとっては，問題を提示することは容易でも，提出されたレポートの点検作業の大きさには，かなりの負担感がある。提出された多様なレポートの評価方法の確立はできなかったが，新な視点が得られた。今後は，さらに様々な角度から検討を加えていきたい。

参考文献

[1] 全米数学教師協議会 (NCTM): Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics，2000

[2] 今、世界の国々では···，Technology In Math Education，TEXAS INSTRUMENTS，vol.14，1999

[3] 瀬沼花子：電卓・グラフ電卓を利用した算数・数学教育–小学校から大学まで–，平成 6 年度科学研究費補助金 (一般 C) 中間報告書，1995

[4] 瀬沼花子：グラフ電卓を利用した数学科指導法の開発，平成 7 年度科学研究費補助金 (一般 C) 報告書，1996

[5] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦偏： テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997

[6] http://www.atcminc.com/

[7] 数ナビ活用研究会：すべての高専生に「数ナビを」，日本数学教育学会高専大学部会論文誌，Vol.7，No.1，pp.141–142，2000 年

[8] 梅野善雄：数式処理電卓を用いた微積分教育の改善，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，No.8，Vol.1，pp.13–30，2001

[9] 梅野善雄：数式処理電卓の利用による数学に対する学生の意識変化，論文集「高専教育」，Vol.25，pp.175–180，2002

[10] 梅野善雄：関数教育における数式処理電卓の短期利用とその効果，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.10，No.1，pp.27–36，2003 年

[11] 梅野善雄:グラフ電卓を利用したグラフ・アートと関数教育，論文集「高専教育」，Vol.27，pp.191–196，2004 年

[12] 梅野善雄：3 次・4 次関数に関する高専 1 年生の発見，T^3Japan 第 8 回年会講演集，pp.160–165，2004 年

[13] 島田茂編：新訂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」，東洋館出版，1996 年

[14] 福井高専 長水研究室：1 年基礎解析の教材，
`http://www.ge.fukui-nct.ac.jp/~nagamizu/kisokai.htm`

[15] 松田修，アクチバヤル・アマルサナー：$k-$ パスカル三角形と $k-$ フィボナッチ数列，数学教育研究 8 号，数学教育の会，pp.107–111，2006 年 1 月

[16] 公庄庸三：数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる，日本数学教育学会高専大学部会論文誌，Vol.7，No.1，pp.146–150，2000 年

[17] 清風数学教育研究会：TI–92 を用いた数学教育実践報告，
`http://www.ne.jp/asahi/math-edu/osaka/mtt.html`

[18] 澤田利夫・橋本吉彦：数学科での評価，p.97，共立出版，1990 年

[19] 清風数学教育研究会：M.T.T. 研究レポート集，
`http://www.ne.jp/asahi/math-edu/osaka/report1.pdf`，p.22

[20] B. シェルピンスキー：ピタゴラスの三角形，東京図書，p.21，1993 年
[21] 阿蘇和寿：高専の授業における学生の探究活動–テクノロジーの効果的な活用に向けて–，日本数学教育学会高専大学部会論文誌，Vol.9，No.1，pp.31–50，2002 年
[22] 梅野善雄：試行錯誤で「三平方の定理」を考える，数学教育研究，Vol.8，pp.113–125，2006 年
[23] 梅野善雄：3 次関数の性質に関する高専 1 年生の自由研究，数学教育研究，Vol.7，pp.71–83，2005 年
[24] 梅野善雄：数式処理電卓を利用した高専における微積分教育，数学教育研究，Vol.4，pp.17–33，2002 年
[25] 梅野善雄：数式処理電卓の応数・応物での利用例案と予想される教育効果，工学教育，Vol.50，No.1，pp.22–27，2002 年

第II部

外部発表論文

3次関数の性質に関する高専1年生の自由研究

梅野　善雄*
一関工業高等専門学校

1.　はじめに

通常の数学の授業では，まず教師が数学的概念を説明する。そして，幾つかの例題をやってみせた上で学生に類似の問題を課す形の授業が多い。ある程度の理解が得られたときは，さらに応用問題を課して理解の定着と深化を図ることになる。いずれにおいても，学生は「〜を解け。」「〜を証明せよ。」という形で，教師から与えられた問題を考えることになる。限られた範囲の問題を多数こなしていく中では，幾つかの解答パターンが見えてくる場合もある。そうすると，今度は，効率的に解答するために「その解答パターンを覚える」という形で学習する学生も現れてくる。それは，短期的に乗り超えなければならない学習目標がある場合は，極めて効率的な学習方法であるということもできよう。

一方,「数学をする」という立場に立つと，何らかの試行錯誤を伴う問題を考えさせることが有効と思われるが，そのような課題を課すことは現実にはなかなか難しいものがある。特に，基礎力ができていない学生の場合はなおさらである。十分に能力のある学生であっても，相当の計算力や思考力がないと，それを実行するのはなかなか困難であろう。

しかし，計算や複雑な関数のグラフ表示など，学生にとって困難な部分を数式処理機能に任せてしまえば，ある程度の試行錯誤を行わさせることが可能になる。本校では，学生に数式処理可能なグラフ電卓 (テキサスインスツルメント社，TI–89) を貸与している。この電卓の機能を利用すると，関数の式を定義するだけでグラフが表示される。その描画範囲を変更したり，x 軸との共有点や極値を与える点の座標も簡単に求められる。また，数式処理機能を利用すると，式の展開・因数分解や方程式の解法などもキー操作だけで可能である。

以下では，平成 15 年度の本校 1 年生がグラフ電卓を利用して行った自由研究の内容について紹介する。学生は，3 次関数のグラフの性質に関して，成績の上下によらず何らかの規則性がないかどうかを考察した。基礎力に難のある学生であっても，グラフ電卓が表示するグラフから何かを考えることができる。成績上位の学生の場合は，自分で思考を押し進めて数学の世界にはまっていく学生も出てきた。数学教育におけるグラフ電卓の意義や有効性について，再認識させられた思いがある。

なお，この論考は,「数学教育の会，2004 年夏の集会」(学習院大学，2004.9) における発表と，T^3Japan 第 8 回年会 (筑波大学附属駒場中・高等学校，2004.8) における発表をもとに，加筆修正したものである。

*021–8511　岩手県一関市萩荘字高梨、　http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

2. 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ に関する自由研究

2.1 学生に与えた課題

平成 15 年度の本校 1 年生 (163 名) に，夏季休業の課題として，通常の問題練習の他に次のような課題を出した。

(1) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフは，a, b, c がどのようなときにグラフがどのようになるか，できるだけ一般的な性質を見い出せ。
(2) $y = f(x)$ と $y = |f(x)|$ のグラフとの関係はどのようになっているかを考察せよ。
(3) $y = 1/(x^2 + ax + b)$ のグラフはどのようになるか，できるだけ一般的な性質を見出せ。
(4) $(x + 1)^n$ の展開式を調べて，それらの係数の間にどのような関係があるかを考察せよ。

この課題を出した時点で，2 次関数，$y = x^n$ のタイプのべき関数，分数関数，無理関数，そして逆関数について学生は学習済みである。この中から 1 問を選択させたが，大部分の学生は (4) を選択した。(1) を選択したものは 12 名，(2) は 11 名，そして (3) は 4 名だけであった。

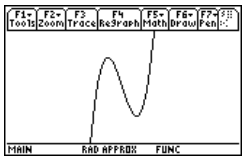


図 1

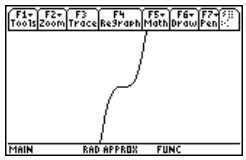


図 2

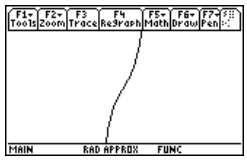


図 3

課題 (1) の意図は，a, b, c にいろいろな値をいれてグラフを表示させることにより，3 次関数のグラフには基本的に 3 つのパターンがあることに気づかせようとすることにあった。3 次関数の増加・減少や極値を調べることは微分法を学習する 2 年まで待たなければならないが，単に係数をいろいろ変えながらグラフを表示させるだけで，学生は次のようなことを指摘してきた。以下では，(1) を選択した 12 名の学生のレポートの概略を紹介する。

2.2 係数 a の意味

図 1 のタイプはどのようなときかに関して,「a の値を大きくしていくと山が大きくなる。」というような表現で係数 a の役割が指摘されている。ある学生は,「b, c を固定して a を増加させていくと左側に山ができ，反対に a を減少させていくと右側に谷ができる。」(図 4, 図 5) ことに気づいている。

この指摘は正しい。実際，$y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと，$y' = 3x^2 + 2ax + b$ より，極値を持つのは $D/4 = a^2 - 3b > 0$ のときである。したがって，b を固定して $|a|$ を増加させて

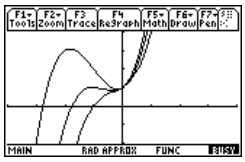


図 4
$a=1,2,3$
$b=c=1$

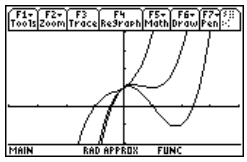


図 5
$a=1,-2,-3$
$b=c=1$

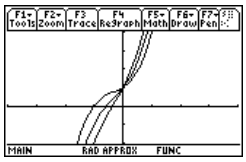


図 6
$b=1,2,3$
$a=c=1$

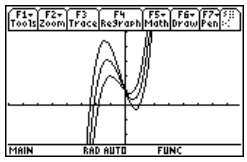


図 7
$b=-1,-2,-3$
$a=c=1$

いくと $D>0$ となり $f(x)$ は極値を持つようになる。$x=\alpha,\beta$ のときに極値を取るとすると，$|f(\alpha)-f(\beta)|=\frac{4}{27}\sqrt{(a^2-3b)^3}$ であることより，b を固定して $|a|$ を増加させていくと極大値と極小値との差は増加していく。また，極大値・極小値の一方があまり変化しないことは，微分法を利用すると次のようにして確認できる。

今，b,c を固定して a を変化させる場合を考える。$f'(x)=3x^2+2ax+b$ であるから，極小値を取るのは $\alpha=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}$ のときである。そこで，極小値 $f(\alpha)$ を a の関数とみて a で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}f(\alpha)&=3\alpha^2\frac{d\alpha}{da}+\alpha^2+2a\alpha\frac{d\alpha}{da}+b\frac{d\alpha}{da}\\&=(3\alpha^2+2a\alpha+b)\frac{d\alpha}{da}+\alpha^2\\&=\alpha^2=-\frac{2}{3}a\alpha-\frac{b}{3}\\&=\frac{2}{9}a\cdot(a-\sqrt{a^2-3b})-\frac{b}{3}\end{aligned}$$

これより，$a\to\infty$ のときは，

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}f(\alpha)&=\frac{2}{9}a\cdot\frac{3b}{a+\sqrt{a^2-3b}}-\frac{b}{3}\\&=\frac{2}{9}\cdot\frac{3b}{1+\sqrt{1-3b/a^2}}-\frac{b}{3}\to 0\end{aligned}$$

である。したがって，$a\to\infty$ となるにつれ，極小値はあまり変化しなくなることが分かる。$a\to-\infty$ のときは，極大値に関して同様である。

多数のグラフを表示させてみる中で，それらのグラフは全て点対称であることに気づいた学生もいる。その学生は,「対称点の位置は $a>0$ のときは x 軸の負の側にあり，$a<0$ のときは x 軸の正の側にある。」ことを指摘している。この指摘も正しい。実際，$y''=6x+2a$ であることから，変曲点の x 座標は $-\dfrac{a}{3}$ である。対称性を指摘してきた学生も，その x 座標を求めようとすればさらに考察が深まったと思われる。

2.3 係数 b の意味

係数 b については,「b の値を大きくすると直線に近づいていく。」(図 6) というような表現で，その役割が指摘されている。ある学生は b だけではなく a との関係にも注目して,「b が大きくて a が小さい場合は直線に近いグラフになる。」としている。実際，b が大きくても，たとえば $a=b=5$ であれば $D>0$ となり極値が現れる。

また，ある学生はグラフ電卓の機能を利用してグラフと x 軸との交点の座標を求めている。そして，b を大きくしていくと交点の x 座標が 0 に近づいていくことなどから,「b が大きくなると y 軸に近づいていく。」としている。反対に，b の値を小さくすると「グラフの波が大きくなる。」(図 7) こと も指摘されている。

これらの指摘も正しい。実際，$y' = 3x^2 + 2ax + b = 0$ の判別式は $D/4 = a^2 - 3b$ であるので，b を正の側に増加させていくと $D < 0$ となる。このとき $y' = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{D}{3} > 0$ であるから，y は単調増加になり b が大きいほど接線の傾きも大きくなる。

逆に，$b \to -\infty$ のときは $D = a^2 - 3b > 0$ となるので，y は極値を持つようになる。今，$x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ のときに極値を取るとすると，α, β は $3x^2 + 2ax + b = 0$ の解であるから，

$$\frac{d}{db} f(\alpha) = \alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \qquad \frac{d}{db} f(\beta) = \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$$

となるので，$b \to -\infty$ につれ極値の変化の割合も大きくなる。つまり，この場合は，極大値と極小値の両方の絶対値が大きくなる。

2.4　学生の考察の仕方

数学の学習で，このような試行錯誤を通して何かを発見するような課題は，学生にとっても初めての体験だったと思われる。その考察の仕方は，大きく分けると次の 3 つパターンに分類できる。

(1) 2 つの係数を固定して残りの 1 つの係数だけを変化させてグラフの変化を調べたもの。
　例えば，$y = x^3 + ax^2 + x + 1$ において a の値を変えてグラフの形状を比較する。
(2) 係数の符号により場合分けして調べたもの。
　例えば， 係数はすべて $|a| = |b| = |c| = 1$ の場合だけを考え，それらの符号の違いによるグラフの形状変化を比較する。
(3) 脈絡のないままグラフを表示させて，その特徴を述べたもの。

全般的に，グラフ電卓が表示するグラフの特徴を述べているだけの内容が多かったが，考え方次第では，1 年生でも極値などについて気づくことが可能であったと思われる。たとえば，$y = x^3 + ax^2, y = x^3 + bx, y = x^3 + c$ として，問題を簡易化して考えていけば，x 軸との共有点や極値のあり様について容易に気づくことができたであろう。また，グラフが図 1 と図 2 のタイプに分かれるのは係数がどのようなときであるかを追及していけば，それが $a^2 = 3b$ のときであることを試行錯誤的に突きとめることも可能であったと思われる。

対象学生は微分法をまだ学んでいないので,「何故か？」という部分に考察を進めることはできなかった。また，数学的な考え方自体に慣れていないこともあり，限られた例だけから「$a > 0$ のときは」というような一般的な述べ方をしている者も多かった。また，$y = x^3 + ax^2$ で考える等，問題を限定して考えた学生はいなかった。作業としては，グラフ電卓の表示する内容を単純に眺めるだけのことであるが，それでも学生は次のような感想を書いている。

- 僕は最初，y 軸と交わる点が決まるのは c の値だと予想していたが，全くその通りだったので自分で自分をすごいなあと思いました。
- こういう電卓みたいなものでやっていると，勉強みたいじゃなくて，楽しかったので，これ以上もっと調べてみたいと思った。

教師側が「あたり前」と感じている部分でも，それを学生が自分で気づいた場合は大きな感動として残ることを改めて実感させられる。また，このようなツールを利用することで，楽しみながら数学に触れさせることができることの意義も大きいものがあると思われる。

3. 3 次関数 $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ に関する自由研究

前節で与えた関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は，3 つの係数 a, b, c について考えなければならないので，学生はグラフの特徴を捉えにくかったかもしれない。この課題を選択した学生が少かったことも，そのことを暗示しているように思われる。

そこで，今度は，因数分解された形でグラフの特徴を捉えさせることにした。時期は 11 月下旬である。なお，この時期，別な教員の担当する科目では，表を作成することによる高次不等式の解法を扱っている。

3.1 学生に与えた課題

学生に与えた課題は，以下のような内容である。

> 次のグラフは，a, b, c, d がどのようなときに，どのようなグラフになるか。1 つ以上を選択して，各自の考察結果をまとめて提出せよ。
>
> (1) $y = (x-a)(x-b)(x-c)$　　(2) $y = x(x^2 + ax + b)$
>
> (3) $y = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$　　(4) $y = x^2(x^2 + ax + b)$

この課題には 1ヶ月の考察期間を与えた。これらがどのようなグラフであるかは，授業では一切触れていない。半数以上の学生は (1) を選択した。課題 (1) の意図は，次の 3 点であり，極めて単純なことを意図しただけである。

ⓘ いろいろな a, b, c についてグラフを表示させてみることにより，3 次関数のグラフの特徴を捉えてほしいこと。

ⓘⓘ $a = b = c$，$a = b < c$，$a < b = c$，そして $a < b < c$ のときとで場合分けして，そのグラフの特徴 (x 軸と交わるのか接するのか等) を押さえてほしいこと。

ⓘⓘⓘ x 軸との共有点は，$x = a, b, c$ であることを確認してほしいこと。

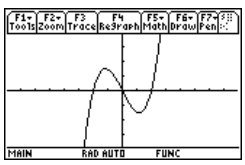


図 8

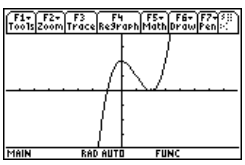


図 9

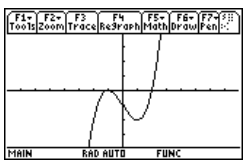


図 10

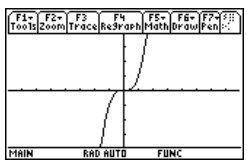


図 11

なお，前節の夏期休業の課題については，出題者側の意図や解説とともに，誰がどのようなことに気づいたか等をプリントにまとめ，学生に配布した。学年末に書かせた自由研究に関する学生の感想を見ると，そのプリントに自分の名前が載っていると励みになったようである。また，他の学生がすごい発見をしているのを見て，次は自分も頑張ろうという気持になったようである。そのようなこともあってか，全般に，レポートの記述内容は，夏期休業の課題のときよりもレベルアップしているように感じられた。

以下は，課題 (1) に関して学生が気づいた内容である。

3.2　学生による指摘事項

グラフ電卓が表示するグラフを見て，そこから一般性のある特徴を見抜くことを求めたが，実に多くのことが指摘されている。式の形を因数分解された形で提示したことにより，グラフの特徴が捉えやすかったためではないかと思われる。その特徴について理由を添えて言及している学生は少なかったが，何かを「発見した」という思いを，成績の良し悪しに関わらず感じさせることができたことの意義は大きいと思われる。

グラフのタイプ

- グラフは，基本的に図 8〜図 11 のパターンしかない。
- $a=b=c$ のときは，$y=x^3$ を x 軸方向に a だけ平行移動したグラフである。
- a,b,c を同じ数だけ変えると，グラフは横にずれる。
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の $x-a, x-b, x-c$ が左端とか中央にあるとかの位置は，グラフの形とは特に関係がない。
- $a<b<c$ で $b-a=c-b=k$(定数) のときは，同じグラフを x 軸方向に平行移動しただけである。
- $a=ki, b=-ki, c=0$ のときは，$|k|$ が大きくなるにつれグラフの傾きが急になる。
  (このとき，$y=(x-ki)(x+ik)x=x(x^2+k^2)$ より，$y'=3x^2+k^2$ である。)

軸との共有点

- x 軸との共有点の x 座標は $x=a,b,c$ である。
- y 軸との共有点の y 座標は $-abc$ である。
- x 軸との共有点は，a,b,c がすべて等しいときは 1 個，2 つが等しいときは 2 個，すべて異なるときは 3 個である。
- a,b,c のうちどれか 2 つが等しいと，そこで x 軸と接する。
- $a \neq b=c$ のときは $x=b=c$ で x 軸に接する。
- $y=x^2(x-a)$ は原点を通り，x 軸との他の共有点は $x=a$ である。
- a,b,c のうちの，どれか一つが 0 だと原点を通る。

グラフの対称性

- $y=(x-a)(x+a)^2$ と $y=(x+a)(x-a)^2$ は，原点に関して点対称である。
  (実際，$f(x)=(x-a)(x+a)^2$ のとき，$-f(-x)=(x+a)(x-a)^2$ である。)
- a,b,c の符号をすべて逆にすると，原点に関して対称なグラフになる。

- $y=(x-a)(x+b)(x+c)$ と $y=(x+a)(x-b)(x-c)$，それから $y=(x+a)(x-b)(x+c)$ と $y=(x-a)(x+b)(x-c)$ は，原点に関して対称である。
- $y=x(x-a)(x+a)$ は，原点に関して点対称である。
- 3 次関数のグラフは，すべて点対称である。
- グラフの山の部分や谷の部分は，部分的に y 軸と平行な直線に関して対称に見えるが，そのような対称性はない。
- $y=(a-x)(b-x)(c-x)$ のグラフは，$y=(a-x)(b-x)(c-x)$ のグラフと x 軸に関して対称になる。

山と谷

- $a=b=c$ 以外のときは，必ず山と谷ができる。
- a,b,c の値の増加，減少により，山や谷の大きさが変わる。
- a,b,c が互いに近づくほど，グラフの山と谷との y 座標の差は小さくなる。
- a,b,c の値の差が大きくなるほど，山や谷が大きくなる。
- $a<b<c$ のとき，a の値が小さいほど左側の山が大きくなり，c の値が大きいほど左側の山は小さくなる。
- $a<b<c$ で $b-a=c-b$ のとき，山と谷の y 座標の絶対値は等しい。
- 山が $y<0$，谷が $y>0$ となることはない。
- $a>0$ のとき，$y=x^2(x-a)$ のグラフは，a が大きいほど $y<0$ となる x の範囲が広がり，y の最小値も小さくなる。
- a,b,c を同じ数だけ増減させても，グラフの山と谷の y 座標は変わらない。

その他

- $c=0$ で a,b が複素数のときは，$a=\alpha+\beta i, b=\alpha-\beta i$ の形のとき以外は，グラフが表示されない。
- 3 次不等式でグラフを利用すると，表を書くより簡単に解が求められる。
- $a>b=c$ のとき $b<x<a$ では $y<0$ であり，$a=b>c$ のとき $c<x<b$ では $y>0$ である。
- 定義域や値域は実数全体である。

3.3 極値に関する言及

提出されたレポートの中で，2 名の学生が，この関数の極値を求める方法について言及してきた。ただし,「極値」という術語はまだ学習していないので，学生は山・谷の頂点とか最大値・最小値という言葉で表現しているが，内容的には極値に関する考察になっている。

阿部裕司君のレポート　阿部君は，x 軸との共有点の座標が a,b,c であることや，y 軸との交点は $-abc$ であることに触れた後，グラフの形には，a,b,c がすべて異なるときや，$a=b,\ b=c,\ a=b=c$ のときの 4 つのパターンがあり，$a=b=c$ のときは $y=x^3$ のグラフを x 軸方向に平行移動したものであることをあっさりと見抜く。そして，$b-a=c-b$ のときの極値について考察をすすめる。

まず，$b-a=c-b$ の値 (この値を阿部君は「垣間」と呼んでいる）を少しずつ大きくしながら，極大値をグラフ電卓の機能により求めて表を作成する。そして，3 次関数であることや，垣間が 1 のときの極大値は 0.3849 であることから，他の場合は $0.3849\times$ (垣間)^3 ではないかと予想し，表から正しいことを確認する。実際，$0.3849\times 3^3=10.3923$ である。

垣間	極大値
1	0.3849
2	3.0792
3	10.3923
4	24.6336
5	48.1125

次に，極値の y 座標が分かる以上は x 座標も求まるはずであると考え，同じ条件の関数として $y=(x-j)x(x+j)$ を考え，j の値と極大値を与える x 座標との関係を調べる。そして，同様の表を作成する中で，極値を与える点の x 座標は j に比例していて $x=-0.57735j$ であることに気づいている。

j	頂点の x 座標
1	-0.57735
2	-1.1547
3	-1.73205

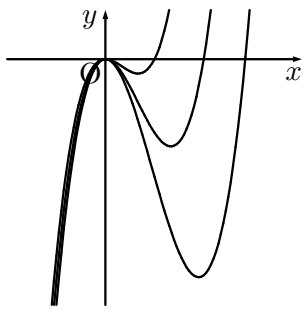
以上を $y=(x-a)(x-b)(x-c),(a<b<c)$ の場合について述べて，次の結論を得る。

> $b-a=c-b$ となる式において，
> 山の頂点の座標は $(b-0.57735(b-a),0.3849(b-a)^3)$ であり，
> 谷の最下点の座標は $(b+0.57735(b-a),-0.3849(b-a)^3)$ である。

この結論は正しい。実際，平行移動すれば $y=x(x^2-a^2)=x^3-a^2x,\ (a>0)$ のタイプを考えることになり，$y'=3x^2-a^2$ であることから極値をとるのは $x=\pm a/\sqrt{3}$ のときである。このときの y 座標は $y=\mp(2\sqrt{3}/9)a^3$ である。この値を小数に直すと，$1/\sqrt{3}=0.57735,\ 2\sqrt{3}/9=0.3849$ である。

阿部君はこの結論で満足することなく，次には $a=b$ のときの谷の頂点について考察する。問題を簡単にするため $a=b=0$ の場合について考え，$y=x^2(x-c),\ (c>0)$ の谷の頂点の y 座標と c とを対応させた表を作る。そして，極大値の場合の結果から類推して，容易に x 座標は $0.666667c$ であり，y 座標は $-0.148148c^3$ であることを見抜いている。

c	頂点の x 座標	y の最低値
1	0.666667	-0.148148
2	1.33333	-1.18519
3	2	-4
4	2.66667	-9.48148
5	3.33333	-18.5185
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	$0.666667c$	$-0.148148c^3$



$y=x^2(x-c),\ c<0$ のときの山の頂点についても同様であることから次の結論を得る。

$y=(x-a)^2(x-b),\ (a<b)$ となる式において
谷の最低値の座標は $(a+0.66667(b-a), -0.148148(b-a)^3)$ であり，
$y=(x-a)(x-b)^2,\ (a<b)$ となる式において
山の最大値の座標は $(a-0.666667(b-a), 0.148148(b-a)^3)$ である。

この結論も正しい。実際，$y=x^2(x-a)=x^3-ax^2$ の場合，$y'=3x^2-2ax$ であるから，極値を取るのは $x=0, 2a/3$ のときである。このときの y 座標は，$y=0, -4a^3/27$ であり，小数に直すと $2/3=0.666667,\ 4/27=0.148148$ である。

阿部君の思考過程を見ると，まず，考えやすいように問題を簡易化し，段階を追って状況をグラフ電卓を利用して調べ，それをもとに類推し，そして正しいことを確認する。確認した後は，さらに別な問題設定をして，同様のことを繰り返すという，まさに数学的思考そのものが行われている。この学生は，成績上位の学生である。

3.4 熊谷一生君のレポート

この学生は，文字式の計算で極値を求める式を発見してきた。熊谷君は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の場合は $y=f(x)=ax^2$ のグラフを適当に平行移動して $y=f(x-p)+q$ の形に表せたことから，この 3 次関数についても同じような変形ができないだろうか，ということを考える。そして，放物線の場合の変形過程の類似計算を手計算で行うことにより，

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+a\left\{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^2}\right)\right\}$$

を導き，$(x-a)(x-b)(x-c)$ の展開式にあてはめて

$$(*)\qquad (x-a)(x-b)(x-c)=\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^3+\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

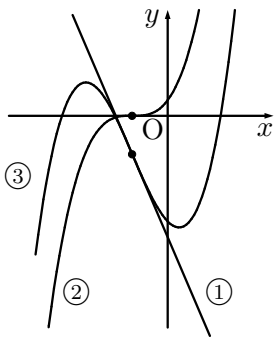
を得る。放物線の場合の類似で考えると，y 軸方向の平行移動が

$$\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

となるが，x が含まれているので，この部分は y 軸方向の平行移動を表すとはいえないことに気づく。そこで，彼は，

$$\begin{cases} y=\dfrac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\dfrac{(a+b+c)^3}{27}-abc & ① \\ y=\left(x-\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 & ② \\ y=(x-a)(x-b)(x-c) & ③ \end{cases}$$

の 3 つのグラフを別々に描いてみて，①③のグラフの共有点の x 座標は，②のグラフの x 軸との共有点の x 座標と一致することに気づく。そして，①式に x が含まれているために，それを②式に加えると単なる平行移動ではなくグラフ自体が変わってしまうのだと考える。したがって，3 次関数の波の打ち方には，①の 1 次式の傾きが大きく関わっており，$y = f(x-p)+q$ の式において，$(*)$ 式の右辺の x の 1 次の項は $f(x)$ の方に含めて考えるべきであるとの結論に至る。



そして，$f(x) = x^3 + Ax$ の 1 次式の係数 A を求めるため，以下のような変形を行う。

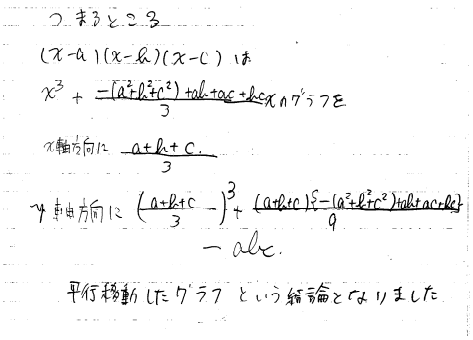
$$A = \frac{a+b+c}{3}, \quad B = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned}(*)\text{ 式の右辺} &= (x-A)^3 - Bx + A^3 - abc \\ &= (x-A)^3 - B(x-A) + A^3 - AB - abc\end{aligned}$$

となることから，以下を得る。

> $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，
>
> $$y = x^3 - \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}\,x$$
>
> のグラフを，x 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$，y 軸方向には
>
> $$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 - \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9} - abc$$
>
> だけ平行移動したものである。

次に，彼は，$y = x^3 + \alpha x$ のグラフを考察する。彼は，すでに，3 次関数のグラフの波の打ち方は，この関数の α の値に依ることを知っている。そして，$y = x^3 + \alpha x$ のグラフは $\alpha \geqq 0$ のときは波を打たず，$\alpha < 0$ のときに波を打つことに気づく。$y = (x-a)(x-b)(x-c)$ の多くのグラフは波を打つことから，この関数の α に相当する式から



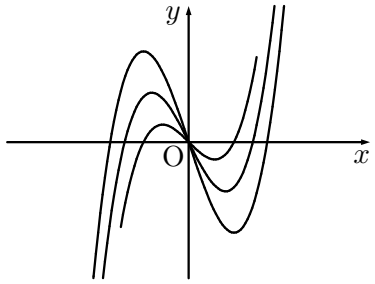
$$-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \leqq 0$$

という仮説を立てるが，彼は証明はできなかった。しかし，周知のように，この不等式は

$$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geqq 0$$

と変形できるので，熊谷君の仮説は正しい。

次に，$y=x^3+\alpha x$ のグラフの極値に関心を寄せ，極小値を与える x 座標をグラフ電卓の機能を利用して求める。そして，$\alpha=-1$ のときの極小値は $x=0.57735$ のとき，$\alpha=-2$ のときの極小値は $x=0.816497$ のとき，$\alpha=-3$ のときの極小値は $x=1$ のときであり，



$$(0.57735)^2=0.33333\fallingdotseq\frac{1}{3},\quad (0.816497)^2=0.66667\fallingdotseq\frac{2}{3},\quad 1^2=1=\frac{3}{3}$$

であることから，$\alpha<0$ のとき $y=x^3+\alpha x$ の極小値は $x=\sqrt{-\alpha/3}$ のときであるということを発見する。また，多数のグラフを表示させる中で，この関数は点対称であるということも見抜いている。そして，これらを $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の平行移動に関する事柄と重ね合わせることにより，次の結論を得る。

$X=\dfrac{a+b+c}{3}$, $\alpha=-\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ とおくと，
$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の変曲点の座標は $(X,(X-a)(X-b)(X-c))$ であり，
極大値は $\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}},\ \left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)\right)$
極小値は $\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}},\ \left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)\right)$
のときである。

変曲点や極大値・極小値という言葉を彼はまだ学習していないが，グラフの山や谷の頂点の座標と点対称となる中心点の座標を，記号も含めて上記の形で明確に表現している。

この学生も成績上位の学生であるが，手計算を交えながら，グラフ電卓をまさに思考のツールとして利用している。学年末に書かせた感想では,「自由研究は，やっているうちに，どんどんおもしろくなってきて，めちゃくちゃ頑張りました。」と書いている。内容的にも立派な数学を行っているといえよう。

4. 自由研究に関する学生の感想

貸与したグラフ電卓が返却される学年末には，自由研究を行った感想について自由記述を求めた。以下は，その自由研究を行った高専 1 年生の感想である。

- 数学は奥が深いなあと思いました。
- 数学とはおもしろいものだなあと思いました。
- 自由研究を通して，より数学に興味がもてた。
- 規則性をみつけたとき，とてもうれしかったです。
- 問題演習よりやりがいがあった。
- 問題を解くのではなく，自分で発見するところが苦労でもあり楽しかった。

- 通常の課題の倍以上の時間がかかったが，その分，自分で何かを発見できたりするとうれしかった。
- 考えても疑問がまた出てきて，またそれについて考えるのが楽しかった。
- 解説プリントでは，他の人の考え方がのっていて，新しい視点をみつけれた。
- グラフについての特徴，性質などを発見するのが楽しかった。数学とは，調べてみると沢山のことが発見できるんだと思いました。
- グラフの規則性を見つけるのは楽しかったけど，言葉にうまく表せなかった。
- けっこう難しかったが，あたらしい知識を得ることができた。
- どの値がどうなっているときに，どのようなグラフになるかを１つ１つするのが面倒くさいと思ったけど，達成感が得られました。
- 難しかったけど，いろんな発見があった。
- 普段あまりしない「良く見て考える」といったことをする機会になったと思う。
- ただの式だけだとやる気がしない課題でも，数ナビのグラフ機能を使うと分かりやすいし，楽しいのでやりがいがあった。数学の楽しさが分かったような気がした。
- 解説プリントでは，すごい発見をしている人がいることが分かって，自分ももう少し頑張れば良かったと思った。
- まったくできなかったので，とてもつらかった。

5. 数学における自由研究の意義

通常の問題演習では，学生は教師から与えられた問題を「解く」ことが中心になる。そこでは正解か誤答しかない。しかし，この自由研究では，提示された課題の中から自分で関心を持ったことを調べて，それに関する自分の思考過程をレポートにまとめることが求められる。グラフを描くことではなく，グラフ電卓に表示されるグラフから何を読み取り，それをどのように考えるかが問われることになる。

ある学生は，単にグラフ電卓の表示する内容を幾つか書いて，その特徴を述べるだけに留まっている。ある学生は，a, b, c のうち 2 つを固定して，一つの値を少しずつ変えながらグラフを表示させ，その値の意味する内容を汲み取ろうとしている。ある学生は，最初に予想を立て，その予想が正しいことをグラフ電卓を利用して確認しようとしている。また，ある学生は，手計算も交えながら考察を進めようとしている。まさに，学生のレベルに応じた様々なまとめ方がなされている。

そして，学生の感想を見ると，通常の問題解法と比べて,「次々に自分で問題を設定して考える」「自分で何かを発見する」という部分に，おもしろさ，達成感，やりがいを感じたようである。グラフ電卓を利用することで，個々の学生の能力に応じてそれなりの発見があった。教師側が「あたり前」と感じる部分でも，それが「あたり前」ではない学生にとっては大きな発見である。そのことを，成績の上下に関わらず体験させることができたことに，特に大きな意義があると思われる。

また，提出されたレポートにどのようなことが書かれていたかは，後でプリントにまとめて学生に報告した。その中では，学生が指摘してきた事項と共に，それに気づいた学生の氏名も含めた。同じ問題を考える中で，他の学生がどのように考えたのかを自分の考えと比較することができる。そのプリントに自分の名前が載ることは大きな励みであると同時に，自分の気づかなかったことを同学年の他の学生が気づいたということには大きな刺激を受けたと思われる。

なお，学生にグラフ電卓を貸与はしているが，実際の授業の中では積極利用することはあまりなかった。授業の内容は関数についてであるので，学生は必要に応じて関数のグラフを確認することに使用した。日常の授業は，黒板を利用した伝統的な数学の授業である。つまり，これらの課題を与えるにあたって，特段の指導は全くしていないことを強調しておきたい。学生に説明したのはグラフ電卓の使用法だけある。与えられた課題をどのように考えてレポートにまとめるべきかは，すべて学生が自分で考えて行ったことである。

しかし，その一方では,「まったくできなかったので，つらかった」という感想も少なからずあった。これらの学生には，何らかの配慮をすることが必要と感じられた。

6. おわりに

学生に与えた課題自体は，特に新規性のあるものではない。グラフと x 軸との共有点のあり方により，グラフの形状に対する感覚をつかんでもらえればということを意図しただけの課題である。単純な課題であるにも関わらず，提出されたレポートは，それぞれが一般性のある性質を求めて探究を試みており，相当に苦心したことがうかがわれるものばかりであった。自分で問題意識をもち，それを解決しようと試みる行為を，多くの学生が体験した。グラフ電卓なくして，このような体験をさせることはできなかったであろう。既存の単純な課題を与えるだけで，学生の方で勝手に問題を膨らませて数学を楽しんでいる趣がある。グラフ電卓の利用法の裾野の大きさと教育上の限りない効果を，改めて感じさせられた思いがする。

なお，この研究の一部は，平成 16・17 年度科学研究費補助金・基盤研究 (C)，課題番号 16500566 の支援を受けて行われた。

試行錯誤で「三平方の定理」を考える

一関工業高等専門学校

梅野 善雄[†]

1. はじめに

数学は，論理的思考の積み重ねにより作り上げられている。いろいろな定理の証明は，理路整然とした論理で構成されているが，その証明の論理は必ずしも最初から備わっていたわけではない。いろいろな試行錯誤の中から得られた結論としてのものであることも多い。また，証明を考える以前に，まず「定理」となりうる数学的事実を見出すことが先決であり，それを見出す過程においては，かなりの試行錯誤を伴うものである。

したがって，数学教育でも試行錯誤を伴う課題を中り入れることが望ましいと思われるが，そのような試行錯誤を行うには，いろいろな数・式の計算，方程式・不等式などの解法，さらには，いろいろな関数のグラフをイメージできることなど，数学の基礎が十分備わっていることが必要になってくる。そのため，数学の成績が低迷している学生に，このような課題を課すことは難しくなってくる。

しかし，その基礎的な部分にテクノロジーによる数式処理機能を補助的に活用させることにより，成績が下位にある者にも数学上の試行錯誤を行わさせることが可能である。以下では，平成 16 年度の一関高専 1 年生に，テクノロジーとして数式処理のできるグラフ電卓 (TI–89) を利用させて，三平方の定理について考察させたときの結果を報告する。

2. 数式処理電卓と自由研究

2.1 授業内容と数式処理電卓の貸与

平成 16 年度，著者は 1 年生 (167 名) の基礎数学 I (3 単位) を担当した。本校では，数式処理のできるグラフ電卓 (TI–89) を 1 学年分購入している。いろいろな計算の答え合わせや，関数のグラフ表示などの確認のために利用されることを期待して，著者の授業ではこの電卓を貸与している。平成 16 年度の貸与時期は 7 月中旬である。貸与直後に，基本的な使用方法と代数機能・グラフ機能の使い方を説明した。以後，学生は計算の答え合わせやグラフの確認等で利用した。

担当科目の授業内容を次頁の通りである。その内容から授業中に積極的に活用させる場面は少なかったが，この電卓のグラフ機能や数式処理機能を利用すると学生に数学上の試行錯誤を行わさせることができる。そこで，夏季休業，10 月下旬，冬季休業の計 3 回にわたり，数学上の試行錯誤を伴いながら何らかの数学的な規則性を見出させる課題を与えた。課題

[†]E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp [URL] http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

は複数題を与え，その中から自分で選択させるようにした。考察期間は約 1ヶ月，提出率は 88%〜95%である。

基礎数学 I の授業内容

数と式の計算
　整式の計算：整式の加減，乗法，因数分解，整式の除法，剰余の定理と因数定理
　いろいろな数と式：分数式の計算，実数，絶対値，平方根の計算，複素数の計算
方程式と不等式
　方程式：2 次方程式，解と係数の関係，分数・無理方程式，恒等式，等式の証明
　不等式：不等式の性質，1 次不等式，2 次不等式，連立不等式，高次不等式，
　　不等式の証明，集合，命題
図形と式
　点と直線：2 点間の距離と内分点，直線の方程式，2 直線の関係
　2 次曲線：円，楕円，双曲線，放物線，2 次曲線の接線，不等式と領域

2.2　自由研究の内容 (冬季課題)

冬季休業中には，通常の練習問題の他に自由研究の課題も課した。いわゆるオープンエンドの問題である [4)]。しかし，通常の演習問題と自由研究の締切を同一日に設定すると，学生側の心理としては円周問題を解いたことで安心してしまい，自由研究の方がおろそかになるようである。そこで，自由研究については，その締切日を 2 週間ずらして設定した。

学生に提示した課題は，以下の内容である。

(i) 三平方の定理「$a^2+b^2=c^2$」を成立させる自然数 a,b,c に関する考察
(ii) 自然数 n,a について，x^n+a が因数分解できるための n,a の条件に関する考察
(iii) 関数 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフと定数 a,b,c との関係に関する考察
(iv) 各自が設定した独自の問題に関する考察

数学の通常の問題は,「計算せよ」「解け」「証明せよ」というタイプが多い。この課題のように，数学に関することで「〜について考察せよ」と言われても，学生は何をしてよいのか戸惑うと思われた。規則性に気づくことのできない学生でもまとめることができるように，次のような解説をした。

> まとめ方は自由です。数ナビにどのようなことをやらせたらどのような結果が表示されたか。いろいろやっているうちにどのようなことが予想されてきたか。その予想を確かめようとして，どのようなことをしたか。その予想が正しいことを，どのような理由で確信したか。あるいは，その予想が誤りであることを，どのようにして分かったか。あるいは，どのようなことが原因で，その予想の真偽を確かめることができなかったか。などなど，各自の思考の経過をま

とめればよいのです。予想が正しいと確信できるときは，その証明も考えてみてください。また，いろいろやってみたが，規則性は分からなかった，というときは，どのようなことをやってみたのか，そのやった内容を書いてください。

この課題の提出率は91%であった。各課題を選択した学生は，それぞれ，(1) 94 名，(2) 42 名，(3) 14 名，そして (4) 2 名である。(1) は「三平方の定理」という，すでに既知の定理に関することなので，学生は取り組みやすいと感じたのであろう，半数強 (56%) が (1) の課題を選択した。

独自に問題を設定して考えてきた 2 名の内容は,「角の 3 等分の作図問題に関する考察」と「a と $\sqrt{a}$ との関係に関する考察」である。前者の学生は,「作図不能と聞いていたが，できそうに思ったので考えてみた」と書いているが，当然ながら作図はできていない。後者の学生は,「この 2 つの数がどのような関係になっているのか，以前から気になっていた」とのことであった。しかし，いろいろな値を試しているうちに,「単に 2 乗すればよく，極めて簡単なことであった」と自分で気づいている。

3. 「三平方の定理」に関する学生の発見

冬季休業の課題で，167 名中 94 名の学生が「三平方の定理」に関する課題を選択した。この課題を学生に課したときの解説は，以下のような内容である。

> 三平方の定理を成立させる簡単な自然数として，$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ が良く知られています。このような自然数は，他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように，連続する 3 つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように，3 つのうち 2 つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは，他にあるでしょうか。つまり，$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では，$a^2=c^2-b^2$ も成立しています。そして，そのような自然数 a, b, c は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。数ナビの操作ばかりではなく，ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

次頁に，三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ $(a<b<c)$ が成立する具体例を幾つかあげておく。学生は，まずこのような具体例を書き出して，それを元に，どのような規則性があるかを考えている。

表 1 は，学生から指摘されてきた事項を指摘の多い順にまとめたものである。いろいろ考えてみる中で，三平方の定理に対する認識を深めてもらいたいという意図で出した課題であり，単純な指摘だけしか予想していなかったが，提出されたレポートを見ると，そのまとめ方は千差万別である。友人のレポートを写したと思われるものは数えるほどしかなく，自分なりに精一杯考えて書いていることが感じらる内容ばかりあった。三平方の定理に関して一般的に知られている式の指摘のみならず，学生からの指摘で著者が始めて知る性質もあった。

a, b, c が連続するとき： $3^2 + 4^2 = 5^2$

a, b が連続するとき：

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$20^2 + 21^2 = 29^2$$
$$119^2 + 120^2 = 169^2$$
$$696^2 + 697^2 = 985^2$$
$$4059^2 + 4060^2 = 5741^2$$

b, c が連続するとき

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2$$
$$11^2 + 60^2 = 61^2$$
$$13^2 + 84^2 = 85^2$$
$$15^2 + 112^2 = 113^2$$

連続しないとき

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2$$
$$10^2 + 24^2 = 26^2$$
$$12^2 + 35^2 = 37^2$$
$$14^2 + 48^2 = 50^2$$

4. 学生の行った「試行錯誤」

4.1 平方数の 1 の位に着目した学生

S 君は，数 x を 1 ずつ増やすとき，その平方数 x^2 を $x = 53$ のときまで求め，それらの 1 の位の数の変化に着目する。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
差		1	3	5	−3	−1	1	3	−5	−3	−1
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
差		1	3	5	−3	−1	1	3	−5	−3	−1

S 君は，まず，連続する数の平方数を計算して，その 1 の位に注目する。そして，1 の位の数は $0-1-4-9-6-5-6-9-4-1-0$ が繰り返されていること，それは 5 を中心に対称になっていることに気づく。次に，その 1 の位の数の差をとると $\pm 1 - \pm 3 - \pm 5 - \pm 3 - \pm 1$ が繰り返され，やはり 5 を中心に対称になっていることに気づく。

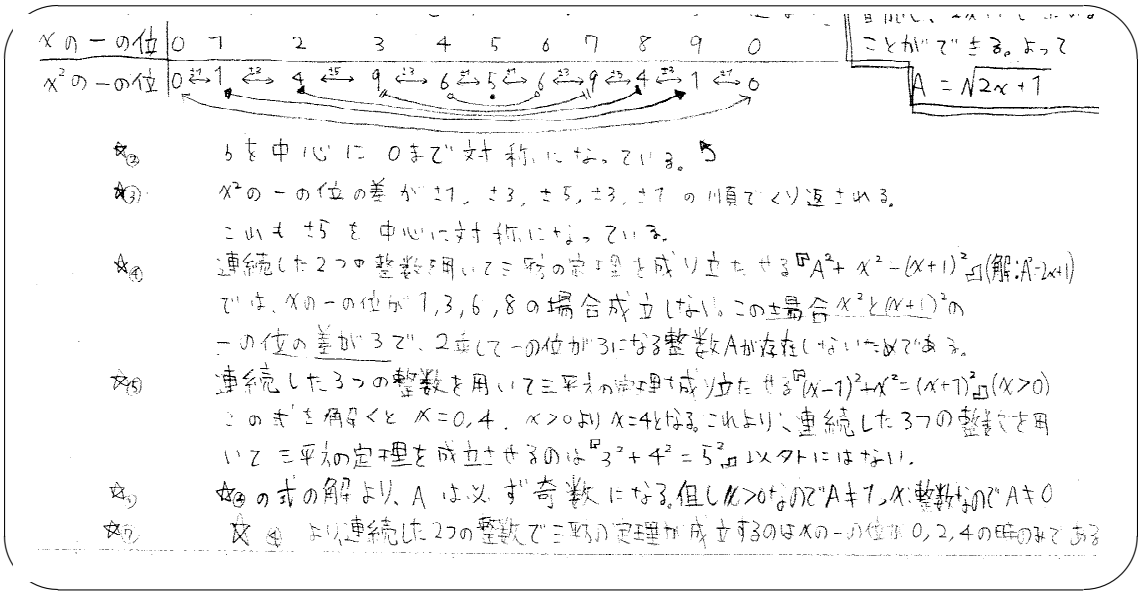
表 1：三平方の定理に関する学生の発見

No	三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ に関する学生の発見	数
(1)	$a^2+b^2=c^2$ が成立すれば，$(na)^2+(nb)^2=(nc)^2$ も成立する	48
(2)	a,b,c が連続するのは，$a=3,\ b=4,\ c=5$ のときしかない	44
(3)	b,c が連続するとき，a は奇数である	32
(4)	b,c が連続するとき，それらは 4 の倍数ずつ増えていく	26
(5)	b,c が連続するとき，$a^2=b+c$ である	20
(6)	b,c が連続するとき，a,b,c のうちの 2 つの数は奇数である	14
(7)	b,c が連続するのは，奇数 a に対して $b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$ のときである	8
(8)	b,c が連続するのは，a^2 を 2 で割った商を b とすればよい	5
(9)	連続する 2 数の平方の差は奇数である	3
(10)	b,c が連続する場合として，次の場合がある。 $(2n+1)^2+(2(n^2+n))^2=(2(n^2+n)+1)^2$	3
(11)	a,b が奇数のとき，$a^2+b^2=c^2$ は成立しない	3
(12)	a,b が連続するとき，$c^2=2ab+1$ である	2
(13)	b,c が連続するとき，次のことが成立する。 $(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+\cdots+1))^2=(4(n+(n-1)+\cdots+1)+1)^2$	1
(14)	b,c が連続するとき，$(a-3)/2+1=n$ とおくと，$b=$(前の式の b)$+4n$	1
(15)	b,c が連続するとき，$3^2+4^2=5^2$ から数えて k 段目の式の b は，$b=ak+k$ である。たとえば $a=9$ は 4 段目なので $b=9\times4+4=40$	1
(16)	b,c が連続するとき，b は $a+1$ を 2 で何回割れたかを掛けた値である。たとえば，$17/2=8.5$ なので，$b=(17+1)\times8=144$ より，$17^2+144^2=145^2$ である	1
(17)	$a^2+b^2=(b+1)^2$ に対して，その次の式を $(a+2)^2+B^2=(B+1)^2$ とすると，$B=((a+2)^2-a^2)/2$ である。	1
(18)	a_n,b_n が連続するとき，$a_{n+1}=6a_n-(a_{n-2}-2)$ である。	1
(19)	$3^2+4^2=5^2$ が成立するので，$333^2+444^2=555^2$ や $3333^2+4444^2=5555^2$ なども成立する	1
(20)	どんなときでも，$a^2+1^2=b^2\ (a\neq0)$ は成立しない	1
(21)	a,b,c の中には，一定量ずつ増えているものがある。$6^2+8^2=10^2$ は 2 ずつ増えている。12 ずつ増えるのは，$a^2+(a+12)^2=(a+24)^2$ を解いて $a=36$ である	1
(22)	b,c が連続するとき，$a+b+c$ の第 2 階差は 8 である	1
(23)	b,c が連続するとき，$a>3$ であれば $b>2a$ である	1
(24)	b の 1 の位の数が 1,3,6,8 のとき，b,c が連続するようにはできない	1
(25)	b,c が連続するのは，b の 1 の位の数が 0,2,4 のときだけである	1
(26)	$3a=b+c$ のとき，$a:b:c=3:4:5$ である	1
(27)	$3a=b+c,\ 4a=b+c,\ 5a=b+c$ となるものが存在するので，$na=b+c$ となるものが存在するはずである	1
(28)	$a+b-c$ は 2 の倍数である	1
(29)	b,c が連続するとき，abc は 60 の倍数である	1
(30)	連続する 2 数の平方の和の差は，4 の倍数である	1
(31)	a,b が連続するものより，b,c が連続するものの方が多い。 (以下，省略する)	1

そして，平方数の 1 の位の差は $\pm1, \pm3, \pm5$ だけであることから，$A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x は，x の 1 の位の数が 1,3,6,8 のときは存在しないと結論づける。その理由は,「このとき x^2 と $(x+1)^2$ の 1 の位の差は 3 となり，平方して 1 の位が 3 になる整数は存在しないためである」としている。1 の位の実際の差は ±3 であるので，$(x+1)^2-x^2$ の 1 の位の数は 3 か 7 である。平方数の 1 の位が 3 か 7 になることはないので,「x の 1 の位が 1,3,6,8 のときは存在しない」という S 君の結論は正しい。

S 君は，さらに，$A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たす x について,「x の 1 位の数は 0,2,4 のときに限られる」と結論づける。その理由には触れられていないが，このような x は偶数であることに気づいた上で，x の 1 の位は 6 と 8 を取り得ないことからの結論と思われる。

S 君は，感想として,「久しぶりに頭がフル回転し，全く苦になりませんでした。考えがどんどん発展していって，とても楽しかったです。」と書いている。かなり細かい考察が必要であり，そこから何らかの規則性を見出していく過程には大きな喜びがあったと思われる。



4.2 連続する奇数の平方の差に着目した学生

K 君は，b, c が連続する場合を調べるために，n^2 の値を $n=1$ から $n=59$ のときまで書き出す。そして，その差が平方数になっている場合を探すことにより，三平方の定理が成立する式として，次の式を見出す。

$$3^2+4^2=5^2$$
$$5^2+12^2=13^2$$
$$7^2+24^2=25^2$$
$$9^2+40^2=41^2$$
$$\vdots$$
$$31^2+480^2=481^2$$

そして，これらの式から「連続しない数は 2 ずつ増え，すべて奇数である」「連続する数は 4 の倍数ずつ増えていく」「3 つが連続するものは $3^2+4^2=5^2$ しかない」ことに気づく。そして，連続しない a の値から連続する b,c の求め方として，次の方法を考案している。

それは,「$3^2+4^2=5^2$ と $5^2+b^2=c^2$ において，b は $(5^2-3^2)\div 2=8$ を 4 に加えた値である」というものである。そして,「以下，これを繰り返せばよい」と述べている。

実際，$a=2n+1$ のとき $b=(a^2-1)/2=2n^2+2n$ であり，その次の $a=2n+3$ のときの b は $b=2n^2+6n+4$ となるが，K 君の方法では，$a=2n+3$ のときの b は,

$$\left\{(2n+3)^2-(2n+1)^2\right\}\div 2=4n+4$$

であるので，$b=(2n^2+2n)+(4n+4)=2n^2+6n+4$ として求められることになる。年度末の感想で K 君は,「自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった」と書いている。

4.3　連続する b,c の求め方を発見した学生

M 君は，b,c が連続する場合を多数書き出した上で，a,c は奇数，b は偶数であることに気づく。さらに，奇数 a の 2 乗をほぼ半分に分けて，小さい方を b，大きい方を c とすればよいことに気づいている。たとえば，$7^2+24^2=25^2$ において，$7^2=49$ をほぼ半分に分けると 24 と 25 であるので，$b=24,\ c=25$ であることを指摘した上で，もっと大きな数で確認するため，$a=1001$ の場合を試している。$a^2=1001^2=1002001$ をほぼ半分に分けると，501000 と 501001 であるので，$c^2-b^2=a^2$ が成立することを $5001001^2-5001000^2=1001^2$ により確認している。

4.5　連続する b,c と a との関係に着目した学生

S さんは，b,c が連続する場合として，よく知られている $3^2+4^2=5^2$ と $5^2+12^2=13^2$ を書き出し，これらの間に何かの規則性がないかどうかを考える。そして，この 2 つの式だけをもとに，次の関係を見い出した。

$$\begin{aligned}
3^2+(4\times 1)^2&=\{(4\times 1)+1\}^2 \qquad (4=3+1)\\
5^2+(6\times 2)^2&=\{(6\times 2)+1\}^2 \qquad (6=5+1)\\
7^2+(8\times 3)^2&=\{(8\times 3)+1\}^2 \qquad (8=7+1)\\
&\vdots\\
15^2+(16\times 7)^2&=\{(16\times 7)+1\}^2 \qquad (16=15+1)
\end{aligned}$$

S さんは，この仕組を，$a^2+b^2=c^2$ の a,b,c を使って，次のように記述している。

- a は必ず奇数で，$a\geqq 3$ である
- b は a を 2 で何回割れたかという回数を $a+1$ に掛けた数である
- $c=b+1$ である

そして，$a=17$ の場合は，$(17+1)\times 8=144$ であることより，$17^2+144^2=145^2$ が成立することを確認した上で，次のような感想を記している。

まず，$3^2+4^2=5^2$ のような形の式を見つけるために，ひたすら書き出しました。$10, 11, 12$ の式まで書き出したときに，10^2 と 11^2 を足しても 12^2 とは全く違う数になることに気がつき，$3^2+4^2=5^2$ のような式はそんなに多くはないことを確信しました。すると，$3^2+4^2=5^2$ だけだったので，驚きました！

次に $3^2+4^2=5^2$ と $5^2+12^2=13^2$ を照らし合わせて，何か規則性はないかといろいろ試しているうちに，上のようなことが分かりました。$5^2+12^2=13^2$ のような式が他にもたくさんあったことには，また驚きました！

4.6 a, b が連続するときの規則性を発見した学生

A 君は，a, b が連続する場合を考察して，次の式を見い出した。

$$3^2+4^2=5^2$$
$$20^2+21^2=29^2$$
$$119^2+120^2=169^2$$
$$696^2+697^2=985^2$$
$$4059^2+4060^2=5741^2$$

そして，n 段目の式を $a_n^2+b_n^2=c_n^2$ とするとき，内容的に

$$a_n=6\times a_{n-1}-(a_{n-2}-2),\quad c_n=6\times c_{n-1}-c_{n-2}$$

という規則性があることを発見している。

一般に，$a, a+1, b$ が三平方の定理を満たせば，

$$3a+2b+1,\quad 3a+2b+2,\quad 4a+3b+2$$

も三平方の定理を満たすことが知られている [7)]。これらの値の次の値を $A, A+1, B$ とすると，

$$A=3(3a+2b+1)+2(4a+3b+2)+1=17a+12b+8$$
$$B=3(3a+2b+1)+2(4a+3b+2)+2=24a+17b+12$$

となる。A 君の計算方法では

$$A=6(3a+2b+1)-(a-2)=17a+12b+8$$
$$B=6(4a+3b+2)-b=24a+17b+12$$

となるので，この結果は正しい。A 君は，他にも次のことを見い出している。

(i) $x^2+y^2=z^2$ が成立すれば，$(nx)^2+(ny)^2=(nz)^2$ も成立する。

(ii) 3 数が連続するのは，$3^2+4^2=5^2$ だけである。(証明あり)

(iii) b, c が連続するとき，a は奇数であり，c は 4 の倍数ずつ増える。

A 君は，提出したレポートの最後の方で「三平方の定理について，殆どのことが理解できたような気がしました」と書いている。

4.7　a, b, c が連続的でないときを考察した学生

I 君は，a, b, c が連続的でない場合として，次の式を見い出している。

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2$$
$$10^2 + 24^2 = 26^2$$
$$12^2 + 35^2 = 37^2$$
$$14^2 + 48^2 = 50^2$$
$$16^2 + 63^2 = 65^2$$

そして，これらの関係から，$c = b + 2$ であることや，$a^2 \div 2 = b + c$ であることを見抜き，$2(b + c) + b^2 = c^2$ としている。

4.8　文字式の計算で考察した学生

T 君は，いろいろな性質を a, b, c という文字式の計算から導いている。

(i) b, c が連続する場合について
b, c が連続すれば $c = b + 1$ であるので，$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = c + b$ である。

(ii) b, c が連続する場合の a について
a^2 が偶数 ($2x, x$ は整数) のとき，$a^2 = (2x)^2 = 2(2x^2)$ は偶数になるので，a が偶数のときは b, c が連続するようにはできない。$a^2 = b + c = 2b + 1$ であるので，a^2 は奇数である。

(iii) a から連続する b, c の求め方について
b, c が連続するとき a^2 は奇数なので，$a^2 \div 2 =$ ある整数 $n + 1$ となる。このとき，$b = n, c = n + 1$ とすればよい。

このレポートの作成には 1 日かかったようである。次のような感想を書いている。

> 普段，さりげなく使っていた三平方の定理を新めて考えることによって，今まで気付かなかった法則に気付いた。とてもおもしろかったし，他にも何か法則があるのか調べてみたいと思った。

4.9　a, b, c の間のおもしろい関係を見い出した学生

H 君は，$y^2 = a^2 + x^2$ より $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ であることから，a の値を 1 から少しずつ増やしていくことにより，b, c が連続する場合の式を幾つか発見した。そして，その過程において，3 つの数が連続するのは，$a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2$ のときであり，これを解くと $a = 3, -1$ となるので，3 つの数が連続するのは $3^2 + 4^2 = 5^2$ しかないことを証明している。さらに，2 つの数が連続するのは，$a^2 + b^2 = (b + 1)^2$ のときであることから，$a^2 = 2b + 1$ となるので，

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{a^2 - 1}{2} + 1$$

を導いている。そして，$3^2+4^2=5^2$ であることから，$333^2+444^2=555^2$ や $3333^2+4444^2=5555^2$ も成立することを述べ，さらに，

$$3333^2=5555^2-4444^2=(5555+4444)(5555-4444)=9999\cdot 1111$$
$$4444^2=5555^2-3333^2=(5555+3333)(5555-3333)=8888\cdot 2222$$

であり，右辺の 2 数の和は，いずれも 11110 となって一致することを見い出している。

4.10　$a^2+b^2=c^2$ の n 倍の式を延々と書き出している学生

N さんは，$3^2+4^2=5^2$ について，$3,4,5$ を次々に 2 倍していって，

$$3^2+4^2=5^2$$
$$6^2+8^2=10^2$$
$$12^2+16^2=20^2$$
$$24^2+32^2=40^2$$

が成立することを確認する。そして，同様のことが 2 倍だけではなく，$3,4,\cdots,10$ 倍でも成立することをレポート用紙に 5 枚にわたり書き出して確認している。その後，n 倍ではなく n 乗するとどうなるかを確認しようとするが，2 乗した $9^2+16^2=25^2$ が成立しないこで，そのような場合は成立しないことを確認している。

教師側から見ると単純な部分しか見つけられなかったといえるが，この学生にとっては，確認のたびに「2 倍しても成立する」「3 倍でも成立する」という「わくわく」感があったのではないかと思われる。

4.11　a,b,c の和や積を考えた学生

三平方の定理を成立させる a,b,c について，それらの和や積を考えた学生もいる。

HS 君は，b,c が連続する場合について考察した後で，「そのような a,b,c は，60 の倍数になっているようだ」と書いている。実際，$a=2n+1$ のとき，$b=2n(n+1)$, $c=2n^2+2n+1$ なので，

$$abc=2n(n+1)(2n+1)\{2n(n+1)+1\}$$

となり，abc は 60 の倍数である。

N 君は，b,c が連続する a,b,c について，それらの和 $a+b+c$ を計算する。それらの第 2 階差を求めると，すべて 8 になり一定であることを見い出している。実際，

$$A_n=a_n+b_n+c_n=(2n+1)+2n(n+1)+(2n^2+2n+1)=4n^2+6n+2$$

とすると，$B_n=A_n-A_{n-1}=8n+2$ なので，第 2 階差は 8 である。また，N 君は「$a+b-c$ は偶数である」とも述べている。実際，

$$a_n+b_n-c_n=(2n+1)+2n(n+1)-(2n^2+2n+1)=2n$$

である。なお，この値は a,b,c を 3 辺とする直角三角形の内接円の直径であることが容易に分かる。

5. 試行錯誤を行った学生の感想

平成 16 年度の 1 年生には，**2** 節で述べたような形で「自由研究」と題する課題を 3 回ほど課した。年度末の最後の授業で学生にその感想を自由記述式で書いてもらうと，167 名中 142 名から回答があった。その内容を大別すると，以下のように分類される。

(i)	「楽しかった」「おもしろかった」	51 名 (35.9%)
(ii)	「勉強になった」「理解が深まった」	22 名 (15.5%)
(iii)	「大変だったけど・難しかったけど・面倒だったけど，おもしろかった・勉強になった・楽しかった」	33 名 (23.2%)
(iv)	「分からなかった」「難しかった」	27 名 (19.0%)
(v)	「その他の内容」	9 名 (6.3%)

繰り返しになるが，学生に課したのは，数式処理のできるグラフ電卓を利用した試行錯誤を通して,「数学的な性質について考察せよ」という課題である。この種のタイプの課題を与えて,「おもしろかった」「楽しかった」という感想が (1)〜(3) を併せると 70%以上も寄せられたことには，むしろ著者の方が驚かされた。学生の感想をみると,「いろいろやってみて何かに気づいたとき」に大きな喜びを感じたようである。たとえば，以下のような感想が記されている。

- 今までは規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった。
- 自由研究をやってきて，自分でも数学に対する考え方が変わったのが良く分かった。自由研究は，自分で新しい法則 etc が発見できるので，楽しかったです。
- 今までは，ただ計算し，理解せずに書いていたが，自由研究によって理解しながら解けるようになった。
- 自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった。
- 始めは面倒だと思っていても，いざ始めると没頭してしまった。
- 面倒な気もしていたけど，どういった仕組でこうなるというのが分かってくると，興味や関心が少し強くなってきたので，数学の内容を深く知ることができたと思った。
- 自由研究は，出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った。来年もやりたい。
- 自由研究をやって，今まで考えなかった考え方をするようになった。
- 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見することができるようになったと思う。
- 普通の数学の授業とは違った，数学の楽しい部分があることを知った。

このような感想が目白押しで続くと，読んでいる著者の方が感動してしまった程であった。学生によっては,「数学に対する見方が変わった」とする者もおり,「考える」ということに対して，かなりのインパクトを与えたように思われる。

この自由研究に対する感想は，数学の成績とは関連しているのだろうか。「(4) 分からなかった・難しかった」という学生も 20%弱いる。それが成績下位の学生に集中している場合，自由研究なるものを課すことは，成績下位の学生にとっては苦痛でしかないであろう。

そこで，著者の科目の定期試験 (4 回) の平均点をもとに，全体を 4 つに区分して，この感想との関連性をみてみた。

表 2： 成績区分と自由研究に対する感想

	自由研究に関する感想					
成績	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
上位	17	6	9	5	3	40
中上	12	7	9	10	1	39
中下	11	6	5	5	4	31
下位	11	3	10	7	1	32
計	51	22	33	27	9	142
%	35.9	15.5	23.2	19.0	6.3	100

表 2 をみると，成績下位の学生は，さすがに「(3) 大変だったけど・難しかったけど ···」という感想が他の区分と比べると多いが，それでも結果的には「おもしろかった・楽しかった・勉強になった」という感想になっている。「(5) 難しかった」という感想はどの成績区分にも存在し，成績下位の学生が突出しているわけではない。この感想は，成績とは全く関連していないことが分かる。

6. 自由研究の意義・まとめ

この自由研究は，授業外の時間で考察させている。グラフ電卓を貸与しているとはいえ，著者の授業は黒板を利用した平均的な数学の授業である。著者が学生に対して行ったことは，自由研究の内容を書いたプリントを配布し,「今度は，これをやってきてください」と指示しただけである。つまり，単に問題を提示しただけである。プリント配布時に多少の説明は加えているが，それ以降は特に何の説明も加えていない。学生は，配布されたプリントの解説だけを頼りにして自分なりに考え，レポートにまとめて提出してきた。いろいろ考える中で何かの発見があると，学生はそれによる喜びを感じ，それがさらなる思考を後押ししたのではないかと思われる。

ただし，提出されたレポートは一人ずつチェックして，誰がどのようなことに気づいたか等をプリントにまとめ，事後に 1 時間かけて学生に解説した。問題提示の負担は少ないが，提出されたレポートをまとめる作業はかなりの負担がある。しかし，提出されたレポートをそのままにしていては,「次の自由研究をやってもらえなくなる」という思いが，逆に教師を奮い立たせたともいえる。

このような自由研究の意義としては，まず，数学の 1 つの問題を長時間考え抜く体験をさせることができることが上げられよう。しかも，時間をかけて考えた結果，多くの学生に数学的な事柄を発見する喜びを成績の上下によらずに感じさせることができた。それは，考えさせた問題が，ちょっと考えると誰でも何かに気づく部分を含んでいたためと思われる。中には，そのような部分に気付いたことで終わることなく，さらに独自の視点で問題設定をして教師側が予想もしない内容に踏み込む学生も現れている。

このことは，学生に与える問題内容を吟味することで，数学に関する発見の喜びを，教師側が意図的に学生に感じさせることができることを示唆しているように思われる。しかも，この効果を得るために，通常の授業体系を大きく変更する必要はないことも特筆されるべきであろう。教師は，単に問題を提示するだけである。

また，成績下位の学生でも何らかの発見ができたのは，課題の内容に関する部分に加えて，数学的な試行錯誤に数式処理電卓を利用できたことも大きく寄与しているように思われる。このツール無くしては，このような結果は得られなかったであろう。三平方の定理は単なる四則計算のできる電卓でも十分に考察可能と思われるが，グラフ電卓を利用することで入力した式の履歴が残り，さらに考えやすかったのではないかと思われる。

対象とした学生は高専 1 年生ということもあり，自分の発見したことの証明まで考察できた学生は少ない。しかし，まず数学的なことについて何かを発見する体験をさせ，それにより通常の問題解法では得られない喜びを感じさせることができたことだけでも，この自由研究の役割には十分なものがあるように感じられる。

一方，教師側にとっては，問題を提示することは容易でも，提出されたレポートの点検作業の大きさには，かなりの負担感がある。さらに，提出された多様なレポートの評価をどうするかということも問題として残る。しかしながら，事後の学生の感想を見ても分かるように，このような自由研究を課すことで得られる教育効果には，他では得られない計り知れないものがあるように感じられる。今後は，この効果について，さらに様々な角度から検討を加えていきたい。

参考文献

[1] 島田茂編：新訂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」，東洋館出版，平成 7 年
[2] B. シェルピンスキー：ピタゴラスの三角形，東京図書，p.21，1993 年

[付記] 本研究は、平成 16・17 年度日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究 (C) 課題番号 16500566 (研究代表者：梅野善雄) による支援を受けている。

数学教育における創造力を育む試み

梅野　善雄‡
(一関工業高等専門学校)

Some Attempt to Encourage Creativity in Mathematical Education

Yoshio　UMENO
(Ichinoseki National College of Technology)

Creativity is one of the keywords for education of colleges of technology. If we wish to encourage students to be creative in mathematical education, they themselves need to notice something about mathematical contents. As they need to have enough basic skills of mathematics to do it, they need to be pretty good at mathematics. However, we have made it possible by using technology such as graphing calculators we lend to our first-year students. We give them several assignments to make them notice something. In this paper, we would like to introduce their reports about Pythagorean theorem and their comments about their assignments, and then consider the relation between achievements of assignments and math examination results.

KEYWORDS: creativity, graphing calculators, open-ended problem

1. はじめに

高専を取り巻く環境は，JABEE や認証評価等で激変している。この中では「創造力」が高専教育の重要なキーワードとなってきており，ロボットコンテストを始めとして，主に工学実験に関わる部分で特色ある試みが数多くなされている。

そのような創造性を発揮するには，まず「何かに気づくこと」が全ての出発点と思われる。そして，その「気づき」を現実化していくには，工学等に関する基礎知識の他に，いろいろな要素を関連づけて論理的に考えていく数学的思考力が必要とされるであろう。

従来の数学教育でその部分を取り上げるには，学生が数学の基礎力を十分に持っていることが前提となる。しかし，そこにテクノロジーを活用すれば，さらに多くの学生に数学的な事柄についての「気づき」を得させることが可能になる。

著者は，平成 16 年度の本校 1 年生に数式処理電卓 (TI–89) を貸与し，そのような「気づき」を得させるために「自由研究」としてい

‡一般教科自然科学系　umesan@ichinoseki.ac.jp

ろいろな課題を学生に与えた。以下では，この電卓を利用して学生が行った自由研究の内容や，それを行った学生の感想などを紹介すると同時に，成績との関連性などについて分析する。

なお，この研究は，平成16･17年度科学研究費補助金・基盤研究 (C)，課題番号 16500566 の支援を受けて行われたものである。

2. 数学教育における「自由研究」

高専における通常の数学の授業は，最初に概念や例題等を解説し，その後は定型的な問題を解かせるスタイルが普通である。総合的な応用問題を考えさせたくとも，そのような時間はなかなか取れないのが現状と思われる。また，成績下位の学生にとっては，分からない問題は友人や教員に聞く以外に解決策はない場合が多い。

このような数学教育の状況を打破するための一つの改善策として，数式処理電卓の活用が注目されている。それは数式処理機能 (CAS) を持つグラフ電卓であり，微分方程式の解析解や 3 次以上の行列の固有値も求めることができる。単純計算の部分や単なるグラフ表示を電卓側に任せてしまえば，計算時間を縮めると同時に，個々の学生のもつ能力差の問題もある程度解消できる。

大阪・清風高校の公庄や石川高専の阿蘇は，数式処理電卓を学生に長期間貸与して数学に関する探究活動を実践し，その結果を報告している [1)2)]。福井高専では数式処理電卓を新入生全員に購入させ，数学科全体での活用が試みられている [3)]。いずれにおいても，学生は与えられたテーマにつき自分の興味・関心にもとづいて自分の考えを発展させ，教師が予想した以上の考察を行っている。その探究活動は，学生により様々な答え方が可能であり，一般には「オープンエンドの問題」と呼ばれているものである [4)]。

一関高専でもこの電卓を活用した授業を行い幾つかの実践結果を報告した [5)6)]。そこでは，数式処理電卓 (TI–89) を主に数学の定理や性質への理解を深めさせるために使用させたが，その経験の中で感じたことは，この電卓は単に学生に持たせておいて，ときどき課題を与えるだけでも十分な効果が期待できるのではないだろうか，ということである。

そこで，平成 16 年度は，授業の中で特定の理解を得させるために使用するのではなく，それを授業外で利用させて数学に関する内容で試行錯誤を行わさせ，その中から何らかの数学的法則を発見させることを目的として貸与することにした。貸与したのは本校の 1 年生 (168 名) である。平成 16 年 7 月中旬から平成 17 年 2 月末まで貸与し,「自由研究」として 3 回にわたり幾つかの課題を与えた。時期は 7 月下旬，10 月下旬，そして 12 月下旬である。それぞれ約 1 ケ月の考察期間を与えた。課題は複数題を与え，その中から自分の取り組みやすい問題を選択させるようにした。

しかし,「数学的な事柄について考察せよ」と言われても，何をどう考察してよいか分からない学生が多いことも予想された。そこで，グラフ電卓で具体的にどのような操作をしたのか，その操作に対してどのような表示がなされ，それを見て何を感じ，どのようなことを予想したのか等々，各自の思考経過をまとめればよいことを説明した。「いろいろやってみたが何も分からなかった」というときは,「やった内容を書いてくればよい」ことを強調した。

各時期の課題は，以下のような内容である。

夏期課題

[i] $(x+1)^n$ の展開式において，指数 n と展開された式の係数との関係に関する考察

[ii] $x^n - 1$ の因数分解において，指数 n と因数分解された式の形との関係に関する考察

[iii] 繁分数の値の間に成立する関係に関する考察

$$\frac{1}{1+1},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\ \cdots$$

[iv] $f(x)$ のグラフと絶対値関数 $|f(x)|$ のグラフとの関係に関する考察

秋季課題

[v] 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフの形と，係数 a, b, c との関係に関する考察

冬季課題

[vi] 三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ が成立するような自然数 a, b, c に関する考察

[vii] $x^n + a$ が因数分解できるための自然数 n, a に関する考察

[viii] 3 次関数 $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフと a, b, c の値との関係に関する考察

3. 学生のレポートの内容

学生がどのようなことを書いてきたかを示すため，ここでは，冬季課題の「[6] 三平方の定理」に関して提出されたレポートから，学生が指摘してきた内容を幾つか紹介する。

冬季課題の提出率は 88.6%である。そのうち，大多数 (94 名) が三平方の定理に関する課題を選択した。この課題を提示したプリントの解説では，3 つの数が連続する場合，2 つの数が連続する場合など，学生が考えやすいように具体的に考察すべき内容にも言及した。

配布プリントでの解説内容

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として，$3^2+4^2 = 5^2$ や $5^2+12^2 = 13^2$ が良く知られています。このような自然数は，他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように，連続する 3 つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように，3 つのうち 2 つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは，他にあるでしょうか。つまり，$a^2 + b^2 = c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では，$a^2 = c^2 - b^2$ も成立しています。そして，そのような自然数 a, b, c は，どのような仕組で作り出されているのか，それを作り出す仕組について考えてみてください。ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

この課題に対して，学生はさまざまなアプローチの仕方をしている。

(1) 3 つの数が連続する場合の指摘

これが成立するのは，$3^2 + 4^2 = 5^2$ のときだけである。いろいろ調べてみて，この場合しか見つけられなかったことから,「この場合だけである」と結論づけている学生も多かったが，13 名の学生はその証明も与えている。

証 3つが連続するのは，$n^2+(n+1)^2 = (n+2)^2$ の場合である。整理すると $(n+1)(n-3) = 0$ となるので，$n = 3$ の場合しかない。

(2) b, c が連続する場合の指摘

この場合は，実に多くの指摘がなされてきた。以下に，その幾つかを箇条書きする。

- a を 1 以外の奇数とすると，b, c については $b = (a^2-1)/2$, $c = (a^2+1)/2$ である。
- $a^2 = b + c$ である。
- a は奇数である。
- $a + b - c$ は 2 の倍数である。
- $a = 2n+1, b = 2(n^2+n), c = 2(n^2+n)+1$
- $a = 2k+1$ とすると $b = (a+1)k, c = b+1$
- $a = 2n+1$ とすると，
  $b = 4(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)$
  $c = 4(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)+1)$

(3) a, b が連続する場合の指摘

$3^2 + 4^2 = 5^2$ の次は，$20^2 + 21^2 = 29^2$ であり，その次は $119^2 + 120^2 = 169^2$ となるなど，値がどんどん大きくなるので，学生はかなり苦労したようである。大きな数では，$4059^2 + 4060^2 = 5741^2$ が指摘されている。$n^2 + (n+1)^2 = 2n(n+1)+1$ が平方数となるような n について考えればよく，そのような n に対して $a = n, b = n+1$ であることも指摘されている。

(4) その他の指摘

三平方の定理を成立させる式として，次の式が指摘されてきた。

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

以下のような指摘もある。

- $a=(b+c)/3$ であれば $a:b:c=3:4:5$
- $a^2+b^2=c^2$ が成立すれば，a,b,c を n 倍した an,bn,cn についても成立する。
- $3^2+4^2=5^2$ に 11^2, 111^2 などを乗ずれば $33^2+44^2=55^2$, $333^2+444^2=555^2$ も成立

具体的にどのような形で発見に到ったかをみるため，以下に，学生のレポートの一部を紹介する。

S.I. 君は，b,c が連続する場合として，

$$5^2+12^2=13^2$$
$$7^2+24^2=25^2$$
$$9^2+40^2=41^2$$

があることに気づく。そして，

$$12+13=25=5^2$$
$$24+25=49=7^2$$
$$40+41=81=9^2$$

であることから，三平方の定理の 2 つの数 b,c が連続する場合は $b+c=a^2$ であるとしている。周知のように，a を奇数とするとき

$$b=(a^2-1)/2,\ c=(a^2+1)/2$$

であるので，この結果は正しい。

H.O. 君は，b,c が連続する場合を移項して

$$5^2-4^2=3^2$$
$$13^2-12^2=5^2$$
$$25^2-24^2=7^2$$
$$41^2-40^2=9^2$$

の形の式 $c^2-b^2=a^2$ を考える。右辺は $3,5,7,\cdots$ と奇数から始まって 2 ずつ増えるので奇数であることを指摘した後，左辺の $5,13,25,\cdots$ の増え方に着目する。その増分は $8,12,16,\cdots$ と 4 の倍数で増えているので c は $4n+1$ の形であるとする。さらに，n の値は，$5^2-4^2=3^2$ を 1 段目として k 段目にある場合は，1 から k までの総和 $1+2+\cdots+k$ である。たとえば，$41^2-40^2=9^2$ は 4 段目にあるので，

$$4n+1=4(1+2+3+4)+1=41$$

であるとしている。実際，$a=2k+1$ とすると，$1+2+\cdots+k=k(k+1)/2$ であるから，

$$c=4n+1=2k(k+1)+1=(a^2+1)/2$$

となるので，この結果も正しい。

M.A. 君は，a,b が連続する場合を考え，次の場合を見出している。

$$3^2+4^2=5^2$$
$$20^2+21^2=29^2$$
$$119^2+120^2=169^2$$
$$696^2+697^2=985^2$$

そして，この数値の現れ方を考察した結果，a は 1 つ前の値を 6 倍した値から，2 つ前の値から 2 を引いた値を引けばよいこと，そして，c は 1 つ前の値を 6 倍した値から，2 つ前の値を引けばよいことを発見する。たとえば，

$$119=20\times 6-(3-2)$$
$$169=29\times 6-5$$

である。一般に，$a,a+1,b$ が三平方の定理を満たせば，$3a+2b+1,3a+2b+2,4a+3b+2$ も三平方の定理を満たすことが知られているので [7]，その次の値を $A,A+1,B$ とすると，

$$A=17a+12b+8,\ B=24a+17b+12$$

である。M.A. 君の計算方法では

$$6(3a+2b+1)-(a-2)=A$$
$$6(4a+3b+2)-b=B$$

となるので，M.A. 君の結果は正しい。

このように多数の指摘がなされたが，その一方では，「120 組も調べたのに，規則性はさっぱり分かりませんでした」と書いてきた学生もいる。

4. 「自由研究」に関する学生の感想

冬季課題 [6] は，三平方の定理という良く知られた定理について考察するものであるが，前節のように実に多くの事柄を学生は指摘してきた。他の課題でも，同様に多数の指摘がなされている。学年末の最後の時間には，1 年間の授業の感想をアンケート調査した。その自由記述欄で，3 回行った自由研究の感想に

ついて記述するよう求めたところ，168 名中 142 名から記述が得られた。その内容は，大きく分けると次のように分類される。

(i) 楽しかった，おもしろかった，良かった
(ii) 勉強になった，理解が深まった
(iii) 大変だった・面倒だったが，おもしろかった・勉強になった・良かった
(iv) 分からなかった，難しかった
(v) その他の内容

以下に，その代表的なものを紹介する。

(1) 「楽しかった」「おもしろかった」

- 1 つの発見を見つけるまでに時間がかかるが，発見したときの喜びが大きい。
- 今までは規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった。
- 自由研究によって，数学の法則性を見つけることの楽しさを知り，また，友人との協調性も高めることができました。
- 始める前は，すっごいイヤなんだけど，一度始めてみると，こうすればもっとよくなる，この場合はどうなんだろう？と，どんどんその課題にのめり込んでいました。

(2) 「勉強になった」「理解が深まった」

- 今までは，ただ計算し，理解せずに書いていたが，自由研究によって理解しながら解けるようになった。
- 自由研究をやって，数学を前より深く考えれるようになった。
- 自由研究をやることで，数学的なことを発見することができたし，レポートをまとめることで国語の文章作成の勉強にもなった。
- 今までに学習してきたことを復習しながら，いろいろ応用させていけるので自分のためになった。

(3) 「大変だったが，勉強になって良かった」

- 難しかったけど，進めていくうちにもっと調べたいという考えが出てきて，時間がもっとあれば，と思った。
- 始めは面倒だと思っていても，いざ始めると没頭してしまった。
- いろいろな法則を見つけたりするのが大変だったけど，柔軟な考えを養うことができたので良かった。
- 自由研究は，出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った。

(4) 「難しかった」「分からなかった」

- 全々分からなかった。
- 自分なりに考えて取り組んだが，内容が濃くて難しかった。
- 友達と一緒にやって，その友達はどんどん新しい共通点などを発見したのに，自分はほとんどできなかった。
- 問題の意味から答え方まで，何をやったらいいのか，分からなくて最悪だった。

(5) その他の感想

- 意外に法則性が沢山あるので，凄いと思った。
- 最初はとまどったが，これをやることによって仕組が分かり，意欲も高まると思いました。
- 自由研究をやって，今まで考えなかった考え方をするようになった。
- 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見することができるようになったと思う。

5. 成績との関連性

この自由研究では，前節で示したように非常に多くの学生が数学に関する事柄を「発見した喜び」を語り，「数学のおもしろさ」を実感した。ここで，この学生の感想と成績との関連性をみてみよう。数学の成績は，著者の担当科目である基礎数学 I の年 4 回の試験点の平均点として，それをもとに 4 段階に区分した。表 1 は，この成績区分と，前節で示した自由研究に対する感想との関連性をみたものである。

表 1 を見ると,「(4) 分からなかった，難しかった」とする学生は全体の 2 割未満であり必ずしも成績が下位にあるわけではない。むしろ，成績の上下にはよらないことが分かる。他の (1)〜(3) の感想に対しても同様であり，それらは成績の上下とは関連していない。

図 1 と図 2 は，自由研究に対する感想を，学年末に行ったアンケート調査の質問項目からみたも

表 1： 成績区分と自由研究に対する感想

成績	自由研究に関する感想 (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	計
上位	17	6	9	5	3	40
中上	12	7	9	10	1	39
中下	11	6	5	5	4	31
下位	11	3	10	7	1	32
計	51	22	33	27	9	142
%	35.9	15.5	23.2	19.0	6.3	100

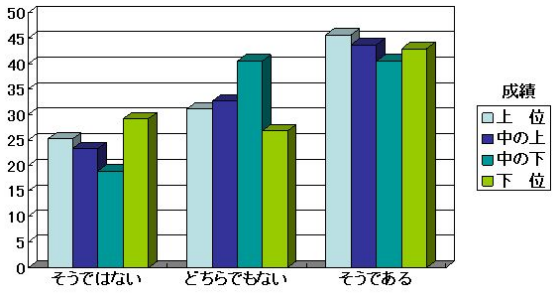


図 1： 自由研究は，おもしろかった

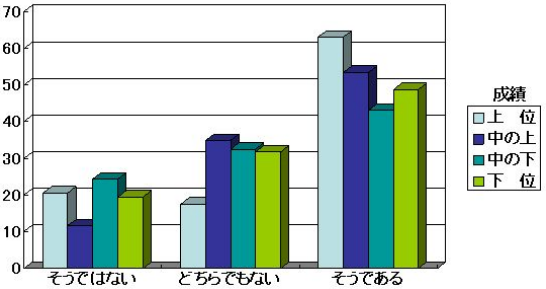


図 2： 数学的なことで新しい発見があった

のである。図 1 を見ると，成績の上下によらず 4 割以上が「自由研究はおもしろかった」と答えている。図 2 でも同様に，成績の上下によらず，どの区分でも 4 割以上が「自由研究をやってみて，数学的なことで新しい発見があった」としている。

では，学生が発見した内容とはどの程度の内容なのか，その数学としての到達度をみてみよう。学生から指摘のあった内容について，「よくそこまで気づいた」という内容を到達度が「高い」，ちょっと考えればすぐ気づく内容を到達度が「低い」，それ以外の指摘を「中間」として区分した。指摘内容が誤っている場合でも，それなりの根拠をもとに指摘されている場合は，その根拠の内容により到達度を判断した。なお，著者の判断結果は，本校の他の 3 名の数学教員にも見てもらい，2 名以上の教員から指摘のあった項目については到達度を変更した。そのような項目は全体の約 1 割である。

表 2 は，三平方の定理に関する課題について，このような到達度と成績との関係をみたものである。表 2 を見ると，成績と数学の到達度との間に若干の関連性は認められるものの，それほど大きなものではない。このうち，成績下位で到達度の高い 3 名の学生は，次のような指摘をしている。

A 君は,「ただ単に数字を代入していくだけでは時間がかかるので，仕組みを考えることにした」と述べ，3 辺のうち 2 辺が分かれば他の 1 辺は自

表 2： 成績区分と指摘内容の到達度

成績	数学としての到達度 低い	中間	高い	計
上位	4	15	8	27
中上	5	13	6	24
中下	7	11	4	22
下位	6	12	3	21
計	22	51	21	94
%	23.4	54.3	22.3	100.0

ずと分かるから，変数 a, b と和・差・積・商・累乗などを駆使して $3^2+4^2=5^2$ を表せないかを考え，$a=2,\ b=1$ のとき

$2^2-1^2=3,\quad 2\cdot 2\cdot 1=4,\quad 2^2+1^2=5$

であることに気づく。そして，そのことから

$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2$

を見出し，a, b に具体的な値を代入して次々に三平方の定理を満たす式を作り出している。

B 君は，連続する自然数の 2 乗の値を 3 から 26 まで書き出して，それらの差を計算する。そして，その差は奇数 $(2n+1)$ であることに気づき，そのことから，適当な奇数 a に対して連続する数の平方の差が奇数 a^2 となる数を見つければ，その連続する数が b, c であるとする。そして，a^2 に対して b, c は具体的には

$b^2 = (a^2 - 1)/2, \quad c^2 = (a^2 + 1)/2$

であることを見出している。

C 君は，$a^2 + b^2 = c^2$ において b, c が連続する場合の式を書き出した上で，それらの規則性について考える。そして，b は 4 の倍数であることに気づいた上で,「すべての式にあてはめることができる式を求めることができた」として,

$(2n+1)^2 + (2(n^2+n))^2 = (2(n^2+n)+1)^2$

を見い出している。この式が唐突に現れた印象はあるが，文面を読む限りは自分で気づいた式のように思われる。

このように，自由研究を考えることで，大多数の学生が数学的な事柄について何らかの気づきを得ており，そのような気づきを得ることができたことへの喜びを語っている。その喜びは数学に関する一般的な規則性を発見できたことから来ていると思われるが，それを成績の上下によらず，成績が下位の学生でも感じることができたことの意義には大きいものがあるだろう。適切な課題を継続的に与えていけば，学生の数学に対する見方が大きく変わることも期待され，数学教育における新な可能性が示唆されているように思われる。

6. おわりに

学生に課した課題の多くは，数式処理のできるグラフ電卓があって始めて可能になったものである。それを利用した自由研究で，多くの学生は数学的な事柄に関して何らかの気づきを得て，数学を考えることの「おもしろさ」「楽しさ」を実感した。このような形で，じっくり考えて何かに気づくことの喜びを何度も体験させることは，数学のみならず他の科目での取り組みにも影響を与えることが予想される。創造性も，このような積み重ねの中から育まれてくるのではないだろうか。1 年生なので自分の発見に証明を与えている学生は少ないが，このような課題を継続的に課していくことで，証明への関心も高まっていくことが期待される。

参考文献

[1] 公庄庸三：数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.7，No.1，pp.146–150，2000

[2] 阿蘇和寿：数学の授業における学生の探究活動–テクノロジーの効果的な活用に向けて–，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.9，No.1，pp.31–50，2003

[3] 長水壽寛他 6 名：テクノロジーを用いた数学教育の理論と実践，論文集「高専教育」，第 26 号，pp.339–344，2003

[4] 島田茂編：新訂「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」，東洋館出版，平成 7 年

[5] 梅野善雄：数式処理電卓を利用した微積分教育の改善，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌，Vol.8，No.1，pp.13–30，2001

[6] 梅野善雄：グラフ電卓を利用したグラフアートと関数理解，論文集「高専教育」，第 27 号，pp.191–196，2004

[7] B. シェルピンスキー：ピタゴラスの三角形，東京図書，p.21，1993 年

第III部

学生向け配布資料

本研究で学生に配布した資料

年度	月	資料の概要	頁
平成 16 年度	6 月	数ナビの使い方 (1)　(基本的な使い方の説明)	pp.112–113
		数ナビの使い方 (2)　(グラフ機能の使い方の説明)	pp.114–115
	7 月	数ナビの使い方 (3)　(グラフ・アート作成法の説明)	pp.116–117
		夏季休業の課題　(演習問題＋自由研究)	pp.118–119
	8 月	グラフ・アート（学生の作品）	p.39
		夏季休業課題の解説　(夏季休業中の自由研究の解説)	pp.120–123
	10 月	秋季の自由研究課題　(3 次関数のグラフについて)	p.124
		秋季の自由研究の解説	pp.125–128
	12 月	冬季休業の課題　(演習問題＋自由研究)	p.129
	2 月	冬季の自由研究の解説	pp.130–133
		数ナビに関する意識調査	pp.134–135
平成 17 年度	5 月	数学に関する意識調査 (1)	p.147
	5 月	数ナビの使い方 (1)　(基本的な使い方の説明)	pp.112–113
		数ナビの使い方 (2)　(グラフ機能の使い方の説明)	pp.114–115
	7 月	春季課題 (二項定理と $x^n - 1$ の因数分解)	pp.137–138
		夏季休業課題　(演習問題＋自由研究)	pp.139–140
	9 月	春季・夏季の自由研究の解説	pp.141–146
	10 月	数ナビの使い方 (3)　(グラフ・アート作成法の説明)	pp.116–117
	11 月	グラフ・アート (学生の作品)	p.40
	12 月	数学に関する意識調査 (2)	p147,p148
		冬季休業課題　(演習問題＋自由研究)	pp.149–150

数ナビ TI–89 の使い方 (1)

数式処理電卓 TI–89 は、通常の関数電卓の機能の他に、数式の計算や関数のグラフを描く機能があります。この電卓を活用すれば、数学に関するいろいろなことを自分で調べることができ、数学上の「思考のツール」として利用できます。その意味で、この電卓を「数学ナビゲーター」、略して**数ナビ**と呼ぶことにしましょう。基数 I や基数 II の学習で活用してください。

基本的な操作

黒カバー

カバーをはずすには、縦方向にスライドさせる。引きはがそうとすると壊れます。カバーをするときは、液晶画面の方から スライドさせること。逆に入れようとするとカバーが壊れます。

電源を切るには 2nd ON を押す。

通常の電卓として使うには

HOME (左端の上) を押すと現れる画面を**基本画面**という。

いろいろな計算は、基本画面の一番下の行 (**入力行**という) で行う。

HOME を押すと、いつでも基本画面に戻ることができる。⇐ **覚えておく！**

計算は、基本画面の入力行に計算式を書いて ENTER (右下青) を押す。 = ではないので注意。

四則計算では右側の黒いキーを利用。積の記号は右側。左側にあるのはエックスなので注意する。

3^{10} は、3 ^ (10) ENTER とする。 ^ は右端中央付近にある。指数は括弧 ( ) で囲うこと。

[ ] や { } には別な機能が割り振られているので、括弧はいつでも ( ) だけを使うこと!

負の符号と 2 数の差が区別される。⇐ 要注意！

数や式の先頭にくるマイナス は (−)(下段右側) を、2 数の差 のときは − を利用する。

たとえば、$-3x-(-2y+yz)$ は、 (−) 3 x − ((−) 2 y + y × z) と押す。

文字と文字の積 では積の記号 × を入れること。数と文字との積のときは入れなくてもよい。

結果を表示させるには、 ENTER (右下の青) を押すのを忘れないこと。

ルートの計算をするには

ルートの計算は √ キーを利用する。黄色で書いてあるので、実際には 2nd × を押す。

$\sqrt{9}$ であれば、 2nd × 9) ENTER とする。左括弧 (は自動的につく。消さないで、右括弧) で閉じること。今後は、 2nd キーの押し方までは明示しないので、各自で押すこと。

結果を小数表示させるには

通常の電卓と違い、この電卓は √ 7) ENTER としても $\sqrt{7}$ の値は表示されない。

結果を小数で表示させたいときは、 √ 7) ♦ ENTER とすること。

つまり、小数で表示させたいときは、最後に ENTER ではなく、 ♦ ENTER を押す。

エラー画面が出たら

ESC (上段の青いキー) を押せば、エラー画面が消える。メニュー画面を消すときも同様。

A から Z までのアルファベットは alpha を押してから対応するキーを押す。

X, Y, Z, T は、よく使うキーなので、黒の上段のキーにある。 alpha を押す必要はない。

キーには大文字が書いてあるが、実際に表示されるのは小文字である。

入力行のカーソルの移動は ◀, ▶ を押す。

削除するには

← か CLEAR (上段右端) を押す。 ← で一文字ずつ、 CLEAR では全部削除される。

クラス＿＿＿＿　番号＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の計算を数ナビを利用して行え。特に、 (−) と − の使い分けと、括弧 ( ) の使い方に注意すること。(3)(4) は分子や分母を括弧で囲うことが必要。数ナビは式を入れただけでは何もしない。**実行させるには ENTER を押すことが必要である。**繁雑になるので、今後は ENTER を押すことはいちいち明示しない。忘れずに各自で押すこと。

(1) $-\frac{9}{8}+\frac{3}{7}$　(2) $-(\sqrt{8}-2\sqrt{12})$　(3) $\frac{-2x+3y}{4}-\frac{x-2y}{5}$

(4) $\frac{3-\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$

数ナビの代数機能

一番上にある青いキーの F2 を利用すると、これまでに学習したいろいろな代数計算を数ナビにさせることができる。

式の展開 F2 (3:expand)

- F2 3 を押すと「expand(」と出るので、その後に展開したい式を入れて ENTER を押す。
- たとえば、「expand($(a+1)^3$)」とせよ。expand( ) の括弧と、展開する式の括弧があるので注意する。特に「expand(」の右括弧) を閉じることを忘れないこと！
- アルファベットの a は alpha = である。今後、 alpha キーは特に明示しないので、各自で押すこと。 ENTER も同様。

式の因数分解 F2 (2:factor)

- F2 2 を押すと「factor(」と出るので、その後に因数分解したい式を入れて ENTER を押す。因数分解することを、factorize という。
- たとえば「factor(x^2-4)」としてみよ。「factor(x^2-3)」ではどうか。「factor(x^2-3, x)」として、最後に x をつけるとどうか。

方程式の解法 F2 1 (1:solve)

- F2 1 を押すと「solve(」と出るので、その後に解きたい方程式と未知数の文字をコンマ, で区切って入れて ENTER を押す。解くことを、solve という。
- たとえば「solve($x^2-2x-2=0, x$)」としてみよ。「solve($2ax+3by=1, y$)」ではどうか。ax, by は文字の積なので、a × x, b × y として × が必要である。
- 「solve($x^2-4=0, x$)」「solve($x^2+4=0, x$)」「csolve($x^2+4=0, x$)」で、それぞれどのように表示されるか確認せよ。「solve」は実数の範囲、「csolve」と c をつけると複素数の範囲での解が求まる。

通分 F2 (6:comDenom)

- 「comDenom」は、分母 (denominator) を共通にする (common) 機能である。
- たとえば「comDenom($1/x+1/y$)」としてみよ。

商と余り F2 (7:propFrac)

- 「propFrac」は、割り算をして分数 (fraction) の分子を簡単な式に直す機能である。
- たとえば「propFrac($(2x^2-x-3)/(x+2)$)」としてみよ。次に、手計算で $2x^2-x-3$ を $x+2$ で割って商と余りを求めてみよ。B/A が (商 Q) + (余り R)/A の形で表示される。

虚数単位 i

- 2nd CATALOG を押すと「i」が出る。これは虚数単位である。複素数 $a+bi$ の i は、アルファベットの alpha 9 を押して現れる i ではなく 2nd CATALOG を使うこと。
- たとえば「$(2+3i)(3-i)$」としてみよ。「$(2+3i)/(3-i)$」ではどうか。

[注意] 以下の問題は、まず自分でやってみて、次に数ナビで確認すること。訳も分からずに数ナビの表示する答えを書き写していると、限りなく脳が退化していくことになるので注意すること !!

2 次の問に答えよ。

(1) 展開せよ。 F2 3(expand) で確認できる。

① $(2x+3)(4x-5)$　　② $(2x+3)^3$

(2) 因数分解せよ。 F2 2(factor) で確認できる。a, b は alpha キーを利用する。

① a^4-4　　② b^2-b-2

(3) 分子を簡単な式にせよ。 F2 7(propFrac) で確認できる。手計算での確認は、(分子) ÷ (分母) を計算してみる。

① $\dfrac{3x^2+2x-4}{x-1}$　　② $\dfrac{x^3-1}{x+2}$

(4) 方程式を解け。 F2 (solve) で確認できる。

① $x^2-x-2=0$　　② $x^2+4=4x$

(5) 計算して簡単にせよ。基本画面 (HOME) の計算で確認できる。

① $(-2\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})$　　② $\dfrac{1}{4-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4+\sqrt{3}}$

(6) 計算して簡単にせよ。基本画面 (HOME) の計算で確認できる。

① $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2-x}$　　② $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

(7) 計算して簡単にせよ。基本画面 (HOME) の計算で確認できる。

① $(-3+2i)(4-3i)$　　② $\dfrac{1-3i}{3+4i}$

関数グラフの描かせ方

関数のグラフを描かせるには、次の 3 つの機能を利用する。

♦ F1 ⟺ 関数の定義,　♦ F2 ⟺ 範囲の指定,　♦ F3 ⟺ グラフ描画

関数の定義 ♦ F1 (Y=)　(この画面を、**関数の定義画面**という)

- 関数を定義するには ♦ F1 を押し、$y1, y2, \cdots$ のどこに定義するかを ▼, ▲で選択する。
- 定義する箇所を決めたら ENTER を押して一番下の段 (入力行という) に移る。
- 入力行 (一番下の行) で関数を定義して ENTER を押す。$y=$ の部分を入れる必要はない。
  $y=-x^2+2x$ を定義するには、$y1=$ の右側に $-x^2+2x$ として ENTER を押す。
  具体的には、 (−) X ∧ 2 + 2 X ENTER とする。
- 一度定義した関数を変更するときも、一番下の入力行で同様にする。
- 定義した関数を削除するには、 ▲, ▼ でその関数を黒くして ← か CLEAR を押す。
- すべての関数を一気に削除するには、 F1 8 ENTER を押す。

グラフ描画 ♦ F3 (GRAPH)　(この画面を、**グラフ画面**という)

- 関数を定義したら、 ♦ F3 を押すとグラフが描画される。
- ♦ F1 の画面 (定義画面) で左端に √ 印のついた関数だけが描画される。
- ▲, ▼ で該当関数を黒くして F4 を押せば、その関数の √ をつけたり消したりできる。
- グラフ表示の状態で F2 4 (ZoomDec) を押せば、$-7.9 \leqq x \leqq 7.9,\ -3.8 \leqq y \leqq 3.8$ の範囲でグラフが表示される。ともかく、**グラフがうまく表示されないときは F2 4 を押す**。

範囲の指定 ♦ F2 (WINDOW)　(この画面を、**ウィンドウ・エディター**という。)

- ♦ F2 を押せば、グラフの描画範囲を直接指定できる。
- ▼ ▲ を利用して該当項目に移動して、数値を直接書き込む。
- xmin, xmax は x 軸の範囲、ymin, ymax は y 軸の範囲、xscl, yscl では x 軸と y 軸の目盛 (scale) の間隔を指定する。xmin<xmax, ymin<ymax, xscl> 0, yscl>0 となるように指定すること。グラフでのエラーは、この数値の設定ミスによることが多い。
- xmin, ymin などが負数になるときは、先頭のマイナスには (−) を利用すること。
- 設定を誤ってエラー画面が表示されたときは、 ESC でエラーを消してから、 F2 4 を押す。強制的に $-7.9 \leqq x \leqq 7.9,\ -3.8 \leqq y \leqq 3.8$ の範囲に変更される。
- xres ではグラフの解像度を指定できるが、xres = 2 の値を特に変更する必要はない。

どの画面でも、HOME を押すと、計算を行う画面 (基本画面という) に戻ることができる。

3 ♦ F1 として、$y1$ に $y=-x^2+3x$ を定義して、 ♦ F3 でグラフを表示させよ。

(1) グラフが表示されたら、 F3 を押して ◀ ▶ を押してみよ。その点の座標が表示される。**トレース機能**という。 ESC を押すと座標が消える。再び F3 を押し、カーソルの点滅状態で 1 ENTER、3 ENTER、−1 ENTER としてみよ。自分の好きな箇所に飛ぶことができる。−1 のマイナスは、 (−) である。

(2) ♦ F1 で、$y1$ を $y1=-x^2+3x-1$ に変更して、 ♦ F3 でグラフを表示させよ。

(3) ♦ F2 で、描画範囲を $-3 \leqq x \leqq 5,\ -2 \leqq y \leqq 2$ に変更して、 ♦ F3 グラフを描画させよ。ここでのマイナスは (−) を利用する。

(4) F3 で、$(3+\sqrt{5})/2$ ENTER とせよ。カーソルはどこに飛んだか。そのカーソルの移動先を解の公式で計算して (自分で) 確認せよ。

数ナビ TI–89 の使い方 (2)

グラフ画面での諸機能

トレース機能 F3 (Trace)

- グラフ表示の状態で F3 を押すと、点の座標を表示しながら ◄, ► でグラフ上を移動できる。x 座標を打ち込んで ENTER を押すと、その x 座標をもつグラフ上の点に移動する。
- 複数のグラフが表示されているときは、 ▲ ▼ で別なグラフに移動できる。
- $x < 0$ の値を打ち込むときは、 (−) を利用すること。
- 画面の範囲を越えた値を入れると、「Windows Variables Domain」というエラーが表示される。 ESC を押すとエラー画面が消える。

再描画 F4 (Regraph) グラフがどのように描かれるかをもう一度見たいときは、このキーを押す。

ズーム機能 F2 1 (ZoomBox)

- F2 1 (ZoomBox) を押すと、自分の指定した長方形状の箇所を拡大表示できる。
- それには、長方形の対角線の向き合う 2 点 を指定する。
- 最初に「1st Corner？」を問われる。 ▲, ▼, ◄, ► を利用して、拡大したい部分の左側の点を指定して ENTER を押す。 2nd を押しながらやると移動量が大きくなる。
- 次に、「2nd Corner？」と聞いてくるので、同じように ▲, ▼, ◄, ► を利用して、最初に指定した点と対角線の反対側の点を指定して ENTER を押す。
- 以上により、指定された長方形の内部が画面一杯に表示される。

x 軸との交点 F5 2 (Zero)

- 表示されたグラフと x 軸との共有点があるときは、その x 座標を求めることができる。
- F5 2 ENTER を押し、共有点の左側と右側を指定する必要がある。
- まず、「Lower Bound？」と聞いてくるので、 ◄ ► で共有点の ちょっと左側 にカーソルを移動して ENTER を押す。 2nd を押しながらやると移動量が大きくなる。
- 次に、「Upper Bound？」と聞いてくるので、 ► でカーソルを共有点の ちょっと右側 に移動して ENTER を押す。Lower は小さい方、Upper は大きい方、Bound は端ということ。
- 「Zero」が表示されてカーソルが x 軸との共有点に移動し、座標が下段に表示される。

最小値 F5 3 (Minimum)、最大値 F5 4 (Maximum)

- 指定された範囲における、y の最小値や最大値を求めることができる。
- 最小値は F5 3 ENTER を、最大値は F5 4 ENTER を押し範囲の左端と右端を指定。
- 「Lower Bound？」が出たら、 ◄ ► で範囲の左端にカーソルを移動して ENTER を押す。次に「Upper Bound？」が表示されるので、 ► で右端に移動して ENTER を押す。
- 指定された最小値 (最大値) を取る点にカーソルが移動し、その点の座標が下段に表示される。

2 つのグラフの交点 F5 5 (Intersection)

- F5 5 を押すと、2 つのグラフの交点の座標を求めることができる。
- 「1st Curve？」では、 ▼ ▲ でグラフの間を移動し、最初のグラフ上にカーソルを移動して ENTER を押す。グラフが 2 つしか表示されていないときは ENTER だけでよい。
- 次に、「2nd Curve?」が表示されるので、 ▼ ▲ で 2 つ目のグラフに移動して ENTER を押す。グラフが 2 つしか表示されていないときは ENTER だけでよい。
- その後で、「Lower Bound？」では ◄ ► で交点の左端を指定して ENTER 、「Upper Bound?」では同様にして交点の右側を指定して ENTER を押す。
- そうすると、カーソルが自動的に交点に移動して、その点の座標が下段に表示される。

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

座標を表にするテーブル機能

グラフ表示されている関数の x 座標と y 座標を、表として表示させることができる。

♦ F4 ⟺ 表の開始位置や刻み幅の設定,　♦ F5 ⟺ x, y 座標を表で表示

テーブル機能 F5 (Table)

- ♦ F3 でグラフが表示されている状態で ♦ F5 を押すと、そのグラフの x 座標と y 座標が表 (テーブル) で表示される。
- 5 行分のデータしか表示されないが、 ▲ ▼ で上方にも下方にも自由に移動できる。
- ◄ ► で表の左右の移動もできる。下段には黒く表示されている箇所の値が表示される。
- ♦ F4 を利用すると、最初に表示される表の左上の x の値や x の刻み幅を変更できる。表が表示されている状態のときは、 ♦ を押さずに F2 だけを押してもよい。

テーブルセット F4 (Tblset)

- ♦ F4 を押すと、 ♦ F5 で最初に表示される表の左上の x の値や x の刻み幅を変更できる。
- ♦ F4 を押して、最初に「tblStart」を指定する。表の最初の x の値を指定することになる。
- 次に、 ▼ で下の行に進み、「Δtbl」の箇所で、x の刻み幅を指定する。
- 以上の 2 つの値を指定したら、 ENTER を **2 回押す**。
- すると、表が設定したような開始位置と刻み幅で表示される。

1　数ナビで次の操作を行え。その操作ができたか、できなかったか、該当する項目を○で囲め。

(1) $y1 = x$, $y2 = x^2 - 2$ を定義してグラフを表示させよ。　操作が　できた、できなかった

(2) 描画範囲が $-3 \leqq x \leqq 5$, $-2.5 \leqq y \leqq 2.5$ となるようにせよ。操作が　できた、できなかった

(3) $y2$ のグラフだけが表示されるようにせよ　操作が　できた、できなかった

(4) トレース機能で、$y2 = x^2 - 2$ のグラフ上を移動してみよ。　操作が　できた、できなかった

(5) (4) において、$x = -1$ のときの y 座標を求めよ。　$x = 3$ のときの y 座標は、＿＿＿＿

(6) $y1$ と $y2$ の 2 つのグラフが表示されるように戻せ。　操作が　できた、できなかった

(7) x に対応する 2 つの y 座標を、表として表示させよ。　操作が　できた、できなかった

(8) 表の左上の x の値が -2、x の刻み幅が 1 となるようにせよ。操作が　できた、できなかった

(9) 表で、$y1 \geqq y2$ となるのは x がどのようなときか。　＿＿ $\leqq x \leqq$ ＿＿のとき $y1 \geqq y2$ となる

(10) 再度、グラフを表示させ、上記を確認せよ。　確認が　できた、できなかった

(11) 2 つのグラフの左側の交点付近を拡大せよ。　操作が　できた、できなかった

(12) 左側の交点の座標を数ナビの操作で求めよ。　$x =$＿＿＿＿、$y =$＿＿＿＿

(13) 2 つのグラフの交点を自分で計算して確認せよ。　確認が　できた、できなかった

[操作]　(1) ♦ F1 と ♦ F3、(2) ♦ F2、(3) ♦ F1 で $y1$ の ✓ を F4 ではずす、(4) ♦ F3 としてから F3 で ◄ ► で移動、(5) (4) の状態で 3 ENTER 、(6) ♦ F1 で $y1$ に F4 で ✓ をつける、(7) ♦ F5、(8) ♦ F4 で tblStart に -2、Δtbl に 1 を入れて ENTER を 2 回押す、(9) ♦ F5 として $y1 \geqq y2$ の部分を調べる、(10) ♦ F3 として F3 を利用、(11) F2 1、(12) F5 5(Intersection) を利用するか、または HOME で基本画面に戻り F2 (1:Solve) を利用する。(13) $x = x^2 - 2$ を自分で解く。

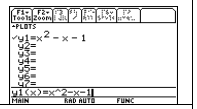
グラフ関連機能のまとめ

- 関数を定義する $\Longrightarrow$ ♦ F1
- 描画範囲を見る・指定する $\Longrightarrow$ ♦ F2
- グラフを描画する $\Longrightarrow$ ♦ F3
- 表の始点や刻み幅を指定する $\Longrightarrow$ ♦ F4
- x, y 座標を表にする $\Longrightarrow$ ♦ F5
- 描画する関数を指定 $\Longrightarrow$ ♦ F1 の画面で、▲ ▼ で関数を指定し、F4 で √ を指定する
- 長方形指定でグラフを拡大 $\Longrightarrow$ F2 1
- 標準座標でグラフを描画 $\Longrightarrow$ F2 4
- グラフ上を動く $\Longrightarrow$ F3 で ◄, ►
- グラフを再描画する $\Longrightarrow$ F4 を押す
- y 座標を求める $\Longrightarrow$ F3 を押しカーソルが点滅状態で x の値を指定して ENTER
- x 軸との交点 $\Longrightarrow$ F5 2 で交点の前後の点を ENTER で指定する
- 最小値 $\Longrightarrow$ F5 3 で左端と右端を指定
- 最大値 $\Longrightarrow$ F5 4 で左端と右端を指定
- 2 つのグラフの交点 $\Longrightarrow$ F5 5 で、2 つのグラフを指定してから、交点の前後の点を ENTER で指定する

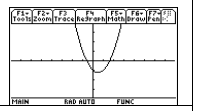
注 1) (−) と − の使い分けに注意すること。先頭のマイナスや括弧のすぐ後のマイナスは (−)。
注 2) 括弧 ( ) の対応関係にも注意すること。左括弧 (と、右括弧) の数は一致する必要がある。

例 1) ♦ F1 で、$y1 = x^2 - x - 1$ とする。

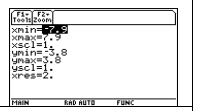
関数の定義
♦ F1 を押して、▲ ▼ で $y1$ の箇所を黒くして ENTER を押し一番下の行で $x^2 - x - 1$ を入れて ENTER を押す。$y2$ に定義するには、$y2$ の箇所を黒くして ENTER を押して同様にする。



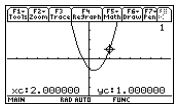
グラフ描画
♦ F3 を押すとグラフが表示される。標準状態の範囲とするため F2 4 を押すと、$-7.9 \leqq x \leqq 7.9$、$-3.8 \leqq y \leqq 3.8$ の範囲でグラフが表示される。目盛は x, y 軸とも 1 刻みに指定されている。



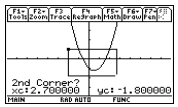
範囲指定
♦ F2 を押すと、どのような範囲でグラフが描画されているかが分かる。F2 4 を押すと、必ず、右のような範囲になる。必要であれば、この値は自由に変えてよい。ただし、xmin<xmax、ymin<ymax となるようにする。



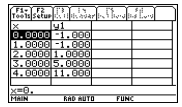
トレース
♦ F3 でグラフを表示させ、その状態で F3 を押すと、◄ ► を利用してグラフ上を移動できる。下段には、その点の座標が表示される。x の値を打ち込んで ENTER を押すと、その値を x 座標に持つ点に移動する。右図は、$x = 2$ を指定したときである。2 ENTER とすればよい。



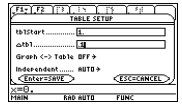
ZoomBox
グラフが表示されている状態で、長方形状の区画を指定して、その部分だけを拡大表示させることができる。F2 1 を押す。「1st Corner？」では、青い ▲ ▼ ◄ ► を利用して長方形の頂点の 1 つを指定して ENTER、「2nd Corner？」で対角線の反対側の頂点を指定して ENTER を押せばよい。右図は 2 つ目の頂点を指定しているところ。



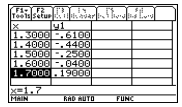
座標を表で表示
♦ F1 で関数が定義されているとき、♦ F5 を押すと、その関数の座標を表で表示することができる。関数の定義画面で √ 印のついた関数の座標が表で表示される。右図から、$1 < x < 2$ の箇所で $y = 0$ となっていることが分かる。



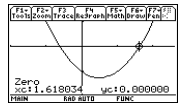
刻み幅を変更
♦ F4 を押すと、x の刻み幅を変更することができる。「tblStart」には表の開始位置を、「Δtbl」には x の刻み幅をいれる。数値を入れて ▼ で下の項目に移動する。この 2 つの数値をいれたら ENTER を 2 回押す。右図では、最初の開始位置を 1 に、x の刻み幅を 0.1 に設定した。



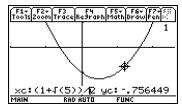
変更後の表
前の箇所で、刻み幅を変更して ENTER を 2 回押すと、変更した設定で表が表示される。▼ で下に行くことにより、$y = 0$ となるのは $1.6 < x < 1.7$ の箇所であることが分かる。♦ F4 で刻み幅をもっと細かくすると、さらに詳しい範囲が分かる。



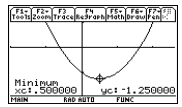
x 軸との共有点
♦ F3 で再びグラフを表示させる。その状態で F5 2(Zero) を押すと、x 軸との共有点の座標が求められる。「Lower Bound？」では、◄ ► を利用して共有点の左側を指定して ENTER、「Upper Bound？」では共有点の右側を指定して ENTER を押すと、その間にある共有点の座標が表示される。右図は結論を表示している。$x \fallingdotseq 1.618$ であることが分かる。



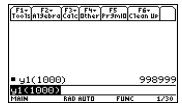
トレース画面でも確認
$x^2 - x - 1 = 0$ の解は、$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。F3 のトレース画面では、直接 x の値を指定できる。$(1 + \sqrt{5})/2$ を入れて ENTER を押してみよ。右図は ENTER を押す直前の状態である。$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.618034$ である。解の確認は、HOME を押して基本画面に戻り、F2 1 (1:Solve) で「solve($x^2 - x - 1 = 0, x$))」、または「solve($y1(x) = 0, x$)」としてもよい。



最小値 (最大値も同様)
♦ F3 でグラフを表示させる。その状態で F5 3(Minimum) を押すと、y の最小値が求められる。「Lower Bound？」では、◄ ► を利用して最小値がある箇所の左側を指定して ENTER、「Upper Bound？」では右側を指定して ENTER を押すと、y の値が最小になる点にカーソルが移動し、その点の座標が表示される。右図は結論を表示しているところである。



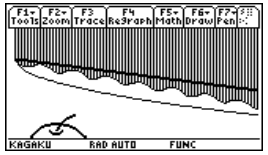
基本画面
HOME を押すと、計算を行う基本画面に戻る。♦ F1 で定義した関数は、この画面でも生きている。トレースの画面では、グラフが表示されている範囲外の x の値を指定するとエラーとなるが、基本画面では定義域内の値であれば何でも指定できる。右図は、$y1 = x^2 - x - 1$ において、x に 1000 を代入して $y1(1000)$ を求めている。$y1(1000)$ ENTER とする。



H

数ナビでグラフ・アートに挑戦

課題　数ナビを使って、何でもよいのでグラフ・アートを作成してきて下さい。画面の範囲は [F2] 4 の画面とし、$-7.9 \leqq x \leqq 7.9,\ -3.8 \leqq y \leqq 3.8$ とします。たとえば、直線や放物線などを組み合わせるだけで、右側のようなグラフが作成可能です。



1. 作成の流れ

(1) 紙に描きたいグラフの下書きをする。動植物、風景、物、イラスト、抽象画など何でもよい。
(2) [♦] [F1] で指定できる関数の数は 99 個ある。
(3) 個々の曲線と、その描画範囲や描画方法を指定する (詳細は、**2**, **7**, **8**)。
(4) [♦] [F3] でグラフを描画。下書き通りのグラフになるように関数の形や範囲などを調整する。すべての関数を描画させると時間がかかるので、調整に必要なグラフだけを表示させるとよい。 [F4] でチェック印のついた関数のグラフだけが表示される。
(5) グラフが確定したら、必要がなければ座標軸を消す (詳細は、**8**(5))。
(6) 最後に、画面を保存する (詳細は、**4**)。

2. 描画範囲の指定 [|]

個々の関数の描画範囲を指定できる。たとえば、$y1 = x^2$ の $-1 < x < 2$ の範囲だけを描画させたいのであれば、「$y1(x) = x^2 \mid -1 < x$ and $x < 2$」とする。つまり、関数の後に縦線 [|] を引き、その後に描画する範囲を指定する。 [|] は [=] の下のキーである。and は [alpha] を利用し、and の両側には空白 [alpha] [(−)] が必要である。不等号 < > は、 [2nd] 0, [2nd] . である。

3. 関数定義の際の留意事項

- 「$y = 2 \mid -1 < x$ and $x < 2$」のように、***x* 軸に平行な直線***を定義すると、数ナビは $-1 < x < 2$ の範囲ではなく画面一杯のグラフを描画する。この場合は、傾きが 0 の直線を変数 x を含む形で 定義する。例えば、「$y = 2 + 0 \cdot x \mid -1 < x$ and $x < 2$」とする。
- $x = 1$ のような ***y* 軸と平行な直線***は、$y = \cdots$ の形では定義できない。傾きの非常に大きな直線として定義すればよい。例えば、点 $(1,0)$ を通る縦の直線は $y = 100(x-1)$ とする。ただし、x の範囲を指定した直線は 2 年の媒介変数表示の知識が必要になる。
- **絶対値関数** (absolute function) $y = |x|$ は、「$y = \mathrm{abs}(x)$」として定義する。abs は [alpha] を利用する。または、 [CATALOG] を利用してもよい。
- 中心 (a,b)、半径 r の**円の方程式**は後期に学ぶ。それは、点 (a,b) との距離が r であるような点 (x,y) の集りであるから、三平方の定理より $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ である。これを解くと $y - b = \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ であるから、$y = \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b$ である。したがって、円の上半分は $y = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b$ である。

4. グラフの保存

作成した図を保存するには、 [F1] 2(Save Copy As ⋯) とし、 [▼] で「Variable」の箇所にいき、適当な名前を指定する。名前は、各学科の略称のアルファベット 2 つと各自の出席番号とする。たとえば、mm45 とか、ss03 などのような名前とする。保存の仕方に自信がないときは、関数の定義を消さないようにして、そのまま持ってきて下さい。その画像を再び呼び出すには、 [F1] 1(Open) として Variable に自分が保存した名前を入れて [ENTER] を押せばよい。

5. 保存の際の注意事項

[F1] 1(open) を利用して保存ファイルを呼び出すと、現在 [♦] [F1] の画面で定義されている関数がすべて削除され、新にオープンする画像の定義関数で置き換られるので注意すること。

6. 保存グラフの削除

保存したグラフを削除するには、 [2nd] [−] (Var-Link) として、 [▼] で保存した名前の箇所にいき、 [←] で削除する。

7. 個々の関数の描画スタイルの設定

関数のグラフは、通常は少しずつ線分 (Line) で結ばれて曲線が表示される。点 (Dot) の連続で表示させたり、太い (Thick) 線で表示させたり、カーソルが動く (Animate) だけで曲線が残らないようにしたり、曲線の上を斜線で塗りつぶしたりすることもできる。

(1) 関数の定義画面 ([♦] [F1]) に関数が定義されているとする。
(2) [▲], [▼] で表示方法を指定したい関数に合わせる。黒くなった関数の表示方法が変更できる。
(3) [2nd] [F1] を押す。グラフの描画スタイルを指定できる。
(4) 前に変更していなければ、「1:Line」にチェック印がついている。
(5) [▲], [▼] で移動し、点 (Dot) の連続で表示させたいときは「2 : Dot」、点 ● の代わりに四角 ■ を使いたいときは「3:Square」、太線 (Thick) で表示させたいときは「4 : Thick」に、カーソルが動くだけで曲線が表示されないようにするには「5 : Animate」に合わせて [ENTER] を押す。「7:Above」は曲線の上側に斜線を引き、「8:Below」は下側に斜線を引く。
(6) 再度 [2nd] [F1] を押せ。チェック印の位置が変更されているはずである。
(7) [♦] [F3] を押すと、指定された表示方法でグラフが描画される。
(8) 以上のことを、個々の関数ごとに指定できる。

8. グラフ画面の描画形式の設定

複数のグラフを同時に描画させたり、座標軸を消したりすることもできる。

(1) [♦] [F1]、 [♦] [F2]、 [♦] [F3] のいずれかの画面において、 [♦] [|] (または [F1] 9) を押す。
(2) 「Coordinate」の RECT は、変更しないこと。現在使っているのは直交座標 (rectangular coordinates) である。
(3) 「Graph Order」を SIMUL にすると、複数のグラフが同時に (simultaneously) 描画される。SEQ では、定義した順に (in sequence) 描画される。
(4) 「Grid」を ON にすると、画面全体に格子縞が現れ、OFF にすると消える。
(5) 「Axes」の箇所を OFF にすると座標軸が消える。ON にすると座標軸が表示される。
(6) 「Leading Cursor」を ON にすると、グラフ描画の先端にカーソルが現れる。
(7) 「Label」を ON にすると、座標軸の名前の x, y が表示される。

9. その他

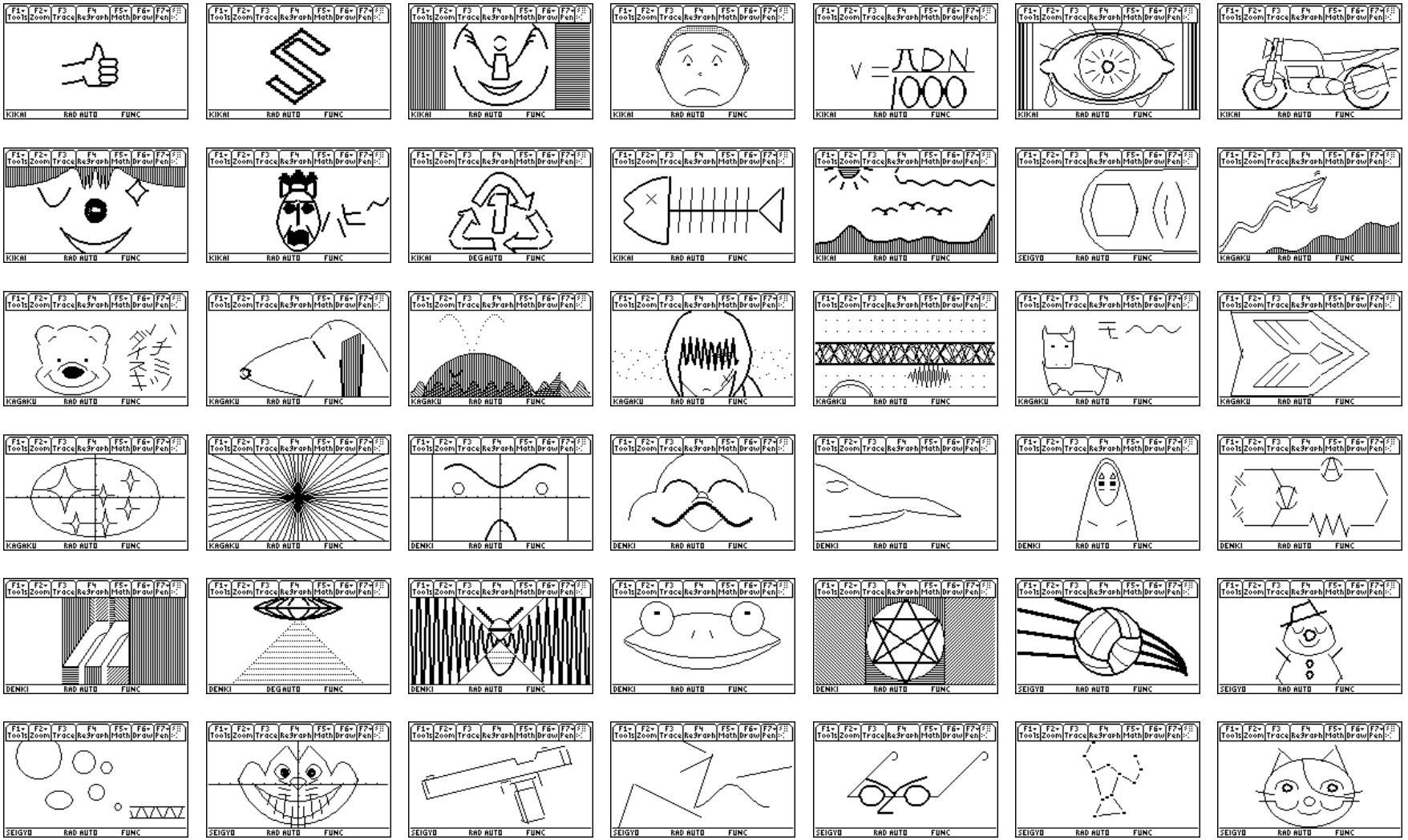
- 黒い塗りつぶしは、太線を少しずつずらしながら塗りつぶすことになる。太線は、定義画面で、太くしたいグラフを黒く反転させてから、 [2nd] [F1] で「4:Thick」を選択する。
- すべての関数を削除するには、 [F1] 8。
- グラフを描画させる関数は、 [F4] でチェック印のつけられた関数である。関数が増えてくると、個々の関数にチェックをつけたり取ったりするのは面倒である。すべての関数にチェック印をつけたり、取ったりするには [F5] を利用する。 [F5] 1 ですべての関数のチェックをはずし、 [F5] 2 で、すべての関数にチェックが付けられる。

10. 参考例の関数

例示した図は、以下の関数で描画されている。個々の関数に、太線や斜線による塗りつぶしなどの指定を行い、左上の図のように表示されるようにせよ。

$y1 = -\sqrt{x + 7.5} + 1.7$
$y2 = -1/7 \cdot x + .7 \mid x > -7.7$
$y3 = \frac{-x}{5} + 1/5 \cdot \sin(3 \cdot x) \mid x > -7.6$
$y4 = \sqrt{2^2 - (x + 4.8)^2} - 4.8$
$y5 = (x+4.9)^2 - 3.5 \mid -5.5 < x$ and $x < -4.4$
$y6 = \sqrt{x + 4.9} - 3.3 \mid x < -3.5$

平成15年度冬季休業課題　数ナビ「TI–89」によるグラフ・アート



(一関工業高等専門学校、1年生の作品)

《基礎数学 I》夏期休業課題

夏期休業の課題は、以下の 3 点です。(1)(2) は、休み明けの最初の日 (9 月 1 日) に提出してください。(3) は、最初の授業のときに、私の数ナビにファイルコピーします。

(1) このプリントにある問題をレポート用紙に計算過程とともに解答する。
(2) このプリントの裏にある自由研究のうち、どれか一つを選んでレポート用紙にまとめること。
(3) 数ナビを利用したグラフ・アートを作成する。

- **どうしても分からない問は飛ばしてもよいが、必ず提出のこと。成績に関係します。**
- **すぐ分かる問以外は答えだけを書かないで途中の計算過程も書くこと。**
- **計算問題では数ナビは答え合わせとして利用する。表示結果を丸写ししないこと！**
- **計算過程が必要な箇所で答しか書いていない場合は、書き直してもらうことがある。**

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

展開　(p.4)

1 同じものを一つの文字で置きかえて、次の式を展開せよ。

(1) $(2x^2+x+1)(2x^2+x-1)$　(2) $(2x^2-x+1)(2x^2+x-1)$　(3) $(2x^2+x-1)(2x^2-x-1)$

2 公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ は覚えること !!
この公式を利用して、次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　(2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$　(3) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

3 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ は覚えること !! この公式を利用して、次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3$　(2) $(2x-1)^3$　(3) $(3x+2y)^3$　(4) $(x^2-3)^3$　(5) $(x^2-y^2)^3$

因数分解　(p.6)

4 **公式を利用して**、次の式を因数分解せよ。共通なものがあったら、まず、くくる。

(1) $9x^2-16$　(2) $18x^2-12x+2$　(3) $18x^2-8y^2$
(4) $4x^2+20x+25$　(5) $6x^2-7x-3$　(6) $12x^2+21x+9$

5 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ は頻出する。この公式を利用して、次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+2)^2-1$　(2) $(x+y)^2-(x-y)^2$　(3) $4y^2-(x-2y)^2$

6 一つの文字について降べきの順に整理して、次の式を因数分解せよ。

例　$x^2+2xy+y^2-2x-2y-3=x^2+(2y-2)x+(y^2-2y-3)$ ← 次数の順に整理
$=x^2+(2y-2)x+(y+1)(y-3)=(x+y+1)(x+y-3)$
これは、$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$ という因数分解と同じタイプである。

(1) $x^2-2y^2+xy+2x+7y-3$　(2) $x^2-2y^2+xy-4x+y+3$

整式の除法　(p.9, p.17) 整式 P を整式 B で割ったときの商を Q、余りを R とすると、$P=BQ+R$ と表せるので、$\dfrac{P}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ である。この変形で、分子の次数を分母の次数より下げることができる。

7 次の分数式の、分子を分母で割った商と余りを求めて、分子が簡単になるように変形せよ。

(1) $\dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x-1}$　(2) $\dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x^2-1}$　(3) $\dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x^3-1}$

剰余の定理と因数定理　(p.10)
整式 $P(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを R とすると $P(x)=(x-a)Q(x)+R$ である。特に、$R=P(a)$ である。また、$P(a)=0$ であれば、$P(x)=(x-a)Q(x)$ と因数分解できる。

8 剰余の定理を利用して、次の問に答えよ。
(1) $P(x)=x^3+2x^2+ax+1$ が $x+1$ で割り切れるように、a の値を定めよ。
(2) $P(x)=x^6+ax^3+b$ は、$x+2$ でも $x-1$ でも割り切れる。a,b の値を求めよ。
(3) $P(x)=x^3+ax^2+bx+8$ は $x-2$ で割り切れ、$x+3$ で割ると 20 余る。a,b の値を求めよ。

9 因数定理を利用して、次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-3x-2　(2) x^3-2x^2-3x+6　(3) $3x^3+x^2-8x+4$

分数式の計算　(p.15)

10 次の分数式を計算して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1-x^2}{1+y}\div\dfrac{x+x^2}{1-y^2}$　(2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+8x+15}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x-6}+\dfrac{x}{x^2-2x-8}$　(4) $\dfrac{x-2y}{x^2-2xy-8y^2}-\dfrac{x-3y}{x^2-4xy}$

(5) $\dfrac{x-\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}-2}$　(6) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x-2}}{1-\dfrac{2}{x+2}}$

絶対値　(p.19)
実数 a と原点 0 との距離を $|a|$ で表す。$a\geqq 0$ のとき $|a|=a$、$a<0$ のとき $|a|=-a$ である。

11 次の値を求めよ。(4)〜(6) は簡単にせよ。π は円周率である。

(1) $|5-2|$　(2) $|1-\pi|$　(3) $|\sqrt{2}-3|$
(4) $|x-2|$, $(x>3)$　(5) $|2-x|$, $(x>3)$　(6) $|x|+|1-x|$, $(x>3)$

平方根　(p.20) $\sqrt{a^2}=|a|$ である。$x>2$ のとき、$\sqrt{4-4x+x^2}=|2-x|=-(2-x)=x-2$

12 次の式を計算をせよ。分数になるものは分母を有理化すること。

(1) $(3+4\sqrt{2})^2$　(2) $(3+\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})$　(3) $(3+\sqrt{2})^3$
(4) $\dfrac{1}{4-\sqrt{3}}$　(5) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$　(6) $\dfrac{3-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

13 次の式を、根号も絶対値も使わない式で表せ。

(1) $\sqrt{\pi^2-4\pi+4}$　(2) $\sqrt{\pi^2-6\pi+9}$　(3) $\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$
(4) $\sqrt{a^2-2a+1}$, $(a>1)$　(5) $\sqrt{a^2-4a+4}$, $(a<0)$　(6) $\sqrt{4a^2+4a+1}$, $(a<-1)$

複素数　(p.22) $i^2=-1$ となる新しい数を考える。$a+bi$ の計算は、$i^2=-1$ に注意するだけで普通に計算してよい。$\alpha=a+bi$ のとき、$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ を α の絶対値、$\overline{\alpha}=\overline{a+bi}=a-bi$ を α の共役複素数という。$k>0$ のときは、$\sqrt{-k}=\sqrt{k}i$ である。

14 次の式を計算せよ。

(1) $(3-2i)^2$　(2) $(3-2i)(5+4i)$　(3) $(3-2i)^3$
(4) $\dfrac{1}{4+3i}$　(5) $\dfrac{4+3i}{3-2i}$　(6) $\dfrac{1}{3-2i}+\dfrac{1}{3+2i}$
(7) $(3-\sqrt{-8})(4+\sqrt{-2})$　(8) $\dfrac{1}{4-\sqrt{-3}}$　(9) $\dfrac{2-\sqrt{-3}}{4+\sqrt{-3}}$

15 次の計算をせよ。

(1) $|4-3i|$　(2) $\left|(5-2i)(3+4i)\right|$　(3) $\left|\dfrac{3+2i}{4-3i}\right|$
(4) $\overline{4-3i}$　(5) $\overline{(5-2i)(3+4i)}$　(6) $\overline{\left(\dfrac{3+2i}{4-3i}\right)}$

2 次方程式の解の公式　(p.31)　$ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の解は、$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

16 次の 2 次方程式の解を求めよ。因数分解できるものは因数分解によること。$a \neq 0$ とする。

(1) $x^2-3x-4=0$　(2) $x^2-3x+4=0$　(3) $2x^2-3x-4=0$

(4) $4x^2+1=0$　(5) $4x^2-5=0$　(6) $4x^2+5x=0$

(7) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{4}=0$　(8) $0.2x^2-0.15x+0.3=0$　(9) $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$

判別式　(p.32) $D=b^2-4ac$ を 2 次方程式の判別式という。D の符号で、解のタイプが分かる。

例 1)　$kx^2-kx+2=0$ が 2 重解を持つのは、$D=(-k)^2-8k=k^2-8k=k(k-8)=0$ のときなので $k=0,8$ であるが、$k=0$ のときは $2=0$ となり不合理なので $k=8$ のときである。このとき、$8x^2-8x+2=0$ より $4x^2-4x+1=0$, $(2x-1)^2=0$ なので、2 重解は $x=\dfrac{1}{2}$ である。

17 次の 2 次方程式が、2 重解を持つように k の値を定め、そのときの 2 重解を求めよ。

(1) $x^2+(k+2)x+k^2=0$　(2) $x^2-4kx+k+3=0$

解と係数の関係　(p.32) $ax^2+bx+c=0$ の解を α,β とすると、$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ である。

例 2)　$x^2+2x+3=0$ の解を α,β とすると、$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$ であるから、

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-2)^2-2\cdot3}{3}=-\frac{2}{3}$$

18 $2x^2-8x+3=0$ の解を α,β とするとき、次の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $(\alpha+1)(\beta+1)$　(5) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(6) $\alpha^3+\beta^3$

2 次式の因数分解　(p.34)

$ax^2+bx+c=0$ の解を α,β とすると、$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できる。

例 3)　$2x^2+2x+1=0$ の解が $x=\dfrac{-1\pm i}{2}$ なので、$2x^2+2x+1$ は次のように因数分解できる。

$$2x^2+2x+1=2\left(x-\frac{-1+i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i}{2}\right)=\frac{1}{2}(2x+1-i)(2x+1+i)$$

19 次の 2 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+3x+1　(2) x^2+3x+3　(3) $4x^2+3x-2$

(4) $3x^2-3x+2$　(5) $15x^2+22x+8$　(6) $8x^2-12x+5$

2 数を解にもつ 2 次方程式

2 数 α,β を解とするような 2 次方程式は、$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ であるから、$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ である。つまり、2 数の和と積が分かれば、その 2 数を解に持つような 2 次方程式を作れる。

例 4)　$3\pm2i$ を解とする 2 次方程式は、2 数の和が 6、積が $9-4i^2=13$ なので $x^2-6x+13=0$

21 次の 2 数を解にもつ 2 次方程式を作れ。

(1) $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{2}{3}$　(2) $4\pm\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{-2\pm\sqrt{3}i}{5}$

22 $2x^2-3x+4=0$ の解を α,β とするとき、次の 2 数を解にもつ 2 次方程式を作れ。

(1) $\alpha+1$, $\beta+1$　(2) $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$　(3) α^2, β^2

自由研究

次の課題から 1 つを選択して、何かの規則性がないかどうかを数ナビを利用して調べてみてください。そして、その結果をレポートにまとめてください。

まとめ方は自由です。数ナビにどのようなことをやらせたらどのような結果が表示されたか。いろいろやっているうちにどのようなことが予想されてきたか。その予想を確かめようとして、どのようなことをしたか。その予想が正しいことを、どのような理由で確信したか。あるいは、その予想が誤りであることを、どのようにして分かったか。あるいは、どのようなことが原因で、その予想の真偽を確かめることができなかったか。などなど、各自の思考の経過をまとめればよいのです。予想が正しいと確信できるときは、その証明も考えてみてください。

(1) $(x+1)^n$ の展開

基本画面 [HOME] の展開 [F2] 3(expand) を利用して、$(x+1)^n$ の展開を、できるだけ多くの自然数 n について行い、その結果を書き写してください。そして、この展開式の係数の間に成り立つ一般的な規則性を、できるだけ多く見つけてください。できれば、その証明も考えてみてください。$(x+1)^3$ を数ナビで展開するには、「factor((x+1) [∧] 3) [ENTER] 」です。

(2) x^n-1 の因数分解

基本画面 [HOME] の因数分解 [F2] 2(factor) を利用して、x^n-1 の因数分解を、できるだけ多くの自然数 n について行い、その結果を書き写してください。ただし、複素数の範囲の因数分解 (cfactor) は考えないものとします。そして、因数分解された式の形に、何かの規則性がないかどうかを考えてください。規則性に気がついたら、何故そうなるかという証明も考えてみてください。数ナビで x^3-1 を因数分解させるには、「factor(x [∧] 3−1) [ENTER] 」です。

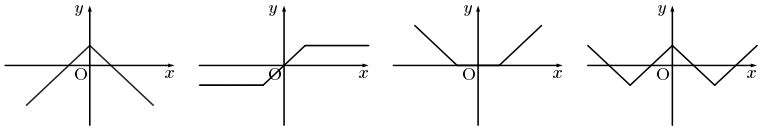
(3) 繁分数の値

次の繁分数の値を求めてみてください。そして、同様のことをもうちょっと続けてください。そして、一般に、どのような値になるかを考えてください。たとえば、3 番目の値の場合は、「1/(1+1/(1+1/(1+1)))」となります。数ナビで確認するときは、括弧の対応関係に注意してください。

$$\frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

(4) 絶対値関数のグラフ

$y=|x|$ のグラフは、数ナビでは [♦] [F1] で、たとえば $y1=\mathrm{abs}(x)$ として入力します。abs は [alpha] を利用します。$y=|x|$ は、$x \geqq 0$ のときは $y=x$ であり、$x<0$ のときは $y=-x$ です。$y1$ には適当な関数を定義し、$y2=\mathrm{abs}(y1(x))$ として [♦] [F3] でグラフを描画させてください。そのとき、[♦] [|] で Leading Cursor を ON にした方がグラフが分かりやすいです。$y1$ にいろいろな関数を定義してみて、一般に $y=f(x)$ と $y=|f(x)|$ のグラフの間にはどのような関係があるかを考えてください。また、絶対値を利用すると、次のようなグラフを描くことができます。それぞれ、どのような関数でしょうか？ また、絶対値を利用して、もっとおもしろいグラフはできないでしょうか。



《基礎数学 I》夏期休業「自由研究」の解説

(1) $(x+1)^n$ の展開

基本画面 HOME の展開 F2 3(expand) を利用して、$(x+1)^n$ の展開を、できるだけ多くの自然数 n について行い、その結果を書き写してください。そして、この展開式の係数の間に成り立つ一般的な規則性を、できるだけ多く見つけてください。できれば、その証明も考えてください。

解説　まず、できるだけ多くの n について、その展開式を書き出すことが必要です。$(x+1)^n$ の展開式の係数の間には、実に多くの性質があります。それを、どれだけ見つけることができたでしょうか？ なお、このような式の展開式は、一般に**二項定理**と呼ばれています。

総評　半数以上の人 (72 名) がこの課題を選択しました。この課題を選択した大部分の人が $(x+1)^n$ の展開式の「最大次数の項は n 次である」「最後は 1 である」「次数が 1 つずつ小さくなる」「係数は左右対称である」「n が奇数のときは中央に同じ係数がある」などということに気づきました。「x^{n-1} と x の係数はいずれも n である」ことにも多くの人が気づいています。他にも、以下にみるように、多くの特徴があります。なお、S 科は、授業時間数の関係から授業中にこの課題をやったので、S 科の人はこの課題以外を選択しています。

この課題を選択しなかった人は、以下の展開式をみてください。どのようなことに気がつくでしょうか。

$$
\begin{aligned}
(x+1)^1 &= x+1\\
(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\
(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\
(x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1\\
(x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\\
(x+1)^6 &= x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1\\
(x+1)^7 &= x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1\\
(x+1)^8 &= x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1\\
(x+1)^9 &= x^9+9x^8+36x^7+84x^6+126x^5+126x^4+84x^3+36x^2+9x+1
\end{aligned}
$$

指摘された事柄　★印の箇所は、私の解説です。

- 左から 3 番目の項 (x^{n-2}) の係数は $\frac{1}{2}n(n-1)$ である。[M] 千田、
  左から 3 番目の項の係数は、左から 2 番目の項の係数を $\frac{1}{2}(n-1)$ 倍したものである。
  [E] 夏目
- $(x+1)^n$ の展開式の x^2 の係数は、$(x+1)^{n-1}$ の展開式の x^2 の係数に $n-1$ を足したものである。[C] 川又
- $(x+1)^n$ の展開式に含まれる x の数 (展開式の x^k の指数 k の和) は、$(x+1)^{n-1}$ の展開式の x の数と n の和である。[C] 高橋慶 (31)
  - ★ たとえば、$(x+1)^4$ の展開式に含まれる x の数は、$4+3+2+1=10$ であるが、これは $(x+1)^3$ の展開式に含まれる x の数 $3+2+1=6$ と $(x+1)^4$ の指数 4 との和である。
  - ★ この和は、具体的には、n が 1 から順に、1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,$\cdots$ である。
- 上述の和は、$(x+1)^n$ の x^2 の係数になっている。[C] 高橋慶 (31)
- $(x+1)^n$ の左から 3 番目の項の係数は、$(x+1)^{n-1}$ の左から 3 番目の項の係数に $n-1$ を加えたものである。[C] 佐々木歩
  - ★ たとえば、$(x+1)^5$ の左から 3 番目の $10x^3$ の係数 10 は、$(x+1)^4$ の左から 3 番目の項の係数 6 に $5-1=4$ を加えたものである。
- 前の展開式の隣り合う項 (x^k と x^{k-1}) の係数の和は、次の展開式の x^k の係数である。

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

[M] 熊谷尚、佐々木信、佐々木翼、津田、[E] 井上、熊谷美、鹿野、狩野、佐藤雄、佐々木康、島津、鈴木晶、似内、照井、[C] 阿部、熊谷和、佐々木佳、菅原健

- ★ 理由は、たとえば $(x+1)^3$ の展開式に $x+1$ を掛けて $(x+1)^4$ の展開式を自分で計算してみてください。どのような部分で 2 つの和が出てくるかが分かるでしょう。

- 上述と同じ内容であるが、前の展開式の左から k 番目の項の係数と、次の展開式の左から k 番目の項の係数との差は、前の展開式の左から $k-1$ 番目の項の係数である。[M] 祝田
  - ★ たとえば、$(x+1)^4$ の展開式の 3 番目の項の係数 6 と、$(x+1)^5$ の展開式の 3 番目の項の係数 10 の差 4 は、$(x+1)^4$ の展開式の 2 番目の項の係数である。
- x^m を左半分の項とすると、その係数は x^{m+1} の係数を $\frac{1}{n-m}$ 倍して $m+1$ をかけたものである。[E] 千葉達
  - ★ たとえば、$(x+1)^9$ の展開式の x^7 の係数は、x^8 の係数 9 に対して、$9\times\frac{1}{9-7}\times(7+1)=36$
- 左から数えて k 番目の項の係数と指数をかけて k で割ると、次の項の係数になる。
  [M] 津田、[E] 鈴木晶、
  - ★ たとえば、$(x+1)^4$ の展開式の 2 番目の項 $4x^3$ では $4\times3\div2=6$ が 3 番目の項の係数
  - ★ このことを発展させると、$(x+1)^n$ の展開式の係数をすべて求めることができます。最初は x^n です。これは左から数えて 1 番目なので、その次は $n\times1\div1=n$ が 2 番目 x^{n-1} の係数です。そして、係数 × 指数 ÷ 番目 $=n\times(n-1)\div2=\frac{n(n-1)}{2}$ が 3 番目 x^{n-2} の係数です。そして、$\frac{n(n-1)}{2}\times(n-2)\div3=\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}$ が 4 番目 x^{n-3} の係数です。以下、これを繰り返していけばよいわけです。5 番目の係数は $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3\cdot4}$ です。たとえば、$n=5$ のときの 5 番目は $5x$ ですが、この係数 5 は、$\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{2\cdot3\cdot4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4}=5$ として得られます。
- 係数が最大になるのは、次数が $\frac{n}{2}$ のときである。$\frac{n}{2}$ が小数のときは、その前後の整数のときである。たとえば、$n=6$ のときは x^3 の項の係数が最大であり、$n=5$ のときは $\frac{5}{2}=2.5$ の前後の x^2, x^3 の項の係数が最大になる。[E] 夏目、千葉達
  n が偶数のときは次数が $\frac{n}{2}+1$ のときの係数が最大になる。n が奇数のときは次数が $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ (小数点以下切り上げ) のときの係数が最大になる。[C] 昆
- n が偶数のときは、中心の項の係数が最大になる。[E] 狩野
- n が奇数 $2k+1$ のとき、係数が最大になるのは $n-k$ のときである。[C] 川又、高橋顕
  - ★ たとえば、$n=9$ のとき、$9=2\cdot4+1$ であるので、$k=4$ であるから $n-k=9-4=5$ である。x^5 の係数が最大である。
- n が偶数のときの項の数は奇数、n が奇数のときの項の数は偶数である。
  [M] 祝田、千田裕、[C] 高橋亜
- n が 1 つ増えると、展開式の項の数も 1 つ増える。[M] 千葉亮
- x を含む項の数は n 個である。[C] 尾崎、滝浦
- $(x+1)^n$ の係数の和は 2^n である。[C] 熊谷建
- 展開式の項の数は $n+1$ 個である。[M] 祝田、菅原寛、山口、[E] 井上、鹿野、佐藤裕、千葉達、[C] 相原、熊谷建、昆、佐々木翔、澤口、菅原健、高橋慶 (31)、那須
- 中央にいくほど、係数は大きくなる。[M] 千田裕、[E] 藤田
- 中央から離れるにつれ、係数は小さくなる。[M] 木戸

- 係数は中央に行くほど大きくなり、中央から離れるほど小くなる。[E] 加藤健、夏目、
- n が 1,2 のとき、3,4 のとき、5,6 のときというように、n が 2 つ増えるごとに同じ係数の組の数が増えていく。[M] 祝田

誤った指摘

- n が素数のとき、$(x+1)^n$ の展開式の 1 以外の係数は、n の倍数である。
  - ⋆ もっと大きな素数について調べてみてください。必ずしも倍数ではない係数が現れます。

(2) x^n-1 の因数分解

基本画面 HOME の因数分解 F2 2(factor) を利用して、x^n-1 の因数分解を、できるだけ多くの自然数 n について行い、その結果を書き写してください。ただし、複素数の範囲の因数分解 (cfactor) は考えないものとします。そして、因数分解された式の形に、何かの規則性がないかどうかを考えてください。規則性に気がついたら、何故そうなるかという証明も考えてみてください。

解説　まず、多くの自然数 n について x^n-1 を因数分解した式を書き出してみることが必要です。自然数 n と因数分解された式との関係を眺めていると、幾つかの特徴的なことに気がついてくるでしょう。

総評　この課題を選択した人は 50 名でした。「$x-1$ が含まれる」「n が偶数のときは $(x-1)(x+1)$ が含まれる」というようなことについては、ほぼ全員が気がついています。それ以外にも、次のようなことに気がついている人がいます。また、証明を試みている人もいます。

この課題を選択しなかった人は、以下の式を眺めてみてください。n と因数分解された式との間の関係について、どのようなことに気がつくでしょうか。

$$
\begin{aligned}
x^1-1&=x-1\\
x^2-1&=(x-1)(x+1)\\
x^3-1&=(x-1)(x^2+x+1)\\
x^4-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1)\\
x^5-1&=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^6-1&=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\\
x^7-1&=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^8-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\\
x^9-1&=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\\
x^{10}-1&=(x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\\
x^{11}-1&=(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^{12}-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}
$$

指摘された事柄　　⋆印の箇所は、私の解説です。

- n が素数のときは、$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ である。
  [M] 今野、境、佐藤真、千葉俊、花坂、[S] 池淵、石川朋、及川貴、菊池和、須藤、千葉健、村上、山口、[C] 佐藤弘、村上、山口
  素数のときは、2 つの式の積に因数分解される。
  [M] 境、千葉俊、[E] 伊藤龍、[C] 石川、佐藤大
- p を素数として $n=2p$ のときは、
  $$x^{2p}-1=(x-1)(x+1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)(x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots+x-1)$$
  という形である。[M] 境
  - ⋆ p が素数のとき、$x^{2p}-1=(x^p-1)(x^p+1)$ であり、$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1)$ である。素数 p は奇数なので x^p+1 は $x-1$ を因数にもつ。同様に考えると $x^p+1=(x+1)(x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots+x-1)$ である。
- n が 3 の倍数のときは、x^2+x+1 が必ず含まれる。
  [M] 境、[E] 伊藤龍、佐藤真、[S] 佐々木恭、千葉一、村上、三上、[C] 石川、村上
  $x^{3n}-1=(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)$ である。[C] 石川
  - ⋆ $x^{3n}-1$ のタイプのとき $x^3=X$ とおくと $x^{3n}-1=(x^3)^n-1=X^n-1$ であるので、これは $X-1$ を因数にもつ。$X-1=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ であるので x^2+x+1 が必ず含まれる。
- n が 4 の倍数のときは、$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ が必ず含まれる。
  [E] 伊藤龍、佐藤真、[S] 菊池和、佐々木恭、鈴木、千葉一、三上、[C] 石川、村上
  - ⋆ $x^{4n}-1$ のとき $x^4=X$ とおくと $x^{4n}-1=(x^4)^n-1=X^n-1$ である。これは $X-1$ を因数にもつ。$X-1=x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ であるので、上記のことは正しい。
- n が 5 の倍数のときは、$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ が含まれる。
  [M] 皆川、[E] 佐藤真、[S] 佐々木恭、鈴木、三上、[C] 石川、村上
  - ⋆ $x^{5n}-1$ のタイプのとき $x^5=X$ とおくと $x^{5n}-1=(x^5)^n-1=X^n-1$ である。これは $X-1$ を因数にもつ。$X-1=x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+1)$ であるので、上式は正しい。
- n が 6 の倍数のときは、x^2-x+1 が必ずある。
  [M] 境、[S] 佐々木恭、鈴木、三上、[C] 石川、村上
  - ⋆ $X=x^6$ とおくと、$x^{6n}-1=(x^6)^n-1=X^n-1$ であるので、この式は $X-1=x^6-1$ を必ず因数に持つ。$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$ であり、$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるので、x^2-x+1 が必ず含まれる。
- n が 7 の倍数のときは、$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ が必ずある。
  [S] 佐々木恭、鈴木、三上、[C] 村上
  - ⋆ $X=x^7$ とおくと、$x^{7n}-1=(x^7)^n-1=X^n-1$ であるので、この式は $X-1=x^7-1$ を必ず因数に持つ。$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ であるので、上記のことは正しい。
- n が 8 の倍数のときは、x^4+1 が必ずある。[S] 三上、[C] 村上
  - ⋆ $X=x^8$ とおくと、$x^{8n}-1=(x^8)^n-1=X^n-1$ であるので、この式は $X-1=x^8-1$ を必ず因数に持つ。$x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)$ であるので、上記のことは正しい。
- n が 9 の倍数のときは、$(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ が必ずある。[S] 石川朋、[C] 村上
  - ⋆ $X=x^9$ とおくと、$x^{9n}-1=(x^9)^n-1=X^n-1$ であるので、この式は $X-1=x^9-1$ を必ず因数に持つ。$x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ であるので、上記のことは正しい。
- n が 10 の倍数のときは、$(x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ が必ずある。[C] 村上
  - ⋆ $X=x^{10}$ とおくと、$x^{10n}-1=(x^10)^n-1=X^n-1$ であるので、この式は $X-1=x^{10}-1$ を必ず因数に持つ。$x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1)$ であり、$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1), x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ であるので、上記のことは正しい。
- 指数が nm の形の式は、x^m-1 を因数にもつ。[E] 久保田
  - ⋆ $X=x^m$ とおくと、$x^{nm}-1=(x^m)^n-1=X^n-1$ なので、X^n-1 は $X-1$ を因数にもつ。つまり、$x^{nm}-1$ は x^m-1 を因数にもつ。
- 指数が 2^n のときは、$x^{2^n}-1=(x-1)(x+1)\underline{(x^2+1)(x^4+1)\cdots}$ となり、下線部は $n-1$ 個の積である。[M] 今野、境、佐藤真、花坂、[S] 千葉健
  $x^{2^n}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)$ である。[E] 菊池和、菊池吉、遊佐

- $x^{2^n}-1$ の因数分解の式で、因数の数は $n+1$ 個である。[S] 遊佐
  - ⋆ $x^{2^n}-1=(x^{2^{n-1}}-1)(x^{2^{n-1}}+1)$ であるので、$x^{2^{n-1}}-1$ に関して同様のことを続けていけば、最後は $(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ のところまで因数分解できる。
- 指数が 3^n のときは、$x^{3^n}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)\cdots$ の形である。[M] 境
- 因数分解した式の $x-1$ 以外の項をまとめると $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ になる。[S] 三上、遊佐
- n の約数の数と、因数分解された式の因数の数とは一致する。[S] 山口、[C] 山口
  - ⋆ たとえば、$n=6$ のとき、12 の約数は 1,2,3,6 の 4 個あり、x^6-1 の因数の数も 4 個ある。
    $$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$
- 指数 n の約数 k を指数として x^k-1 を考えると、x^n-1 を因数分解した式には、x^k-1 の因数分解した式が含まれている。[C] 山口
- 因数分解された式の最高次数の和は n である。[M] 千葉俊、[S] 石川雄、村上、山口、[C] 佐藤大、山口
- 因数分解した全ての項の最後の数は 1 である。[S] 石川雄
- 一般的な形で証明を試みた人。[S] 村上、三上

誤った指摘

- n が奇数のときは $(x-1)(x^2+x+1)$ が含まれる。
  - ⋆ x^5-1 では含まれていません。
- n が偶数のときは $x^{2n}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{\frac{n}{2}}+1)$ である。
  - ⋆ x^6-1 の因数分解では、この式はあてはまりません。
- n が奇数のときは、$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$ の形になる。
  - ⋆ x^9-1 は、この形ではありません。$(x-1)$ 以外の項をまとめると、この形になります。それまでに得られた結果から予想したときは、それが正しいかどうかもっと別な値に対して確認することが必要です。
- n が 8 の倍数のときは、$x^2+1, x^4+1, x^6+1, \cdots$ のような因数の積になる。
  - ⋆ $x^{24}-1$ ではあてはまりません。指数が 2^n の形であることが必要です。
- 予想をたてて、他の n についてもその予想が正しいことを確認することにより「証明した」としている人が多数いましたが、それは予想が正しいことの可能性が高まっただけで証明とはいえません。

(3) 繁分数の値

次の繁分数の値を求めてみてください。そして、同様のことをもうちょっと続けてください。そして、一般に、どのような値になるかを考えてください。たとえば、3 番目の値の場合は、「$1/(1+1/(1+1/(1+1)))$」となります。数ナビで確認するときは、括弧の対応関係に注意してください。

$$\frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

解説　まず、指定された値をできるだけ多く計算してみることが必要です。簡単な分数にすると、次のような値が出てきます。単純に 1 だけからなる式なのですが、この値を眺めていると幾つかの特徴的なことがあるのです。

総評　この課題を選択した人は 32 名で、ほぼ全員が分子と分母の和が次の分数の分母であることに気がつきました。そして、他にも多くの特徴に気づいています。

この課題を選択しなかった人は、つぎの分数をながめて見てください。どのような特徴に気がつくでしょうか。

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \frac{144}{233},\ \frac{233}{377},\cdots$$

指摘された事柄　⋆印の箇所は、私の解説です。

- 分母が、次の分数の分子になっている。つまり、次の式で計算される値が続いている。[多数]
  $$\frac{\text{前の分数の分母}}{\text{前の分数の分子}+\text{分母}}$$
- 分子と分母の差は、前の分数の分子である。つまり、$\frac{b}{a}$ の 1 つ前の分数は $\frac{a-b}{b}$ である。[S] 荒木、及川誠
- 全員が気づいた特徴と上記の特徴を合わせると、最初の分数 $\frac{1}{2}$ が分かるだけで、他の分数を次々に求めることができる。[M] 菅原歩、[S] 斉藤慎、佐々木美、千葉隼
- 隣りあう 2 つの分数の分子の和と、分母の和は、その次の分数の分子と分母になっている。(たとえば、$\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{5}$ では、$2+3=5,\ 3+5=8$ が、次の分数 $\frac{5}{8}$ である。) [M] 佐藤晃
  上記の理由により、最初の 2 つの値が分かれば、次々と値を求めることができる。[M] 佐藤晃
- それぞれの分数の分母にある $1+\cdots$ の $\cdots$ の部分は、1 つ前の分数の式と同じ式である。したがって、たとえば $\frac{8}{13}$ の次の分数は次のように求められる。[M] 佐藤一、[S] 千葉鷹
  $$\frac{1}{1+\dfrac{8}{13}}=\frac{13}{13+8}=\frac{13}{21}$$
  - ⋆ $\frac{A}{B}$ の次の分数は、$\frac{1}{1+\frac{A}{B}}=\frac{B}{A+B}$ となる。分母と分子の和が次の分数の分母になること、分母が次の分数の分子になることは、このことから明らかである。
- 分子と分母の和が次の分数の分母になるということは、1 以外の自然数では成立しない。[S] 佐々木美、須藤
  (2 にした場合)　$\frac{4}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{14}{19},\ \frac{19}{26},\ \frac{52}{71},\cdots$
  (3 にした場合)　$\frac{6}{7},\ \frac{7}{9},\ \frac{27}{34},\ \frac{34}{43},\ \frac{129}{163},\cdots$
- 1 の代わりに自然数 a で考えると、最初の値は a がどんな値でも $\frac{1}{2}$ である。[S] 金澤
  - ⋆ $\frac{a}{a+a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$
- 1 以外の自然数 a で考えると、分母が次の分数の分子になることと、分母の a 倍が次の分数の分子になることが交互におきる。[S] 金澤、須藤
- 1 以外の自然数 a で考えると、前の分数の分母が次の分数の分子になっているとき、前の分数の分母の a 倍と分子の和が次の分数の分母になり、前の分母の $a+1$ 倍と分子の和は、2 つ目の分数の分母になる。[S] 須藤
- 数の大小を比較すると、奇数番目の値はその前後の値より小さく、偶数番目の値はその前後の値より大きい。つまり、次のような状況になっている。[S] 千葉隼
  $$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}>\frac{3}{5}<\frac{5}{8}>\frac{8}{13}\cdots$$

- このことを、分数ではなく小数で書き表してみると、さらに別なことがうかびあがってきます。

$$\frac{1}{2}=0.5,\ \frac{2}{3}=0.666666,\ \frac{3}{5}=0.6,\ \frac{5}{8}=0.625,\ \frac{8}{13}=0.6153846,\ \frac{13}{21}=0.6190476$$
$$\frac{21}{34}=0.6176471,\ \frac{34}{55}=0.6181818,\ \frac{55}{89}=0.61797753,\ \frac{89}{144}=0.6180556,\ \frac{144}{233}=0.61802575$$

  ⋆ このように、小数に直してみると、数値がだんだんある値に近づいていくことが予想できます。無限に続けていったとき、どのような値に近づくでしょうか？ ずっと先の値を x とすると、その値の次の値 $\frac{1}{1+x}$ は x とほとんど同じになることが予想されます。つまり、ずっと先の方では $\frac{1}{1+x}=x$ であることが予想されます。この式は $x^2+x-1=0$ なので 2 次方程式の解の公式より $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られ、$x>0$ なので $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.6180339887\cdots$ となります。

- 1 だけではなく、どこか 1 箇所を 2 にしても類似の規則性がある。[S] 阿部み
  ⋆ 以下のタイプで、同様のことを考えてみてください。$\frac{2}{1+\frac{1}{1+1}}$, $\frac{1}{2+\frac{1}{1+1}}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}$
- n 番目の繁分数の、分数の横線の数は n 本である。[S] 柿岡
- 数ナビで入力するとき、「/(1+1)」が 1 つずつ増えていく。[M] 菅原歩

誤った指摘

- 値はだんだん大きくなる。
  ⋆ $\frac{1}{2}=0.5,\ \frac{3}{5}=0.6,\ \frac{5}{8}=0.625,\ \frac{8}{13}=0.61538$ であるので、単純な増加ではない。

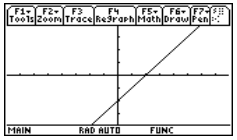
(4) 絶対値関数のグラフ

$y=|x|$ のグラフは、数ナビでは ♦ F1 で、たとえば $y1=\mathrm{abs}(x)$ として入力します。abs は alpha を利用します。$y=|x|$ は、$x\geqq 0$ のときは $y=x$ であり、$x<0$ のときは $y=-x$ です。$y1$ には適当な関数を定義し、$y2=\mathrm{abs}(y1(x))$ として ♦ F3 でグラフを描画させてください。そのとき、♦ | で Leading Cursor を ON にした方がグラフが分かりやすいです。$y1$ にいろいろな関数を定義してみて、一般に $y=f(x)$ と $y=|f(x)|$ のグラフの間にはどのような関係があるかを考えてください。

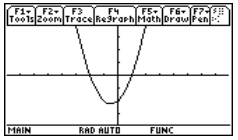
解説　この課題を選択した人は [M] 伊藤一、[E] 菊地邦、[C] 加藤仙、佐々木友の 4 人だけでした。絶対値 $|x|$ の定義は、$x\geqq 0$ のときは $|x|=x$ で、$x<0$ のときは $|x|=-x$ ということですから、$y=|f(x)|$ は、$f(x)\geqq 0$ のときは $y=|f(x)|=f(x)$ であり、$f(x)<0$ のときは $y=|f(x)|=-f(x)$ ということです。$f(x)\geqq 0$ ならグラフは x 軸より上側にあり、$f(x)<0$ ならグラフは x 軸の下側にあることに注意すると、要するに、$y=f(x)$ のグラフで、x 軸より上側にある部分はそのままにして、x 軸より下側にある部分は符号を反対にして x 軸より上側になるようにしたものが $y=|f(x)|$ のグラフです。このことを、いろいろな関数のグラフを見るなかで実感させようとするのが、この課題のねらいでした。

総評　残念ながら、上記の「ねらい」を明確に認識できたと思われる人はいませんでした。伊藤と菊地が気づいたかもしれませんが、記述されている文面からは読みとれませんでした。気づけなかった理由は、いろいろな関数を試していますが、関数のグラフをまだ学習中のせいか、ax, ax^2, ax^3 などのような単純な関数しか試していないことにあるようです。$ax+b$, ax^2+bx+c などについてもやってみれば、上記の「ねらい」に容易に気づいたと思われます。

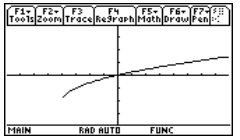
この課題を選択しなかった人は、たとえば、次のグラフをみてください。$y=f(x)$ のグラフに対して、その絶対値をとった関数 $y=|f(x)|$ のグラフがどのような関係になっているか、一目瞭然ではないでしょうか。そして、その理由は、負になるときは符号を変えて正になるようにするという絶対値の定義から明かではないでしょうか。



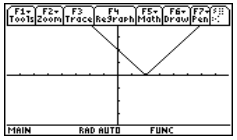
$y=x-2$



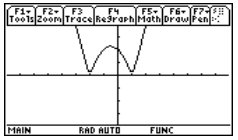
$y=x^2+x-2$



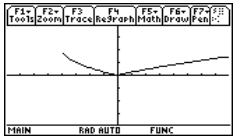
$y=\sqrt{x+4}-2$



$y=|x-2|$



$y=|x^2+x-2|$



$y=|\sqrt{x+4}-2|$

指摘された事柄　⋆印の箇所は、私の解説です。

- $f(x)=x^2, x^4, x^6$ のとき、$y=|f(x)|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと一致し、$y=-|f(x)|$ のグラフは $y=-f(x)$ のグラフと一致する。[M] 伊藤
- $f(x)=x, x^3, x^5$ のとき、$y=|f(x)|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフのマイナスの部分をプラス側にしたグラフであり、$y=-|f(x)|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフのプラスの部分をマイナス側にしたグラフである。[M] 伊藤
- $y=|x-p|+q$ のグラフは、$y=|x|$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したグラフである。[M] 伊藤
- $y=x^n$ のグラフの $y<0$ の部分は、$y=|x^n|$ では逆にプラスになる。[E] 菊地
- $y=|ax|$ のグラフは、a の値が大きくなると幅がせまくなり、a の値が小さくなると広くなる。[C] 加藤
- $y=|\tan(x)|$ のグラフがおもしろいと思う。[C] 加藤
  ⋆ $\tan(x)$ は、後期に学ぶ三角関数です。
- 例題で提示されたグラフの関数は、[C] 佐々木

絶対値に関する重要な注意

数ナビで絶対値を含む関数のグラフを表示させるとき、ちょっと気をつけてもらいたいことがあります。無理関数と絶対値を両方含む関数を表示させるときは、| を利用して、その**関数の定義域も明示する**ようにしてください。たとえば、数ナビで $y1(x)=|\sqrt{x+4}-2|$ のグラフを表示させると、$x<-4$ の部分のグラフも表示してきます。そのグラフをみて納得してはいけません！$x+4<0$ の部分は表示されるべきではありません。数ナビは複素数の計算もできるために、$x<-4$ のとき、たとえば $x=-5$ のときは $y=|\sqrt{-5+4}-2|=|\sqrt{-1}-2|=|i-2|=|-2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ を計算してしまうのです。これは、数ナビ設計上の仕様です。したがって、このようなときは、「$y1(x)=\mathrm{abs}(\sqrt{x+4}-2)$ | $x>-4$」として、定義域を明示するようにしてください。

《基礎数学 I》演習問題

以下の問題と自由研究をレポート用紙に回答して、**11 月 19 日 (金) まで**に提出せよ。

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の方程式を解け (p.35–39)。解の確認は数ナビの F2 1:solve を利用。例) solve($x^2-x-2=0, x$)
(5)〜(8) は、solve($x+y=1$ and $2x-y=3$, $\{x,y\}$) のように、式を「 and 」で区切る。最後は、変数を中括弧 { } で囲む。and の前後の空白は alpha (–)

(1) $x^3-3x-2=0$　　(2) $x^3-2x^2-3x+6=0$

(3) $x^4-3x^3-x^2+5x+2=0$　　(4) $x^4+2x^3-3x^2-4x-12=0$

(5) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=7+xy \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x^2-xy-y^2+1=0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+3y-z=-4 \\ 4x-y+3z=0 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 2x-y+3z=7 \\ x+y-z=4 \\ 2x+3y-4z=8 \end{cases}$

(9) $\sqrt{x-4}=6-x$　　(10) $\sqrt{3x-5}=2x-10$

(11) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$　　(12) $\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{x}{2(x+2)}=\dfrac{1}{x-2}$

2 次の式が恒等式となるように、定数 a,b,c の値を定めよ (p.40)。
[Hint] (1)(2) は右辺を展開して左辺の係数と比較する。(3)(4) は分母を払う。

(1) $3x-2=a(x-2)+b(x-1)$　　(2) $3x^2-8x+9=a(x+2)^2+b(x+2)+c$

(3) $\dfrac{3x-7}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-1}$　　(4) $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

3 次の等式を証明せよ (p.41)。いずれも「証明の仕方」に注意すること。

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$　　両辺を別々に展開

(2) $x+y=1$ のとき、$x^2+y=y^2+x$　　$y=\cdots$ に直して代入

(3) $a+b+c=0$ のとき、$a^3+b^3+c^3=3abc$　　$c=\cdots$ にして代入

(4) $a:b=c:d$ のとき、$\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{cd}{c^2+d^2}$　　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと、$a=bk, c=dk$

4 次の不等式を解け (p.46–52)。負数で割るときの不等号の向きに注意すること。
[Hint] (5)〜(8) は個々の解の共通部分を数直線を利用して求める。(9)(10) は因数分解して表を作成する。

(1) $2x+3>-4x+7$　　(2) $-2(x-3)\leqq 5(x+1)$

(3) $x^2-2x-8>0$　　(4) $2x^2-2x-1<0$

(5) $\begin{cases} 2x+4<6x-1 \\ 3x+5\geqq 6x-4 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 2(x-1)<4x-3 \\ x+8>3(x-2) \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x+1>3x-1 \\ x^2-x-6<0 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 2x+1<4x-2 \\ x^2-2x-2<0 \end{cases}$

(9) $x^3-2x^2-5x+6<0$　　(10) $x^3+2x^2-x-2>0$

5 次の不等式を証明せよ (p.52)。不等式の「証明の仕方」に注意する。
[Hint] 基本的には 左辺 − 右辺 $\geqq 0$ を示す。(4) は相加平均 $\geqq$ 相乗平均を利用してもよい。

(1) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$　　(2) $a^2+b^2\geqq 2(a-b-1)$

(3) $a>0$ のとき、$\dfrac{1}{1+a}>1-a$　　(4) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4,\qquad (a>0, b>0)$

6 全体集合を $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ とし、$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$ とするとき、次の集合を求めよ (p.54)。個々の記号の意味について、確認しておくこと。

(1) $A\cap B$　　(2) $A\cup B$　　(3) $\overline{A}$

(4) $\overline{B}$　　(5) $A\cup\overline{B}$　　(6) $\overline{A}\cap B$

7 全体集合 U を実数全体とし、$A=\{x|-2<x<5\}$、$B=\{x|-3\leqq x\leqq 3\}$ とするとき、次の集合を求めよ (p.54)。

(1) $A\cap B$　　(2) $A\cup B$　　(3) $\overline{A}$

(4) $\overline{B}$　　(5) $A\cap\overline{B}$　　(6) $\overline{A}\cup B$

8 集合 A, B について、$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A\cap B=\{2,3,6\}$, $A\cap\overline{B}=\{1,8\}$ であるとき、A, B を求めよ (p.54)。

9 次の命題の逆、裏、対偶を述べ、それぞれの真偽を述べよ (p.59)。

(1) $a=1$ ならば $a^2=1$　　(2) $a>b$ ならば $a^2>b^2$

(3) n が 6 の倍数ならば n は 3 の倍数である　　(4) 対角線の長さが等しい四角形は長方形である

10 次の命題の対偶を書き、その真偽を述べよ (p.59)。「かつ」と「または」の否定がどうなるかに注意すること。

(1) 実数 x,y について、$x+y>0$ ならば、$x>0$ または $y>0$ である。

(2) $a=0$ または $b=0$ ならば、$ab=0$ である。

11 次の空欄に、必要、十分、必要十分のいずれかを入れて文を完成させよ (p.58)。

(1) $x=3$ は、$x^2-5x+6=0$ であるための、＿＿＿＿＿条件である。

(2) $x^2=1$ は、$x=1$ であるための＿＿＿＿＿条件である。

(3) 整数 m,n が奇数であることは、m, n が奇数であるための＿＿＿＿＿条件である。

(4) $x^2=y^2$ は、$x=y$ であるための＿＿＿＿＿条件である。

(5) $x=y=1$ は、$xy=1$ であるための＿＿＿＿＿条件である。

数ナビを利用した自由研究

2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ は、$y=ax^2+bx+c$ のグラフを利用すると、グラフと x 軸との上下関係を見ることにより、x 軸との共有点の座標が分かれば不等式の解は簡単に求めることができる。同様に考えると、3 次不等式 $x^3+ax^2+bx+c>0$, $x^3+ax^2+bx+c<0$ は、$y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフが分かれば、簡単に解が分かると思われる。そこで、

> 3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフは、a,b,c がどのようなときに、どのようなグラフになるかを数ナビを利用して調べよ。

$y=x^3+ax^2+bx+c$ を考えるとき、3 つの係数 a,b,c を同時に変化させるのも大変なので、$y=x^3+ax^2$, $y=x^3+bx$, $y=x^3+c$ などについて調べて、少しずつ係数の数を増やしながら考察することもできる。係数 a,b,c は、グラフのどのような変化と関連しているのか。軸との共有点はどのようなときか。共有点の数は、a,b,c の値のあり方によりどのように変わるか。グラフの山や谷の頂点の座標を a,b,c の式で表せないか。放物線では $y=ax^2$ を平行移動するだけであった。3 次関数について同様のことを考えることはできるか。グラフの対称性について何か特徴はないか、などなど、いろいろグラフを表示させる中で、各自の関心を持った部分について考察せよ。

まとめ方としては、各自がどのような問題意識をもったか。それに対して、数ナビにどのようなグラフを表示させ、それを見て何を思い、どのようなことを予想し、その予想をどのようにして確かめたか。というような、各自の思考の経過をまとめればよい。なお、a,b,c は整数とは限らない。

最後には、自由研究に取り組んだ正味時間と感想も書き添えてください。

《基礎数学 I》「自由研究」(秋季課題) の解説

[課題] 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフ

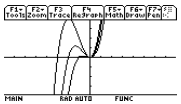
3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフは、係数 a, b, c がどのようなときに、どのようなグラフになるかを調べよ。

解説　3 次関数のグラフをいろいろ表示させてみることにより、各係数の意味を感覚的につかんでほしい、ということを意図した課題でした。プリントに幾つかの考え方を示したように、$y = x^3 + ax^2$, $y = x^2 + bx$, $y = x^3 + c$ の 3 つのグラフの特徴をまず考えるか、あるいは $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ の係数 a, b, c のうち、2 つの係数を固定して 1 つの係数だけを変化させてみると、各係数の意味について何らかの「気づき」を得ることができた思われます。

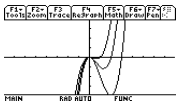
いきなり $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ に取り組んで、係数の値をやみくもに変えてみても、規則性のようなものは発見できないでしょう。問題を単純にして、係数を少しずつ変えながら考えていくとよいでしょう。何をすればよいのかを把握するためにも、「**問題文をよく読む**」ことが必要です。

[1] $y = x^3 + ax^2$ のグラフ

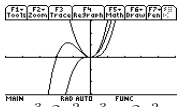
a の値を変えていけば、グラフがどのように変化していくかは明かでしょう。ただし、a の値を変えるとしても、正の方向だけではなく、負の方向にも変えてみることが必要です。



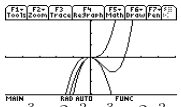
$a = 1, 2, 3$
図 1



$a = -1, -2, -3$
図 2



$x^3, 2x^2, x^3 + 2x^2$
図 3



$x^3, -2x^2, x^3 - 2x^2$
図 4

指摘された事柄

- a の値を変化させると、山や谷の部分が大きくなることには、多くの人が気づきました。曲線の揺れの幅が広くなる、狭くなるという形でも表現されています (図 1、図 2)。
- 原点と $(-a, 0)$ が x 軸との共有点であることに、多くの人が気づいています。
  - ⋆ 実際、x 軸との共有点では $y = 0$ なので、$x^3 + ax^2 = x^2(x + a) = 0$ より、$x = 0, -a$ となります。このような方程式を解く形で示した人は、[S] 遊佐です。
- グラフは、原点で x 軸に接する。[M] 千葉 (絢)
  - ⋆ 実際、上記のことから $x = 0$ は 2 重解です。
- a の値が 1 だけ増える（減る）ごとに、共有点の x 座標は 1 だけ減る（増える）。[E] 藤田
- a の値が 1 増えると、y の値は x^2 ずつ増加する。[S] 下川
  - ⋆ 実際、$x^3 + (a+1)x^2 - (x^3 + ax^2) = x^2$ です。
- $y = x^3 + ax^2$ と $y = x^3 - ax^2$ とが原点に関して対称なことも、多くの人が気がつきました。
  - ⋆ 実際、$f(x) = x^3 + ax^2$ は、$-f(-x) = -((-x)^3 + a(-x)^2) = x^3 - ax^2$ より原点に関して対称
- $y = -x^3 + ax^2$ のグラフは、$y = x^3 + ax^2$ のグラフと、y 軸に関して対称である。[S] 三上
  - ⋆ 実際、$f(x) = -x^3 + ax^2$ とおくと、$f(-x) = -(-x)^3 + a(-x)^2 = x^3 + ax^2$ である。
- グラフの対称の中心点の x 座標は、a が増えるにつれ減少する。[C] 長田
  - ⋆ 詳しくは 2 年の微分法で学びますが、対称の中心点の x 座標は $-\frac{a}{3}$ です。
- $a > 0$ のとき谷の頂点は原点にあり、$a < 0$ のとき山の頂点が原点にある。[E] 菅野、中村
- グラフは、a の値によらず、増加・減少・増加の順になっている。[E] 松田
- a を正の方に変化させると左側の山が大きくなるが右側の谷の部分はほとんど変わらない。反対に、a を負の方に変化させると右側の谷が大きくなるが左側の山の部分はほとんど変化しない。[M] 中川、[E] 阿部 (才)、伊藤 (龍)、太田、佐々木 (直)、佐々木 (康)、夏目、[S] 金澤

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

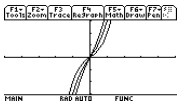
- $a > 0$ のときの山の頂点の座標は $\left(-\frac{2}{3}a, \frac{4}{27}a^3\right)$ である。[S] 遊佐
- $a = 0$ のときの共有点は原点だけである。[M] 佐々木 (信)
- $a > 0$ のときは $-a < x < 0$ と $x > 0$ の箇所で $y > 0$ であるが、$a < 0$ のときは $x > -a$ のときだけ $y > 0$ である。[M] 佐藤 (一)
- このグラフは、必ず、3 点 $(0, 0), (-a, 0), (-1, a-1)$ を通る。[C] 佐々木 (佳)
- 2 点 $(1, a+1)$, $(-1, a-1)$ を通る。[E] 久保田、三浦、[S] 菊池 (和)、遊佐
- y の値の増加・減少の境目の箇所は、$x = -\frac{2}{3}a$ のときである。[M] 境、[S] 齋藤
  - ⋆ これは正しい指摘です。2 年の微分法を利用すると、このことを簡単に導くことができます。
- $y = x^3 + ax^2$ において、$x = -a - 1$ のときの y の値は、$-(a+1)^2$ である。[S] 伊藤 (麻)
  - ⋆ 実際、$x = -a - 1$ のとき $y = (-a-1)^3 + a(-a-1)^2 = -(a^2 + 2a + 1) = -(a+1)^2$ である。
- $y = x^3 + ax^2$ のグラフを平行移動すると $y = x^3 - ax^2$ になる。[M] 佐藤 (一)
  - ⋆ どれだけ平行移動すればよいかも考えてみると、なお良かったです。$y = x^3 + ax^2$ を x 軸方向に $-2a/3$、y 軸方向には $-4a^3/27$ だけ平行移動すればよいのです。
- $y = x^3 + ax^2$ は偶関数でも奇関数でもないので、対称性はない。[S] 阿部 (み)
- $y = x^3$ のグラフと違い、$x < 0$ でも $y > 0$ となることがある。[S] 小野寺 (淳)

このようなグラフになる理由

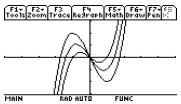
グラフの特徴をつかまえた後は、何故そのようなグラフになるのかを考えてほしかったと思います。$y = x^3 + ax^2$ は、$y = x^3$ と $y = ax^2$ との和になっているので、2 つのグラフを別々に描いてみれば理由が明かです。図 3 を見ると、$x < 0$ の側では $y = ax^2$ の $y > 0$ の部分と $y = x^3$ の $y < 0$ の部分とを加えることになるので、一時的にグラフが上方に引き上げられる形になるのです。図 4 は、その反対に、$x > 0$ の側では $y = x^3$ の $y > 0$ の部分が下方に引き下げられる形になっています。

[2] $y = x^3 + bx$ のグラフ

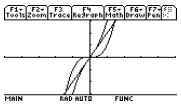
b の値を変えていけば、グラフがどのように変化していくかは明かでしょう。ただし、b の値を変えるとしても、正の方向だけではなく、負の方向にも変えてみることが必要です。



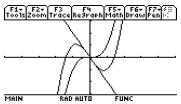
$b = 1, 2, 3$
図 5



$b = -1, -2, -3$
図 6



$x^3, 2x, x^3 + 2x$
図 7



$x^3, -2x, x^3 - 2x$
図 8

指摘された事項

- b を正の方に変化させていくと、グラフは直線にようになり y 軸に近づいていくこと (図 5)、そして b を負の方に変化させていくと山や谷の部分が大きくなっていくことには、多くの人が気づきました (図 6)。
- グラフが原点に関して対称であることにも、多くの人が気がつきました。
  - ⋆ 実際、$f(x) = x^3 + bx$ とおくと、$-f(-x) = -((-x)^3 + b(-x)) = x^3 + bx = f(x)$ となるので、原点に関して対称です。この証明を書いてきたのは次の人です。[M] 木戸、[S] 遊佐
- $y = -x^3 + bx$ のグラフは、$y = x^3 - bx$ のグラフと y 軸に関して対称である。[S] 三上
  - ⋆ 実際、$f(x) = -x^3 + bx$ とおくと、$f(-x) = -(-x)^3 + b(-x) = x^3 - bx$ である。

- x 軸との共有点の個数は、$b>0$ のときは 1 個、$b<0$ のときは 3 個である。
  [M] 佐々木 (尚)、千葉 (友)、橋本、[S] 菊地 (泰)
  $b=0$ のときの共有点は原点だけである。[M] 佐々木 (信)
- $b<0$ のとき、x 軸との共有点の x 座標は $0,\ \pm\sqrt{-b}$ である。[M] 木戸、津田、[E] 熊谷 (美)
  $b<0$ のときの x 軸との共有点は、0 以外は $\pm m$ の形である。[E] 佐々木 (康)、夏目
- 2 点 $(1, b+1),\ (-1, -b-1)$ を通る。
  [E] 久保田、斎藤 (純)、[S] 菊池 (和)、佐々木 (晃)、[C] 佐々木 (佳)
  $|x|=1$ のとき、$|y|=b+1$ である。[S] 村上
- $b>0$ のとき、b を 1 ずつ増やしていくと $y=x^3+bx$ の値は x 座標の分だけ減る。$b<0$ のときは、b を 1 ずつ減らしていくと x 座標の分だけ増えていく。[S] 及川 (貴)、須藤
  ⋆ $x^3+(b+1)x-(x^3+bx)=x$ であることより、明らかです。

このようなグラフになる理由

この場合も、$y=x^3+bx$ は $y=x^3$ と $y=bx$ の和であることから、2 つのグラフを別々に描いてみれば、その理由が明かです。図 7 では、$y=x^3$ と $y=bx$ では y の符号が一致するので、b が大きくなるほど、それらの和は直線的になり y 軸に近づいていきます。

反対に、$b<0$ のときは、2 つのグラフの y の符号が異なるので、図 8 のように、$|b|$ が大きくなるほど山や谷の部分も大きくなっていきます。

[3] $y=x^3+c$ のグラフ

c の値を変えていけば、グラフがどのように変化していくかは明かでしょう。ただし、b の値を変えるとしても、正の方向だけではなく、負の方向にも変えてみることが必要です。

指摘された事柄

- 多くの人が、$y=x^3$ のグラフを y 軸方向に c だけ平行移動していることに気づきました (図 9、図 10)。
- 多くの人が、y 軸との共有点は $(0, c)$ であることに気づいた。
- c の正負によらず、単調に増加している。[E] 井上
  山と谷はない。[C] 長田
- $c=0$ のとき以外は、原点を通らない。[E] 熊谷 (美)
- 2 点 $(1, c+1),\ (-1, c-1)$ を通る。
  [E] 久保田、照井、[S] 菊池 (和)
- x 軸との共有点の個数は 1 個である。[多数]
  x 軸との共有点の座標は $(\sqrt[3]{-c}, 0)$ である。[M] 木戸
  ⋆ x 軸との共有点では $y=0$ なので、$x^3+c=0$ より $x^3=-c$ となるので、$x=\sqrt[3]{-c}$ である。

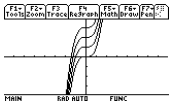


図 9　$c=0,1,2,3$

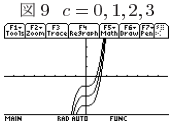
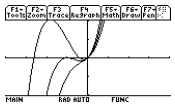


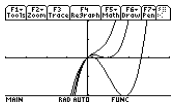
図 10　$c=-1,-2,-3$

[4] $y=x^3+ax^2+bx$ のグラフ

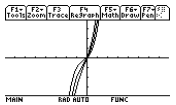
$a,\ b$ の値をいろいろと変えてグラフの変化を眺めていけば、$a,\ b$ の役割は $y=x^3+ax^2$ や $y=x^3+bx$ の場合と同様であることが分かってくるでしょう。



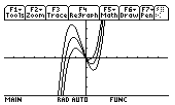
$a=1,2,3, b=1$
図 11



$a=-1,-2,-3, b=1$
図 12



$a=1, b=1,2,3$
図 13



$a=1, b=-1,-2,-3$
図 14

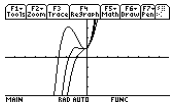
指摘された事柄

- 共有点の個数は 1〜3 個であり、必ず原点を通る。それ以外の共有点を持つのは $a^2-4b\geqq 0$ のときであり、共有点の x 座標は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ である。[M] 木戸
- $y=x^3+ax^2+bx$ と $y=x^3-ax^2+bx$ のグラフは、原点に関して対称である。[E] 松田
  ⋆ $f(x)=x^3+ax^2+bx$ とおくと、$-f(-x)=-((-x)^3+a(-x)^2+b(-x))=x^3-ax^2+bx$ です。
- $b<0$ のとき、$y=x^3+ax^2+bx$ と $y=x^3-ax^2+bx$ は、いずれも増加・減少・増加と変化する関数である。[E] 松田
- $y=x^3+ax^2+bx$ は、$x=-a$ のとき $y=-ab$ である。[S] 荒木
- $y=x^3+ax^2+bx$ が点 (p, q) を通れば、$y=x^3-ax^2+bx$ は点 $(-p, -q)$ を通る。[S] 荒木
  ⋆ $y=x^3+ax^2+bx$ が (p, q) を通れば、$q=p^3+ap^2+bp$ である。よって、$y=x^3-ax^2+bx$ において $x=-p$ のときは、$y=-p^3-ap^2-bp=-(p^3+ap^2+bp)=-q$ である。

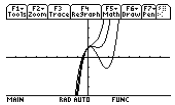
[5] $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフ

a, b, c の値のうち、2 つを固定して 1 つだけを変えてグラフの変化をみれば、各係数の役割は明らかです。それは [1]〜[3] の場合と同様であり、次のことが分かります。

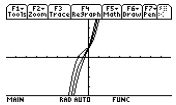
(1) a ($a>0$) を増すと左側の山が、a ($a<0$) を減らすと右側の谷が大きくなる (図 15、図 16)。
(2) b ($b>0$) を増すと直線状になって y 軸に近づき、b ($b<0$) を減らすと山・谷が大きくなる。
(図 17、図 18)
(3) c を変化させてもグラフが y 軸方向に平行移動する。グラフの形そのものは変化しない。



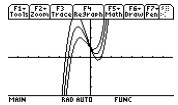
$a=1,2,3, b=c=1$
図 15



$a=-1,-2,-3, b=c=1$
図 16



$b=1,2,3, a=c=1$
図 17



$b=-1,-2,-3, a=c=1$
図 18

指摘された事柄

- y 軸との共有点は $(0, c)$ である、$x=0$ のとき $y=c$ である、a, b を変えても y 軸との交点は c である、ことに多くの人が気づきました。
- $y=x^3+ax^2+bx$ のグラフを、y 軸方向に c だけ平行移動したものである。
  [E] 松田、[S] 阿部 (明)、[C] 鈴木 (尊)
  $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフは、$y=x^3+ax^2+bx$ のグラフを y 軸方向に c だけ平行移動したものであるから、$y=x^3+ax^2+bx$ のグラフの性質を調べれば十分である。[S] 千葉 (鷹)
- x^3 の部分がグラフの基本的部分で、ax^2 と bx でグラフの形を変え、c で上下の位置を決めている。[E] 伊藤 (裕)
  部分的に見ると $x^2,\ bx,\ c$ などが入っているので、それらの性質も含まれている。[E] 藤田
  $y=x^3+ax^3+bx+c$ の a, b, c の役割は、$y=x^3+ax^2, y=x^3+bx, y=x^3+c$ の a, b, c の役割と同じである。[S] 千田
  a, b, c の 2 つを固定して 1 つだけを動かすと、x^3+ax^2, x^2+bx, x^3+c のそれぞれの動きをする。[C] 杉澤、菅原 (律)
  ⋆ いずれも、(1)〜(3) の各係数の役割を把握した上で、このような形で表現しています。
- a の値で、グラフの位置が決まる。[S] 千葉 (鷹)
  a が対称の中心の x 座標を決めている。[C] 相原、石川、長田
  ⋆ このグラフは、ある 1 点について点対称になっていて、その点の x 座標は $-a/3$ であることを、2 年の微分法で学びます。

- 各項の係数が同じときは、点 $(-1,0)$ を通る。[M] 佐々木 (信)、吉田 (裕)
  ⋆ $y=ax^3+ax^2+ax+a$ において $x=-1$ のときは $y=-a+a-a+a=0$ である。
- x 軸との共有点の個数は 1〜3 個である。[M] 橋本、[C] 滝浦、蘇武
- $c>0$ のとき、x 軸との共有点の 1 つは必ず $x<0$ の側にあり、$c<0$ のときは必ず $x>0$ の側にある。[S] 千葉 (隼)
- $b<0$ であれば、a,c の値によらず、山や谷のあるグラフになる。[M] 鈴木 (天)、[S] 千葉 (隼)
  b が、グラフの山と谷の大きさを決めている。[C] 相原、長田
  b が大きいと、山・谷ができないことがある。[C] 長田
  ⋆ 2 年の微分法を利用すると、$a^2-3b>0$ であれば山や谷のあるグラフになることが簡単に分かります。$b<0$ のときは $a^2-3b>0$ なので山・谷ができ、b が大きくて $a^2-3b<0$ となる場合は、山・谷はできません。
- $y=x^3+ax^2+bx+c=x(x^2+ax+b)+c$ であることより、この式は次のように表せる。

$$y=x\left(x-\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)\left(x-\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)+c$$

  したがって、$A=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $B=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ とおくと、グラフは 3 点 (B,c), (A,c), $(0,c)$ を通る。このことから、$y=x(x-p)(x-q)+c$ と表わされるとき、グラフは 3 点 $(0,c)$, (p,c), (q,c) を通る。[S] 三上
- x の値と、a,b,c の値の 2 つを固定して残りの 1 つの値を 1 増やすと、それが a の場合は y は x^2 増え、それが b の場合は y は x と同じ値だけ増え、それば c の場合は y は c と同じ値だけ増える。[M] 佐藤 (晃)、[S] 阿部 (み)、伊藤 (麻)、和泉
  ⋆ たとえば、$y=x^3+ax^2+bx+c$ において、x と b,c を固定して a を 1 増やして $y=x^3+(a+1)x^2+bx+c$ を考えると、これらの差は x^2 である。実際、$x^3+(a+1)x^2+bx+c-(x^3+ax^2+bx+c)=x^2$
- $y=(x-p)^3+a(x-p)^2+b(x-p)+c$ のグラフは、$y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものである。[E] 狩野
- $a>0$ のとき、$y_1=x^3+ax^2+bx+c$ と $y_2=x^3-ax^2+bx+c$ のグラフを比べると、$y_1\geqq y_2$ である。[S] 千葉 (隼)
  ⋆ $a>0$ であれば $y_1-y_2=(x^3+ax^2+bx+c)-(x^3-ax^2+bx+c)=ax^2\geqq 0$ である。
- $a=b$ のときは、$(0,c)$ と $(-1,c-1)$ を通り、$a\neq b$ のときは $(0,c)$ と $(-1,a-b+c-1)$ を通る。[E] 菊地 (大)
  ⋆ $x=0$ のとき $y=c$ であり、$x=-1$ のときは $y=-1+a-a+a=a-1$ である。
- $y=x^3+ax^2+ax+a$ では、$x=-1$ のときの y 座標は、$x=0$ のときの y 座標から 1 を引いたものである。[E] 熊谷 (美)
  $x=-1$ のときの y 座標は $a-1$ である。[C] 高橋 (31)
  ⋆ $x=0$ のときは $y=a$ であり、$x=-1$ のときは $y=-1+a-a+a=a-1$ である。
- $x=1$ のときの y 座標は、各係数の和である。[E] 熊谷 (美)、[S] 阿部 (み)
  点 $(1,1+a+b+c)$ を通る。[C] 佐々木 (歩)
  ⋆ 実際、$x=1$ のとき、$y=1+a+b+c$ である。
- $x=-1$ のときの y 座標は、$a+c$ から $1+b$ を引いた値である。[S] 阿部 (み)
  ⋆ $x=-1$ のとき、$y=-1+a-b+c=(a+c)-(1+b)$ である。
- $a=b$ のとき、$x=-1$ のときの値は a,b がどのような値でも同じ値である。[S] 和泉
  ⋆ $y=x^3+ax^2+ax+c$ は $x=-1$ のとき、$y=-1+a-a+c=c-1$ となり a の値にはよらない。
- $x=-a$ のとき、$y=-ab+c$ である。[S] 荒木
  ⋆ $y=x^3+ax^2+bx+c$ において $x=-a$ を代入すると、上のようになる。
- $a=b=c=k$ のとき、k の値が 1 増えたときの y の値の増え方には規則性がある。
  [S] 中澤、[C] 高橋 (31)
  ⋆ ここの短い文章では表現できませんが、ある種の規則性に気づいています。その規則性は、
  $y=x^3+kx^2+kx+k=x^3+k(x^2+x+1)$ より、k を変えても x^2+x+1 が共通であるからです。
- $y=x^3+ax^2+ax+a$ では、x と y の関係が次のようになっている。[E] 鹿野

x	0	1	2	3	4	5
y	a	$1+3a$	$8+7a$	$27+13a$	$64+21a$	$125+31a$

  ⋆ $y=x^3+ax^2+ax+a=x^3+(x^2+x+1)a$ と変形して、x に $0,1,2,\cdots$ を代入すれば、上の形になります。x^2+x+1 の値が、$3,7,13,21,31,\cdots$ です。隣りどうしの差は、$4,6,8,10,\cdots$ です。
- [C] 高橋 (31) は、$y=x^3+ax^2+ax+a$ に対して次のことを指摘している。
  a,x の両方が偶数 (または奇数) であれば y は偶数であり、いずれかが偶数 (または奇数) であれば y は奇数である。
  a を固定して x を 1 ずつ増やしていくと、y は奇数と偶数が交互に現れる。
  x を固定して a を 1 ずつ増やしていくと、y は奇数と偶数が交互に現れる。
- x^2 の係数が大きいほど、x 軸との交点の x 座標は小さくなる。[S] 谷地
  ⋆ x^2 の係数が大きいほど左側の山の部分が大きくなり、x 軸との共有点の x 座標は小さくなる。
- $y=x^3+ax^2+bx+c$ と $y=x^3-ax^2+bx-c$ とは、原点に関して対称である。[S] 菊地 (泰)
  ⋆ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して、$-f(-x)=-((-x)^3+a(-x)^2+b(-x)+c)=x^3-ax^2+bx-c$
- $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフは、奇関数になったり、奇関数でも偶関数でもないときもあるが、偶関数になることはない。[S] 三上

[6] その他の指摘事項

- [M] 伊藤 (和) は、以下のことを指摘してきた。
  $y=x^3+ax^2$ と $y=-x^3+ax^2$ とは y 軸に関して対称である。
  $y=x^3+ax^2$ と $y=x^3-ax^2$ とは原点に関して対称である。
  $y=x^3+ax^2$ と $y=-x^3-ax^2$ とは x 軸に関して対称である。
  $y=x^3+bx$ と $y=-x^3-bx$ とは x 軸と y 軸に関して対称である。
- $y=x^3+x^2+x$ のグラフを、x 軸方向に p、y 軸方向に c だけ平行移動すると、
  $y=(x-p)^3+(x-p)^2+(x-p)+c$ のグラフになる。[E] 菊池 (吉)
- [E] 奥田、[S] 遊佐は以下のことを指摘してきた。
  $y=x^3+ax^2$ は、3 点 $(-1,a-1),(0,0),(1,a+1)$ を通る。
  $y=x^3+bx$ は、3 点 $(-1,-b-1),(0,0),(1,b+1)$ を通る。
  $y=x^3+c$ は、3 点 $(0,c),(-1,c-1),(1,c+1)$ を通る。
  $y=x^3+ax^2+bx+c$ は、3 点 $(-1,a-b+c-1),(0,c),(1,a+b+c+1)$ を通る。
- x 軸との共有点の数は、x^3+ax^2 では 2 個、x^3+bx $(b\geqq 0)$ では 1 個、x^3+bx $(b<0)$ では 3 個、x^3+c では 1 個、x^3+ax^2+bx+c では 1〜3 個である。[E] 三浦 (和)
- $y=x^3+ax^2, y=x^3+bx, y=x^3+c$ のいずれにおいても、$x=1$ のときの y の値から 1 を引いた値が係数 a,b,c になっている。[S] 柿岡
  ⋆ $y=x^3+ax^2$ のときは、$x=1$ のとき $y=1+a$ なので $y-1=a$ である。他も同様。
- 3 次不等式は、3 次関数のグラフと x 軸との上下関係をみるだけで簡単に解ける。[S] 柿岡
- 3 次関数のグラフには、途中で減少するものがある。[S] 佐々木 (美)
- $y=x^3+ax^2$, $y=x^3+bx$, $y=x^3+c$ のどのグラフにおいても、山や谷の現れるグラフと、そうでないグラフの 2 種類である。[C] 佐々木 (佳)
- $y=x^3+ax^2, y=x^3+bx, y=x^3+c$ のいずれのグラフも、変則的であるにしろ右上りのグラフになっている。それは、$y=x^3$ がもとになっているからである。[C] 長田

[7] 誤った指摘事項

- $y=x^3+x^2$, $y=x^3+x$, $y=x^3+1$ のグラフは、$x>0$ の側で一つに交わる。
  - ⋆ グラフを表示させると 1 つに重なって見えるが、その部分を拡大してみると重なっていないことが分かる。あるいは、 ♦ F5 で表で表示させてみよ。
- $y=x^3+ax^2$ で、$0<a<1$ のときのグラフは、山や谷が現れない。
  - ⋆ 拡大してみてください。あるいは、 ♦ F5 で表にして数値の変化をみてください。$x<0$ の側に山があることが分かるでしょう。
- $y=x^3+ax^2$ や $y=x^3+bx$ で $a=b=\frac{1}{2}$ のときは、y 座標はかならず $***.5$ になる。
  - ⋆ x が偶数のときや、小数のときは必ずしもそうではありません。
- $y=x^3+ax^2$ のグラフで、山の左側の部分と、谷の右側部分の幅は、同じように見えて微妙に異なる。
  - ⋆ このグラフは、グラフ上のある 1 点に関して点対称になるので、異なるように見えても実は同じです。
- $y=x^3+bx$ のグラフで、山と谷の座標は $(-1,-b-1),(1,b+1)$ である。
  - ⋆ $b=-3$ のときの結果をもとに、一般的な結論を書いてはいけません。
- $y=x^3+ax^2+bx+c$ は、$a=b=c$ ならば $(a+1,0)$ を通る。
  - ⋆ $a=1$ のとき $y=x^3+x^2+x+1=(x+1)x^2+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$ となるので、共有点は $(-1,0)$ であり、$(2,0)$ ではありません。
- 係数に複素数を代入してみたら、グラフが表示されなかった。
  - ⋆ 関数 $y=f(x)$ を扱うとき、x と y はすべて実数です。x や係数として複素数を考えること自体が誤りです。そのため、何も表示されないのです。
- a,b,c がすべて負の数だと、山や谷ができて「N」型のグラフになる。
  - ⋆ 「N」型になるかどうかは b の符号だけで決まり、a,c の符号は関係ありません。
- a,b,c がすべて負のときは、山になる部分が x 軸より上には出てこない。
  - ⋆ たとえば、$y=x^3-2x^2-4x-1$ のグラフをみてください。
- 係数の a,b,c の値が大きくなると、グラフが 1 直線に近づいていく。
  - ⋆ 2 年の微分法で学ぶことになりますが、山や谷が現れないのは $a^2-3b<0$ のときです。a,b,c が大きくても、この関係になければ山や谷が出てきます。
- $y=x^3+ax^2+x+1$ と $y=x^3-ax^2+x+1$ や、$y=x^3+x^2+bx+1$ と $y=x^3+x^2-bx+1$ は、点 $(0,1)$ に関して点対称である。
  $y=x^3+ax^2+bx+c$ は、点 $(0,c)$ に関して点対称である。
  - ⋆ 点対称にはなりますが、点 $(0,1)$ や点 $(0,c)$ に関してではありません。詳しくは微分法で学びます。
- $y=x^3+ax^2$ と $y=x^3-ax^2$ とは、$y=x$ に関して線対称である。
  - ⋆ $y=x$ に関して対称変換すると、縦長のグラフは横長になります。両方共、縦長のグラフなので、$y=x$ に関する対称性はありません。
- $y=x^3+x^2+x+1$ などの具体的な関数の特徴を述べても、一般的な性質とは言えません。
- $y=x^3+bx$ のグラフ上の点を (x,y) とすると y は x の倍数である。
  - ⋆ $y=x^3+bx=(x^2+b)x$ となることを述べていると思われますが、「倍数」は整数に対して使う言葉であり、b や x は整数とは限りません。「b と x が整数の場合は」という断わり書きが必要です。
- $y=x^3+ax^2+bx+c$ の $x<0$ の部分の変化は、a の値により大きく変化する。
  - ⋆ a と b との関係によるので、a だけで決まるものではありません。
- a,b,c が正のときは、グラフは y 軸に関して対称である。a,b,c が負のときは、グラフは x 軸に関して対称である。
  - ⋆ たぶん、何かを誤解しているのでないかと思うのですが、このような対称性はありません。
- $y=x^3+ax^2+bx+c$ の a の符号を変えると、グラフが対称になる。
  - ⋆ たとえば、$y=x^3+x^2$ と $y=x^2-x^2$ とは対称ではありません。
- たとえば、a が負の数であることを表すときに $-a$ という書き方をしている人が少なからずいますが、a が負数であれば $a<0$ を指定するだけですむことです。$-a$ と書いても、$a<0$ のときは $-a>0$ となります。
- a と b の絶対値の大きい方の係数の性質が強く現れる。
  $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフは、$a>b$ のときに山や谷が現れる。
  - ⋆ 詳しくは 2 年の微分法で学びますが、山や谷が現れるのは $a^2-3b>0$ のときです。
- $y=x^3+ax^2$, $y=x^3+bx$, $y=x^3+c$ のグラフは、$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ のとき、いずれも x 軸、y 軸との共有点の数は 2 個である。
- $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフは、$a>b$ のときに山や谷が現れる。a,b,c の符号が同じときは、x 軸との共有点は 1 個である。
  - ⋆ たとえば、$y=x^3+5x^2+5x+1$ は 3 個の共有点があります。
- $y=x^3-2x$ のグラフを表示させたら、2 次関数のようなグラフになった。
  - ⋆ 式を間違えて定義したように思われます。あるいは、 F2 4 でやってみてください。
- たとえば、$y=x^3+3x^2+2x+1$ のグラフだけをみて、「$a>b$ のときは $\cdots$」というような書き方はすべきではありません。「$a>b$ のときは $\cdots$」という以上は、$a>b$ であるようなさまざまな a,b の場合を確認して、それらの共通的に言えることについて述べるべきです。
- $y=x^3+ax^2+ax$ は、$x=-1$ のとき x 軸を通る。
  - ⋆ $x=-1$ のとき、$y=-1+a-a=-1$ なので、点 $(-1,-1)$ を通ります。
- $y=x^3+ax^2$ において、$x=n$ が奇数のとき、$x>0$ では $y=(a+3)n^2$ であり、$x=-n<0$ では $y=(a-3)n^2$ である。
  - ⋆ $y=x^3+ax^2$ は $y=(x+a)x^2$ なので、実数 x に対して $y=(x+a)x^2$ である。

[8] いろいろな感想

- 係数 a,b,c を大きくするとグラフも大きくなると思ったが、そうではなかった。
- $y=x^3+bx$ で $b>0$ だと直線に近づいていくのがおもしろいと思った。
- 係数を変えるだけで、まったく異なる特徴を持つグラフになり、とてもおどろいた。
- 係数が負のときは、グラフがただ反対になるだけだろうと思っていたけど、やってみると全く違うグラフになったりしてびっくりした。
- 最初は法則が分からなくて、ただグラフを書くだけだったが、進むにつれ法則が分かり面白くなった。
- 係数が平方根や分数のときは、整数のときのグラフとはかなり違うグラフになると思ったのに、そんなに変わらないのは意外だった。
- たった 3 次式のグラフでさえ、こんなに色々な形をしていて、私の見つける事のできない法則がまだ幾つも隠されているのかと思うと、凄いと思った。
- 今まで 3 次関数のグラフを深く考えたことがなかったので、新しい発見もあり楽しかった。
- 関数という一つの点からできる線。それは宇宙の星を 1 つ 1 つパズルのように組み合わせる、そんな研究だった。
- 関数のグラフについて、ここまで深く考えたことは初めてで、いろいろ考えてみると気づくことが多く、自分が今気づいたことよりも、まだ規則性的なことがあると思う。やってみると意外と楽しかった。
- 初めは難しそうで面倒くさそうで全くやる気が起きなかったけれど、やっていくうちに、いろいろ考えるのがとても楽しくなってきた。
- 何をどうすればよいのか分らず、難しかった。

「自由研究」の冬季課題

以下の課題のうち、いずれかを選択して、**1 月 28 日 (金) までに提出**してください。これまでと同様に、各自がどのようなことを考え、どのようなことを予想したか、それをどのようにして確かめたか、あるいはどのような理由で確かめることができなかったか、というような、各自の思考の経過をまとめてくればよいのです。「やってみたけど、分らなかった！」という場合は、どのようなことをやってみたのか、「分らない！」と結論づけるまでに各自がどのようなことを考えたのか、その思考の経過をまとめてくればよいのです。

三平方の定理

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として、$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ が良く知られています。このような自然数は、他にどのようなものがあるでしょうか。3, 4, 5 のように、連続する 3 つの自然数で三平方の定理を満たすものは他にあるでしょうか。5, 12, 13 のように、3 つのうち 2 つが連続するような数で三平方の定理を満たすものは、他にあるでしょうか。つまり、$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 a, b, c をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数では、$a^2=c^2-b^2$ も成立しています。そして、そのような自然数 a, b, c は、どのような仕組で作り出されているのか、それを作り出す仕組について考えてみてください。数ナビの操作ばかりではなく、ある程度の手計算も交えながら考えてみください。

因数分解

x^4+4 は、一見すると因数分解できないように見えますが、

$$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

と因数分解できます。一般に、x^n+a が因数分解できるのは、指数 n や定数項 a がどのようなときでしょうか。ただし、指数 n や定数項 a は自然数とし、因数分解された式の係数は整数とします。この条件で、x^n+a が因数分解できるための n, a の条件について考えてみてください。そして、可能なら、その証明を考えてください。

なお、数ナビで因数分解をするには、基本画面 (HOME) で F2 2:Factor(を利用します。たとえば、「Factor(x^4+4)」とすれば、「$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$」が表示されます。

3 次関数のグラフ

3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフについてはすでに考察しました。そこで、今度は、$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のタイプのグラフについて考えてみてください。a, b, c の値のあり方により、この関数のグラフはどのような変化をみせるでしょうか。グラフの山や谷の個所を a, b, c の式で表すことはできないでしょうか。2 次関数のときのように、基本になる関数の平行移動として考えることはできないでしょうか。不等式 $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ を解け、と言われたときは、どのようにすればよいでしょうか。各自の問題意識にもとづいて考えてみてください。

その他

以上の他に、各自が何か考えてみようという問題があれば、それについてまとめてきてもかまいません。ただし、それは、通常の問題集にあるような問題ではなく、ここにあげているようなタイプの問題とします。

補充試験該当者用の課題　　試験日：1 月 12 日 (水)8 校時 (15:50〜) 視聴覚室

補充試験該当者は、この問題にも回答して補充試験のときに提出すること。

1 次の不等式を解け。負数を掛ける (負数で割る) ときは、不等号の向きが変わることに注意する。

1 次不等式の解は数ナビで確認できる。基本画面 (HOME) で F2 1:Solve(を選択する。そして、「Solve($3x+4>5x-7, x$)」とする。不等号 $>$, $<$ は一番下の黄色の機能である。ただし、連立不等式の解は表示できない。個々の不等式を解いて、共通部分は自分で確認せよ。分数式の個所は、$(4x-1)/3$ などとして括弧で囲うことが必要である。

(1) $3x+4>5x-7$　　(2) $2(x+3)-4<5(x-2)+3$

(3) $\dfrac{x+3}{2}>\dfrac{2x-1}{3}-1$　　(4) $\dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{3x-2}{2}<2$

(5) $\begin{cases}3x+4>2x-3\\4x-1>7x+3\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}\dfrac{3x+4}{2}>\dfrac{2x-1}{3}\\\dfrac{4x-1}{3}<\dfrac{3x+2}{2}\end{cases}$

2 次の 2 次不等式を解け。表を書くのではなく、放物線の簡単なグラフを描いて考えること。グラフと x 軸との上下関係に注意すればよい。x 軸との共有点があるかどうかは、判別式 D の符号で判定できる。

数ナビで 2 次不等式を解くことはできないが、グラフを表示させることはできる。$ax^2+bx+c>0$ の形のときに左辺のグラフを表示させてみればよい。x 軸との共有点は、基本画面で「Solve($x^2-x-2=0$, x)」とすれば確認できる。

(1) $x^2-x-2>0$　　(2) $x^2+2x-15<0$

(3) $x^2-2x-1>0$　　(4) $2x^2-3x+1<0$

(5) $\begin{cases}x^2+x-2>0\\x^2+2x-8<0\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x^2+2x-2>0\\x^2+4x>0\end{cases}$

3 次の不等式を解け。ここは表を書いて調べること (51 ページ)。因数分解の仕方は 12 ページにある。または、授業で説明した組み立て除法による。

数ナビで 3 次不等式を解くことはできないが、グラフを表示させることはできる。左辺のグラフを表示させるとよい。因数分解は、基本画面で F2 2:Factor(として、「Factor(x^3-3x-2)」とすれば確認できる。

(1) $x^3-3x-2>0$　　(2) $x^3+6x^2+11x+6<0$

(3) $3x^3+x^2-8x+4>0$　　(4) $x^4-3x^3+x^2+3x-2<0$

4 次の等式を証明せよ。等式の証明の仕方に注意すること。難しそうな辺 $=\cdots=$ 簡単そうな辺か、左辺 $-$ 右辺 $=\cdots=0$ を示せばよい。(3)(4) では、$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおく。

(1) $3(x-2)^2+5(x-2)-1=3x^2-7x+1$　　(2) $a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=3abc$

(3) $a:b=c:d$ のとき、$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$　　(4) $a:b=c:d$ のとき、$\dfrac{ac+bd}{bd}=\dfrac{c^2+d^2}{d^2}$

5 全体集合 U を、$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ とし、$A=\{1,2,3,4\}$、$B=\{2,4,6,8\}$ とするとき、次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$　　(2) $A\cup B$　　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$　　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$

6 全体集合を実数全体とし、$A=\{x\,|\,x^2-x-2>0\}$、$B=\{x\,|\,x^2-9\leqq 0\}$ とするとき、次の集合を求めよ。まず、A, B を表す 2 次不等式を解くことが必要である。

(1) $A\cap B$　　(2) $A\cup B$　　(3) $\overline{A}\cap\overline{B}$　　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}$

7 次の命題の逆・裏・待遇を書き、その真偽を述べよ。偽のときは反例をあげること。

(1) $x=1$ ならば $x^2=1$ である　　(2) $x>0$ または $y>0$ ならば、$xy>0$ である

(3) $x<1$ ならば $x^2<1$ である　　(4) $x^2+y^2=0$ ならば $x=0$ かつ $y=0$ である

《基礎数学 I》「自由研究」(冬季課題) の解説

三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$

三平方の定理を成立させる簡単な自然数として、$3^2+4^2=5^2$ や $5^2+12^2=13^2$ などの他に、どのようなものがあるでしょうか。$a^2+b^2=c^2$ が成立するような自然数 $a,\ b,\ c$ をできるだけたくさん見つけてください。そのような自然数 $a,\ b,\ c$ は、どのような仕組で作り出されているのか、それを作り出す仕組について考えてみてください。

解説　92 名の人が、この課題を選択しました。普段、何げなく使っている三平方の定理の背後には、どのような数理が潜んでいるかを体験してもらいたい、というのが出題の主旨です。

指摘された事柄

3 つが連続する数の場合

- 3 つが連続する数するのは、$3^2+4^2=5^2$ のときしかない。(多数)
- 以下の理由により、3 つが連続するのは $3^2+4^2=5^2$ しかない。
  [M] 菅原寛、高橋広、[S] 荒木、池淵、須藤克、千葉一、千葉隼、遊佐、谷地、[E] 鹿野、菊地大、熊谷美、[C] 廣野
  3 つが連続するのは $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$ のときである。展開すると $n^2-2n-3=0$ となり $(n+1)(n-3)=0$ より $n=-1,3$ である。n は自然数であるから $n=3$ である。つまり、3 つが連続するのは、$3^2+4^2=5^2$ しかない。　//

b,c が連続する数の場合

- b,c が連続するとき、a は奇数である。(多数)
  a が偶数のとき、b,c が連続するようにはできない。[S] 千葉隼、[E] 後藤、夏目
  b,c が連続するとき、$a^2-2b=1$ である。[C] 久光
  $a^2+n^2=(n+1)^2$ を考えると、$a^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$ となるので、a^2 は $2n+1$ が平方数になっているときを考えればよい。[M] 今野、三上、[S] 千葉鷹、[E] 及川、菊地邦
- $a^2+b^2=c^2$ で b,c が連続する a,b,c として、次のような場合がある。(多数)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	⋯
a	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	⋯
b	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220	264	312	364	⋯
c	5	13	25	41	61	85	113	145	181	221	265	313	365	⋯

- b,c が連続する数のとき、$c=\dfrac{a^2+1}{2}$ という関係にある。[M] 山口
  b,c が連続する数のときは、$b=\dfrac{1}{2}(a+1)(a-1)$ である。[M] 高橋広
  $a\neq 1$ を奇数とするとき、$b=\dfrac{a^2-1}{2},\ c=\dfrac{a^2+1}{2}$ のとき b,c は連続する。[E] 菊地邦
  b,c が連続するとき、$b=\dfrac{a^2-1}{2},\ c=\dfrac{a^2-1}{2}+1$ である。[C] 廣野
  a を奇数とすると、$b=\dfrac{a^2}{2}-0.5,\ c=\dfrac{a^2}{2}+0.5$ である。[C] 蘇部
  ⋆ b,c が連続するので $a^2+(2n)^2=(2n+1)^2$ の形である。$a^2=(2n+1)^2-(2n)^2=4n+1$ より $n=\dfrac{a^2-1}{4}$ となるから、$b=2n=\dfrac{a^2-1}{2}$、$c=2n+1=2\cdot\dfrac{a^2-1}{4}+1=\dfrac{a^2+1}{2}$ である。
  すなわち、奇数 a に対して、$\boldsymbol{a^2+\left(\dfrac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a^2+1}{2}\right)^2}$ である。
- b,c が連続する数のとき、$a^2=b+c$ である。(多数)
  b,c は連続しているから $b+c=2b+1$ のタイプなので、a^2 を 2 で割ったときの商を b として $c=b+1$ とすればよい。[M] 菅原歩、[S] 千葉隼、[E] 高橋拓
  $a^2=2b+1$ となるので a^2 は奇数である。そのようなときの b を求めていけば、b,c が連続するときの a,b,c が求められる。[S] 熊谷和
  b,c が連続するとき、下記の理由により a^2 は奇数である。[E] 久保田
  $b=n$ とすると、$a^2+n^2=(n+1)^2$ の形なので、$a^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$ である。//
- b,c が連続するとき、k 番目の b は、$ak+k$ である。たとえば、4 番目の場合の b は、$9\cdot4+4=40$ である。[S] 阿部み
- b,c が連続する数のとき、$a+b-c$ は 2 の倍数である。[M] 名久井
  ⋆ このページの下段のコメントから、b,c が連続するような a,b,c は $2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1$ のタイプなので、$a+b-c=2k$ となり偶数である。また、この $a+b-c$ は、a,b,c を 3 辺とする直角三角形の内接円の半径になっている。なぜならば、$a^2+b^2=c^2$ より $(a+b)^2-2ab=c^2$ であるから、$(a+b)^2-c^2=2ab$ である。左辺を因数分解して $(a+b+c)(a+b-c)=2ab$ となる。ヘロンの公式の記号を利用すると、$a+b+c=2s$ なので $2s(a+b-c)=2ab$ となり、$s(a+b-c)=ab$ である。a,b,c を 3 辺とする三角形の面積を S、内接円の半径を r とすると、$S=sr=ab$ であるから、$s(a+b-c)=sr$ となり、$r=a+b-c$ である。
- b,c が連続する数のとき、a は奇数である。(多数)
  b,c が連続するとき、a は 2 ずつ増えている。(多数)
- b,c が連続するとき、b,c の増え方は $12, 16, 20, 24, 28, \cdots$ と 4 の倍数ずつ増えている。(多数)
  b,c が連続するとき、b,c は $4+4n$ ずつ増える。[M] 境、[E] 菊地大
  ⋆ 理由は、下記を参照してください。なお、この性質について、必ずしも三平方の定理が成立していない場合について述べていた人が多数ありました。
- b,c が連続するとき、$a=2k+1$ とすると、$b=(a+1)\cdot k,\ c=b+1$ である。したがって、奇数 a が与えられたとき、それを 2 で割ったときの商を k としてこのような b,c を作れば、三平方の定理を満すものを幾らでも作ることができる。[E] 鈴木晶
  ⋆ この場合、$a=2k+1$ より、$b=(2k+2)k=2k^2+2k$、$c=2k^2+2k+1$ となる。
- b,c が連続する数のとき、b の部分 $4, 12, 24, 40, 60, 84, \cdots$ は、最初の 4 を $3, 6, 10, 15, 21, 21, \cdots$ 倍したものである。隣どうしの差には、$3, 4, 5, 6, 7, \cdots$ という規則性がある。[M] 名久井
  ⋆ b の部分の $4, 12, 24, 40, 60, 84, \cdots$ は、$2\cdot2,\ 4\cdot3,\ 6\cdot4,\ 8\cdot5,\ 10\cdot6,\ 12\cdot7, \cdots$ となるので、$2k\cdot(k+1)$ のタイプである。したがって、c は $2k(k+1)+1=2k^2+2k+1$ であるので、$a^2=c^2-b^2=(2k^2+2k+1)^2-(2k^2+2k)^2=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$ となり、$a=2k+1$ である。つまり、b,c が連続するものは $(2k+1)^2+(2k^2+2k)^2=(2k^2+2k+1)^2$ により生成されている。
- b,c が連続するものは、$\boldsymbol{(2n+1)^2+\{2(n^2+n)\}^2=\{2(n^2+n)+1\}^2}$ の形である。
  [E] 阿部、伊藤龍、太田
- b,c が連続するものとして、以下のものがある。[M] 花坂
  $(2n+1)^2+(4(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1))^2=(4(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)+1)^2$
  b,c が連続するとき、$b=4\cdot1+4\cdot2+4\cdot3+\cdots+4\cdot n$ の値である。[S] 荒木
  ⋆ 2 年で学ぶ数列の和を利用すると、$1+2+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ となるので、この式は $(2n+1)^2+\left(4\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2=\left(4\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+1\right)^2$ となる。これを変形すると、上で説明した式と同一の $(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$ が得られる。
- b,c が連続するような場合を見つけるには、自然数 n と、それを 2 乗した n^2 の一覧表をつくり、隣り合う n^2 の差が平方数になる場合を探せばよい。[M] 佐藤真
- b,c が連続する数としては、たとえば $7^2+n^2=(n+1)^2$ を解けば $2n=48$ より $n=24$ となるので、$7^2+24^2=25^2$ である。[M] 佐々木信

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

a, b が連続する数の場合

- $a^2+b^2=c^2$ で a, b が連続する a, b, c として、次の場合がある。[S] 荒木

n	1	2	3	4	5
a	3	20	119	696	4059
b	4	21	120	697	4060
c	5	29	169	985	5741

- a, b が連続する場合、n 番目の a は、$n-1$ 番目の a を 6 倍した値から、$n-2$ 番目の a の値から 2 を引いた値を引いたものである。たとえば、4 番目の $a=696$ は、$119\cdot 6-(20-2)$ として求まる。[S] 荒木
- a, b が連続する場合、n 番目の c は、$n-1$ 番目の c を 6 倍した値から、$n-2$ 番目の c を引いたのである。たとえば、4 番目の $c=985$ は、$169\cdot 6-29$ として求まる。[S] 荒木
- c は、$c^2=2n(n+1)+1$ となる数である。[M] 菅原寛、[S] 谷地
  - ⋆ $n^2+(n+1)^2=c^2$ であるから、$c^2=2n^2+2n+1=2n(n+1)+1$ である。
- a, b は、$2n(n+1)+1$ が平方数となるような n を求めれば、$a=n,\ b=n+1$ として求められる。[M] 菅原寛
- a, b が連続するものとして $20^2+21^2=29^2$ がある。[M] 熊谷尚、花坂、[E] 島津
  a, b が連続するものとして、$20^2+21^2=29^2,\ 119^2+120^2=169^2$ がある。[M] 境、[E] 菊地大

その他

- 連続しないものに、$8^2+15^2=17^2,\ 12^2+35^2=37^2,\ 16^2+63^2=65^2$ などがある。[S] 池淵
- a, b, c が連続しないものとして、n を偶数として $\boldsymbol{n^2+\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^2-1\right\}^2=\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^2+1\right\}^2}$ の場合がある。たとえば、$8^2+15^2=17^2$ などがある。[S] 千葉鷹
- $3^2+4^2=5^2$ において、$3=2^2-1^2,\ 4=2\cdot 2\cdot 1,\ 5=2^2+1^2$ であることから、$x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ z=a^2+b^2$ であれば $x^2+y^2=z^2$ が成立すると予想したら、その通りだった。つまり、$a>b$ として $\boldsymbol{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2}$ である。[C] 佐藤大
  - ⋆ 左辺を展開すると、$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2$ となり、これは正しい。この式を利用すると、a, b に適当な自然数を代入することにより、三平方の定理が成立する式を幾らでも作りだすことができる。
- $a^2+b^2=c^2$ が成立していれば、a, b, c を n 倍した数 an, bn, cn についても成立する。(多数)
- $3^2+4^2=5^2$ に、$11^2,\ 111^2, \cdots$ などをかけると、$33^2+44^2=55^2,\ 333^2+444^2=555^2$ などが成立する。[C] 廣野
- $a^2+b^2=c^2\ (a<b<c)$ であれば、a, b は奇数と偶数、c は奇数である。[M] 佐々木信、境、名久井、皆川、[S] 佐々木美
  a, b, c のうちの 2 つは奇数である。[M] 千田、吉田裕
  a, b が奇数のとき、$a^2+b^2=c^2$ は成立しない。[M] 境、高橋広
  - ⋆ a, b, c に共通の約数がない場合を考えればよい。その場合、a, b, c がすべて偶数の場合はありえない。a, b が奇数の場合は、$a^2+b^2=c^2$ の左辺 $=(2k-1)^2+(2l-1)^2=4(k^2+l^2-k-l)+2$ の形であるが、c が偶数であれば c^2 は 4 の倍数であり、c が奇数であれば $c^2=(2p+1)^1=4(p^2+p)+1$ となり c は 4 で割ると 1 余る数であるので矛盾である。したがって、a, b が 2 つとも奇数ということはありえないので、奇数と偶数である。(奇数)^2+(偶数)^2 が (偶数)^2 になることはないので、c も奇数である。
- $a=\dfrac{b+c}{3}$ であれば、$a:b:c=3:4:5$ である。[E] 井上、久保田
  - ⋆ このとき、$a^2+b^2=c^2$ において $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$ より、$\dfrac{(b+c)^2}{9}=(c-b)(c+b)$ となるので $b+c=9(c-b)$ である。したがって $10b=8c$ となり、$\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$ なので $b:c=4:5$ である。このとき、$\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}=k$ とすると $b=4k,\ c=5k$ より、$a=\dfrac{b+c}{3}=\dfrac{9k}{3}=3k$ となり、$a:b:c=3:4:5$ である。
- $3a=b+c$ を満すものとして $3^2+4^2=5^2$、$4a=b+c$ を満すものとして $8^2+15^2=17^2$、そして $5a=b+c$ を満すものとして $5^2+12^2=13^2$ がある。[E] 井上
- $a^2+b^2=c^2$ をみたすのは、中心が原点で、半径が c の円上の点 (a, b) が自然数のときである。[S] 須藤克
- 三角形の 3 辺が整数の三角形は、「30°, 60°, 90°」や「45°, 45°, 90°」の角にはならない。[M] 佐々木翼
- 2 桁の数の 2 乗を計算するとき、たとえば 34^2 であれば $34^2=(30+4)^2=30^2+2\cdot 30\cdot 4+4^2$ とすれば簡単に計算できる。[M] 佐々木信
- 簡単な見つけ方としては、紙に正確な目盛つきの直角を書き、縦と横の目盛をつないで、その長さが整数の場合を探せばよい。[S] 三上
- 120 個も調べたのに、規則性はさっぱり分かりませんでした。

誤った指摘

- 三平方の定理を成立させる数は、$3^2+4^2=5^2$ と $5^2+12^2=13^2$ を n 倍した数だけである。
- 三平方の定理を成立させるものとして、3 つとも偶数、3 つとも奇数、a, c が奇数の 3 パターンがある。
  連続しないものは、すべて奇数である。
- a と b が連続することはない。
- $a^2+b^2=c^2$ において $b=an$ であるとき、$c=a\sqrt{n^2+1}$ である。
  - ⋆ 式としては正しいですが、「自然数について考えている」ことを忘れています。この c が自然数になるのはどのような場合かについての考察が必要です。
- 三平方の定理は、a, b, c が自然数のときの定理です。虚数や負数の場合について述べている人が幾人かいました。

x^n+a の因数分解

x^4+4 は、一見すると因数分解できないように見えますが、

$$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

と因数分解できます。一般に、x^n+a が因数分解できるのは、指数 n や定数項 a がどのようなときでしょうか。指数 n や定数項 a は自然数とし、因数分解された式の係数は整数とするとき、x^n+a が因数分解できるための n, a の条件について考えてみてください。

解説　この課題は 40 名が選択しました。いろいろな n, a について x^n+a の因数分解を幾つかやってみると、容易に何らかの規則性に気づくと思います。x^4+4 の因数分解の変形過程は、式変形の際のヒントにもなっていました。規則性を予測したときは、その証明も考えてほしいと思います。整式 $f(x)$ において $f(k)=0$ であれば、$f(x)$ は $x-k$ を因数に持つという因数定理も念頭におく必要があります。

指摘された事柄

x^n+1 について

- n が奇数のときは因数分解できる。[C] 高橋翔
  n が奇数のとき、$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+1)$ である。[S] 菊地和、[E] 照井、中村
  $x+1$ を因数に持つと、もう一つではプラスとマイナスが交互に現れる。[E] 藤沢、[C] 昆

⋆ $f(x)=x^n+1$ において n が奇数のときは、$f(-1)=-1+1=0$ となり、$f(x)$ は $(x+1)$ を因数に持つからです。x^n+1 を $x+1$ で実際に割ってみれば、符号が交互になる理由も分かるでしょう。

- $x^{2^n}+1$ は因数分解できない。[S] 伊藤麻、佐々木恭、[E] 照井、[C] 昆
  x^n+1 は、$n\neq 2^k$ のとき因数分解できる。[E] 狩野
- 因数分解できたときの式の係数は ± 1 だけである。[S] 小野寺淳
- n が偶数で 2^k のタイプではないとき、n の約数の最大の偶数を m とすると、
  $x^n+1=(x^m+1)(x^{n-m}-x^{n-2m}+x^{n-3m}-\cdots-x^m+1)$ であり、
  n が奇数のときは $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$ である。[E] 狩野
- $n=2,6,10,\cdots$ のときの因数には、x^2+1 がある。[E] 佐藤真、照井、中村
  ⋆ この指数 n は $4k-2$ のタイプです。$x^{4k-2}+1=(x^2)^{2k-1}+1$ より、$X=x^2$ とおくと $X^{\text{奇数}}+1=(X+1)(\cdots)=(x^2+1)(\cdots)$ となるからです。
- $x^{3^n}+1$ の因数分解の式には、$x^{2\cdot 3^{n-1}}-x^{3^{n-1}+1}$ が含まれる。[E] 佐藤真
  ⋆ $x^{3^n}+1=(x^{3^{n-1}})^3+1$ であるから、$X=x^{3^{n-1}}$ とおくと、$X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$ となるからです。

<u>x^n+4 について</u>

- x^n+4 は、n が 4 の倍数のときに因数分解できる。(多数)
  ⋆ n が 4 の倍数であれば、$n=4k$ の形なので、$x^n+4=x^{4k}+4=(x^k)^4+4$ となり、例示した変形と同様にすれば因数分解できます。
- x^n+4 が因数分解できるときは、3 つの式からなる 2 つの因数に分解される。[C] 昆
- n が 4 の倍数のとき、x^n+4 は $x^n+4=(x^{\frac{n}{2}}+2x^{\frac{n}{2}}+2)(x^{\frac{n}{2}}-2x^{\frac{n}{2}}+2)$ と因数分解できる。
  [M] 佐々木尚、[S] 菊地和、小野寺健、[E] 佐藤真、狩野、中村、照井
- $n=2^{2k+4}$ $(k>0)$ のとき、x^n+4 は因数分解できる。[S] 金澤
  ⋆ $2^{2k+4}=2^{2(k+2)}=4^{k+2}$ となり 4 の倍数である。
- $x^{4n}+4$ が因数分解されることの証明は次のとおり。[M] 佐々木尚、[S] 菊地和、[E] 狩野
  $x^{4n}+4=(x^{2n})^2+4=(x^{2n})^2+4x^{2n}+4-4x^{2n}$
  $=(x^{2n}+2)^2-(2x^n)^2=(x^{2n}+2x^n+2)(x^{2n}-2x^n+2)$ //

<u>x^n+8 について</u>

- x^n+8 は n が 3 の倍数のとき因数分解できる。[E] 佐藤真
  $x^{3n}+8=(x^n)^3+2^3=(x^n+2)(x^{2n}-2x^n+4)$ である。[S] 菊地和
  n が 3 の倍数のとき、x^n+8 は $x^n+8=(x^{\frac{n}{3}}+2)(x^{\frac{2n}{3}}-2x^{\frac{n}{3}}+4)$ と因数分解できる。
  [S] 菊地和、小野寺健、[E] 佐藤真、照井、中村
- x^3+a は、$a=b^3$ のタイプのときに因数分解できる。[S] 佐々木晃、時田、[C] 昆
  $x^{3n}+a^3$ は、$x^{3n}+a^3=(x^n)^3+a^3=(x^n+a)(x^{2n}-ax^n+a^2)$ と因数分解できる。[E] 狩野

<u>x^n+a^n について</u>

- x^n+2^n は、n が 2 の累乗の数 (2^k) のときは因数分解できない。[S] 及川貴、柿岡
  ⋆ このタイプの式の因数分解の変形は、$n=2^k$ とするとき
  $x^n+2^n=(x^{\frac{n}{2}})^2+2\cdot 2^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}+(2^{\frac{n}{2}})^2-2\cdot 2^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}$
  という変形です。これが因数分解できるには、$2\cdot 2^{\frac{n}{2}}$ が平方数となる必要がありますが、$2\cdot 2^{\frac{n}{2}}=2^{1+\frac{n}{2}}$ であり、$n=2^k$ のとき $1+\frac{n}{2}=1+\frac{2^k}{2}=2^{k-1}+1$ となるので、これは奇数です。つまり、$n=2^k$ のとき、係数 $2\cdot 2^{\frac{n}{2}}$ は $2^{\text{奇数}}$ の形になるので平方数となることはできません。
- x^n+3^n は、$n=2^k$ のタイプのときは因数分解できない。[S] 柿岡
- x^n+a^n が因数分解できれば、因数分解された式の形は a の値にはよらず同じ形である。[S] 柿岡
  ⋆ たとえば、$x^6+a^6=(x^2)^3+(a^2)^3=(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$
- x^n+n^n で n が素数の場合は、$x^n+n^n=(x+n)(x^{n-1}-nx^{n-2}+n^2x^{n-3}-\cdots+n^{n-1})$ の形に因数分解される。[E] 三浦
- x^n+32 は、n が 5 の倍数のとき因数分解できる。[E] 佐藤真
  x^n+64 は、n が 3 の倍数のとき因数分解できる。[E] 佐藤真
  x^n+128 は、n が 7 の倍数のとき因数分解できる。[E] 佐藤真

<u>その他</u>

- x^n+a は、$n=1,2$ のときは因数分解できない。[E] 中村、村上
- x^2+a は因数分解できない。[M] 今野、[S] 佐々木晃、時田、[E] 村上
  ⋆ a は自然数なので $a>0$ であり、$x^2=-a$ となる x は実数の中には存在しません。
- x^n+2, x^n+3 は因数分解できない。[E] 佐藤真
- x^3+a^3 は因数分解できる。(多数)
  ⋆ $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ という公式があるので当然です。
- $x^4+4^{2k+1}=(x^2+2^{k+1}x+2^{2k+1})(x^2-2^{k+1}x+2^{2k+1})$ である。[S] 佐々木晃
  x^4+a は、a が 4 の奇数乗のときに因数分解できる。
  [M] 今野、佐々木尚、[S] 伊藤麻、金澤、時田、[C] 鈴木尊
  ⋆ $x^4+4^{2k-1}=x^4+2\cdot 2^{2k-1}x^2+(2^{2k-1})^2-2\cdot 2^{2k-1}x^2$, $4^{2k-1}=2^{2(2k-1)}=(2^{2k-1})^2$ である。
  $=(x^2+2^{2k-1})^2-(2^k)^2x^2=(x^2+2^kx+2^{2k-1})(x^2-2^kx+2^{2k-1})$
  x^4+a が因数分解される a は、$a=4,64,1024,16384,\cdots$ であり、前の値を 16 倍した値のときである。[M] 鈴木天
  ⋆ これらは $4^1,4^3,4^5,4^7,\cdots$ であり、4 の奇数乗のときである。
- x^5+a^5 は、$(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-ax^3+a^4)$ と因数分解される。
  [M] 今野、[S] 佐々木晃、時田、[C] 鈴木尊
  x^5+5^{5k} は因数分解できる。[S] 伊藤麻
  x^5+32^n は因数分解できる。[E] 千田　⋆ $32^n=(2^5)^n=2^{5n}$ です。
- x^6+a^3 は、x^3+a^3 のときの因数分解と同じタイプに因数分解される。[M] 今野、[S] 時田
  x^6+6^{3k} は因数分解できる。[S] 伊藤麻
  $x^6+a^3=(x^2+a)(x^4-ax^2+a^2)$ である。[S] 佐々木晃、[C] 鈴木尊
  ⋆ $x^6+a^3=(x^2)^3+a^3$ となるからです。
- $x^{3n}+a^3$ は因数分解できる。[S] 金澤
- $x^7+a^7=(x+a)(x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^2x^4-ax^5+a^6)$　[S] 佐々木晃、[C] 鈴木尊
- x^8+4^{2k-1} は因数分解できる。[C] 鈴木尊
  ⋆ $x^8+4^{2k-1}=(x^2)^4+4^{2k-1}$ となるので、x^4+a の場合と同様です。
- x^9+a^3, x^9+a^9 は因数分解できる。[M] 今野
  x^9+a^3 は因数分解できる。[S] 時田、[C] 鈴木尊
  ⋆ $x^9+a^3=(x^3)^3+a^3$ となるので、x^3+a^3 のときと同様の形に因数分解できます。たとえば、$x^9+1=(x^3)^3+1=(x^3+1)(x^6-x^3+1)$ です。
- x^n+n は、$n=4^{2k-1}$ のとき因数分解できる。[M] 千田真、[E] 伊藤真、[C] 佐々木佳
  ⋆ $n=(2^{2k-1})^2$ より前と同じ変形から $x^n+n=(x^{\frac{n}{2}}+2^kx^{\frac{n}{4}}+2^{2k-1})(x^{\frac{n}{2}}-2^kx^{\frac{n}{4}}+2^{2k-1})$ となる。
- x^n+a は、n が 4 の倍数で、$a=4\cdot 16^k$ のタイプのとき因数分解できる。[M] 高橋悠
  ⋆ $4\cdot 16^k=4^{2k+1}$ なので、上とほぼ同様の変形で因数分解できる。
- x^n+a が 1 次式との 2 つの積に因数分解できるとき、1 次式でない方の式の項の数は n 個である。[C] 相原

- 下記より、x^n+a は n が 4 の倍数で $\sqrt[4]{4a}$ が整数になるときに因数分解できる。[E] 菊地吉

$$x^n+a=\left(x^n+2\sqrt{a}\sqrt{x^n}+a\right)-2\sqrt{a}\sqrt{x^n}=\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{2\sqrt{a}\sqrt{x^n}}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}+\sqrt{2\sqrt{a}\sqrt{x^n}}\right)\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}-\sqrt{2\sqrt{a}\sqrt{x^n}}\right)$$
$$=\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}+\sqrt[4]{4a}\sqrt[4]{x^n}\right)\left(\sqrt{x^n}+\sqrt{a}-\sqrt[4]{4a}\sqrt[4]{x^n}\right)\quad /\!/$$

  なお、$\sqrt{2\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt{4a}}=((4a)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=(4a)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{4a}$、$\sqrt{\sqrt{x^n}}=x^{\frac{n}{4}}=\sqrt[4]{x^n}$ である。

- 下記により、x^n+a は $\sqrt{a}$ と $(2\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}$ が整数になるときに因数分解できる。[E] 松田

$$x^n+a=(x^n+2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}+a)-2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}=(x^{\frac{n}{2}}+\sqrt{a})^2-\left(\sqrt{2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}}\right)^2$$
$$=\left(x^{\frac{n}{2}}+\sqrt{a}+\sqrt{2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}}\right)\left(x^{\frac{n}{2}}+\sqrt{a}-\sqrt{2\sqrt{a}x^{\frac{n}{2}}}\right)\quad /\!/$$

  ⋆ $\sqrt{x^{\frac{n}{2}}}=x^{\frac{n}{4}}$ のルートがはずれる必要があるので、「n が 4 の倍数である」という条件も必要です。

- x^n+a において n,a が自然数の場合について考察するように求めているので、$a<0$ の場合について考察した人の内容は省略します。

誤った指摘

- x^n+a は、$a=1,4,8$ のときしか因数分解できない。
- 因数分解した式の係数に奇数はない。
  x^n+a は、a が奇数のときは因数分解できない。　⋆ x^3+27 は因数分解でき、係数は奇数です。
- $x^{2n}+1$ は因数分解できる。　⋆ x^4+1 は因数分解できません。
- n が 4 の倍数のとき、x^n+1 は次のいずれかに因数分解される。
  $(x^2+1)(x^{n-2}-x^{n-4}+\cdots+1),\ (x^4+1)(x^{n-4}-x^{n-8}+\cdots+1)$
  ⋆ $x^8+1,\ x^{16}+1$ は因数分解できません。
- $x^{4n}+a$ が因数分解できるのは $a=4$ のときだけである。
  ⋆ $x^{4n}+64$ も因数分解できます。$x^{4n}+a$ が式変形により因数分解になるのは、$a=k^2$ のタイプであることが必要です。その場合に、$x^{4n}+k^2=x^{4n}+2kx^{2n}+k^2-2kx^{2n}$ と変形することになるので、因数分解できるには $2kx^{2n}$ が平方の形にならなければなりません。それは $2k$ が平方数になる場合です。そのような数として、たとえば $k=8,18$ などがあります。
- x^n+a^n は因数分解できる。
  ⋆ n が奇数のときは正しいですが、偶数のときは必ずしもそうではありません。たとえば x^2+5^2, x^4+3^4 は因数分解できません。
- 2 つにすると、$(x+b)(\cdots),\ (x^2+b^2)(\cdots)$ の形になる。
  ⋆ $x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ は、これにあてはまりません。

3 次関数のグラフ

$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは、a, b, c の値のあり方により、どのような変化をみせるでしょうか。各自の問題意識にもとづいて考えてみてください。

解説　この課題は、14 名が選択しました。$a=b\neq c,\ a\neq b=c,\ a=b=c$ などに分けてグラフを表示させてみると、3 つのパターンがあることに容易に気づくことができるでしょう。$y=0$ となるのは $x=a,b,c$ のときであることも明かです。$y>0$ となるのは、x 軸の上にある部分ですから、グラフが分かれば不等式 $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ の解法も容易です。

指摘された事柄

グラフの平行移動について

- $a<b<c$ で $b-a=c-b$ が同じ値であれば、a,b,c の値によらずグラフの形は同じであり、x 軸方向に平行移動しただけである。[M] 中澤、和泉
  $b-a$ と $c-a$ が同じであれば、頂点の y 座標の絶対値は一致する。[S] 沼倉
- $y=(x-a)^3$ は、$y=x^3$ のグラフを x 軸方向に平行移動したグラフである。[M] 齋藤、佐藤晃
- $a<b<c$ で形が同じグラフ、たとえば、$y=(x-1)(x-2)(x-3)$ と $y=(x-4)(x-5)(x-6)$ は、x 軸方向に平行移動すれば重なる。[M] 中澤
  a,b,c が $a,a+1,a+2$ の場合、a がどんな値でもグラフは同じ形である。[M] 千葉亮
  $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の a,b,c が、$1,2,3$ や $3,4,5$ のような連続する 3 つの数のとき、それらのグラフは x 軸方向に平行移動したグラフである。[M] 齋藤、和泉
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動すると、$y=(x-a-p)(x-b-p)(x-c-p)+q$ のグラフになる。[C] 高橋慶 (31)

グラフの対称性について

- $a<b<c$ で $b-a=c-a$ のとき、グラフには対称性がある。[M] 中澤
- $y=(-x-a)(-x-b)(-x-c)$ のグラフは、$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフである。[M] 小野寺央

グラフの共有点について

- x 軸との共有点の x 座標は $x=a,b,c$、y 軸との共有点の y 座標は $-abc$ である。
  [M] 佐藤晃、中澤、[S] 沼倉、[E] 奥田、[C] 長田、高橋慶 (31)
- a,b,c のどれかが 0 だと原点を通る。[E] 奥田
- $y=(x-a)^2(x-c)$ は、$x=a$ の箇所で x 軸と接する。[C] 長田
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは、$y=(x-a)(x-b),\ y=(x-b)(x-c)$ の 2 つのグラフと x 軸との共有点を通る。[M] 中澤

その他

- $a<b<c$ で、$b-a$ や $c-b$ の値を大きくするとグラフの山や谷が大きくなる。[M] 小野寺央
- a,b,c のうち、2 つを固定して 1 つだけ大きくすると、山や谷が大きくなる。[M] 齋藤
- $y=x^2(x-c)$ のグラフは、c の値によらず原点を通る。[M] 齋藤
- $y=x^2(x-c)$ の頂点の x 座標は $x=\dfrac{2}{3}c$ のときであり、c が 3 の倍数のとき頂点の y 座標は整数である。[M] 齋藤
  ⋆ 詳しくは 2 年の微分法で学ぶが、頂点の y 座標は $x=\frac{2}{3}c$ のときである。
- $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の各項の順番は、グラフの形とは関係がない。[M] 佐藤晃、橋本
- 不等式 $(x-a)(x-b)(x-c)>0$ に応用すると、たとえば $(x-1)(x-4)(x-7)<0$ となるのは $x<1,\ 4<x<7$ のときである。[M] 祝田、[C] 高橋慶 (31)
- a,b,c のそれぞれの値が近いほどグラフの山や谷は小さくなる。[C] 伊藤秀

誤った指摘

- 3 次関数で原点を通るものは存在しない。　⋆ a,b,c のどれかが 0 のときは、原点を通ります。

独自の問題を考えて考察した人

- $\sqrt{a}$ と a との関係について
- コンパスと定規で角の 3 等分線を引く方法について
  ⋆ これは、「不可能」ということが証明されています。

数ナビを利用した数学に関する意識調査

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数ナビ (TI–89) を貸与して、半年以上が経ちました。今後の授業の参考としたいので、数学の学習でこの電卓を利用した感想について書いてください。

1 あなたは、数ナビで次のような操作を行うことができますか、それとも、できませんか。次の各項目について、「はい」「いいえ」のうち自分に当てはまるものに○印をつけてください。

(1) 私は、$y = \sin x$ のような関数を定義して、そのグラフを表示させることができる。 はい いいえ
(2) 私は、表示されたグラフの特定部分を拡大することができる。 はい いいえ
(3) 私は、一度定義した関数を自由に変更することができる。 はい いいえ
(4) 私は、定義した関数をすべて削除する方法を知っている。 はい いいえ
(5) 私は、グラフ画面の x, y の範囲を自由に変更することができる。 はい いいえ
(6) 私は、グラフと x 軸との交点の座標を求めることができる。 はい いいえ
(7) 私は、範囲指定をしてグラフの一部分だけを表示させることができる。 はい いいえ
(8) 私は、◀, ▶ でグラフの上だけを移動するには、どのキーを押せばよいか知っている。 はい いいえ
(9) 私は、グラフの山や谷になっている点の座標を求めることができる。 はい いいえ
(10) 私は、グラフ上で、指定された点の y 座標を求めることができる。 はい いいえ
(11) 私は、(−) と − の使い分けができる。 はい いいえ
(12) 私は、$\sqrt{5}$ の値を小数で表示させることができる。 はい いいえ
(13) 私は、関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 - 2x$ と定義することができる。 はい いいえ
(14) 私は、グラフの x, y 座標を表にして表示させることができる。 はい いいえ
(15) 私は、グラフの x, y 座標を表にしたとき、表が特定の x から始まるように変更できる。 はい いいえ
(16) 私は、グラフの x, y 座標を表にしたとき、表示されている x の間隔を変更することができる。 はい いいえ
(17) 私は、式 $(x+1)^5$ の展開式を表示させることができる。 はい いいえ
(18) 私は、式 $x^5 - 1$ を因数分解させることができる。 はい いいえ
(19) 私は、方程式 $x^2 - 3x + 3 = 0$ の解を表示させることができる。 はい いいえ
(20) 私は、授業で説明されていない数ナビの機能を知っている。 はい いいえ

2 数ナビ (TI–89) を使用してみて、次の (1)〜(25) の各項目について、あなたはどう思いますか。「はい」「どちらでもない」「いいえ」のうち、自分に当てはまるものに○印をつけてください。

(1) 数ナビを使う授業はおもしろい。 はい どちらでもない いいえ
(2) 数ナビはグラフが簡単に描けるので良い。 はい どちらでもない いいえ
(3) 数ナビを使うと、頭がよけいに混乱してしまう。 はい どちらでもない いいえ
(4) 数ナビを家や寮で勉強するときも使った。 はい どちらでもない いいえ
(5) 数ナビは、計算の確かめができるので便利だ。 はい どちらでもない いいえ
(6) 数ナビを、授業でもっと使ってほしかった。 はい どちらでもない いいえ
(7) 数ナビは、文字式のまま計算できるので良い。 はい どちらでもない いいえ
(8) 数ナビを使うことにより数学が嫌いになった。 はい どちらでもない いいえ
(9) 数ナビを使って新しく発見したことがある。 はい どちらでもない いいえ
(10) 数ナビを私は授業で使うときしか使用しない。 はい どちらでもない いいえ
(11) 数ナビを利用して数学につき考えるようになった。 はい どちらでもない いいえ
(12) 数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる。 はい どちらでもない いいえ
(13) 数ナビのおかげで数学が前よりおもしろくなった。 はい どちらでもない いいえ
(14) 数ナビは、操作が面倒くさい。 はい どちらでもない いいえ
(15) 数ナビを使って数学が前より分かるようになった。 はい どちらでもない いいえ
(16) 数ナビに頼って計算力が落ちたような気がする。 はい どちらでもない いいえ
(17) 数ナビを使うと難しい内容も簡単に見えてくる。 はい どちらでもない いいえ
(18) 数ナビと出会って数学に対する見方が変わった。 はい どちらでもない いいえ
(19) 数ナビは、数学上の疑問をすぐに解決してくれる。 はい どちらでもない いいえ
(20) 数ナビがあると、自分で考えなくなる。 はい どちらでもない いいえ
(21) 数ナビを通し友達と数学の話をする機会が増えた。 はい どちらでもない いいえ
(22) 数ナビが近くにあると、問題を解くとき安心だ。 はい どちらでもない いいえ
(23) 数ナビが無くても、数学は十分に理解できる。 はい どちらでもない いいえ
(24) 数ナビは、できるだけ使わないようにしてきた。 はい どちらでもない いいえ
(25) 数ナビは、関数を理解するのに役立つ。 はい どちらでもない いいえ

[裏に続く]

3 次の (1)〜(10) の項目につき、あなたはどのように思いますか。各項目につき、自分に該当すると思う番号 (1〜5) に○印をつけて下さい。

	全くそうではない	あまりそうではない	どちらともいえない	まあそうである	全くそうである
(1) 私にとって数学は好きな科目だ	1	2	3	4	5
(2) 数学を勉強をする目的は分かっている	1	2	3	4	5
(3) 数学は、計算問題より応用問題の方がおもしろい	1	2	3	4	5
(4) 数学の勉強についていくのは大変だ	1	2	3	4	5
(5) 数学は、他の科目より時間をかけて勉強した	1	2	3	4	5
(6) グラフ・アートは、おもしろかった	1	2	3	4	5
(7) グラフ・アートは、関数の勉強になった	1	2	3	4	5
(8) グラフ・アートをやって、関数がおもしろくなった	1	2	3	4	5
(9) 自由研究は、やってみるとおもしろかった	1	2	3	4	5
(10) 自由研究の事後の解説プリントは、じっくり読んだ	1	2	3	4	5
(11) 自由研究の事後の解説プリントは、参考になった	1	2	3	4	5
(12) 自由研究は、個人でやるよりグループ学習にした方がよい	1	2	3	4	5
(13) 自由研究をやってみて、数学的なことで新しい発見があった	1	2	3	4	5
(14) 自由研究は、授業時間でやれるようにしてほしい	1	2	3	4	5
(15) 自由研究は、レポートだけでなく一人ずつ発表させた方がよい	1	2	3	4	5
(16) 自由研究をやってみて、数学に対する考え方が変わった	1	2	3	4	5

変わった場合は、どのように変わったかを書いてください。

4 「グラフ・アート」や「自由研究」をやってみての感想を書いてください。

5 「数ナビ」に対する感想を書いてください。

6 基礎数学 I の授業に対する全般的な感想を書いてください。

多数の項目への回答、ありがとうございました。

数学に関する意識調査

最初に、マークカードに 氏名を書いてください。各項目への回答は、マークカードの右端にある「良い例」にならい、回答欄の数値 [1][2][3]··· をマークし (縦の太線で塗りつぶし) ます。まず、次の項目に記入します。

- マークカードの左端の「年」の欄で、[1] の欄を、右端の「良い例」にならいマークする。
- 「クラス」欄では、M は [1]、E は [2]、S は [3]、そして C は [4] の欄をマークする。
- 「番号」欄は自分の出席番号をマークする。4 番の人は、左側は [0]、右側は [4] の欄をマークする。32 番の人は、左側は [3]、右側では [2] の欄をマークする。

以下の項目では、マークカードの上側にある 1〜50 の番号のうち、該当する質問項目の回答欄 [1][2][3]··· をマークしてしてください。鉛筆は、濃さが HB 以上を使用してください。

1 次の項目につき、あなたはどのように思いますか。マークカードで、(1)〜(15) の各項目につき、自分に該当すると思う番号 ([1]〜[5]) をマークして下さい。なお、ここでの「数学」は、基礎数学 I や基礎数学 II を含めた「数学全般」として回答してください。

	そう思う	そう思うどちらかといえば	そう思わないどちらかといえば	そう思わない	分からない
(1) 私にとって数学は好きな科目だ	5	4	3	2	1
(2) 数学を勉強をする目的は分かっている	5	4	3	2	1
(3) 数学は、計算問題より応用問題の方がおもしろい	5	4	3	2	1
(4) 数学の勉強についていくのは大変だ	5	4	3	2	1
(5) 数学は、他の科目より時間をかけて勉強している	5	4	3	2	1
(6) 数学の勉強は楽しい	5	4	3	2	1
(7) 数学は、得意な教科ではない	5	4	3	2	1
(8) 勉強すれば、数学で良い成績を取れる	5	4	3	2	1
(9) 数学は大切な科目だ	5	4	3	2	1
(10) 自分は、コンピューターの操作は苦手だ	5	4	3	2	1
(11) 数学の勉強は、将来役に立つ	5	4	3	2	1
(12) 数学は、いろんな計算の仕方が分かればそれでよい	5	4	3	2	1
(13) 数学の問題を、じっくり時間をかけて考えるのは楽しい	5	4	3	2	1
(14) いろいろな公式は、その証明も理解した方がよい	5	4	3	2	1
(15) 難しい問題を友人が解いたときは、自分も頑張ろうと思う	5	4	3	2	1

2 以下は、数学の問題を解くときの、いろいろな考え方を示しています。あなたの考えは、どのようなものですか。次の (16)〜(20) の各項目について、マークカードの該当する番号 [1]〜[4] をマークしてください。

	そうしている	そうしているどちらかといえば	そうしていないどちらかといえば	そうしていない
(16) 数学の問題を解くとき、前に問いた問題と似ているところや違ったところがどこかなどを考えようとしていますか。	4	3	2	1
(17) 数学で新しい内容を勉強したとき、前に勉強したことと、どのような関係があるか考えようとしていますか。	4	3	2	1
(18) 数学の問題が解けなかったとき、自分がなぜ解けなかったかをふり返って考えようとしていますか。	4	3	2	1
(19) 数学の問題が解けたとき、別な解き方を考えようとしていますか。	4	3	2	1
(20) 数学の問題の解き方が分からないとき、あきらめずにいろいろ考えようとしていますか。	4	3	2	1

3 あなたは、貸与された数ナビ (TI–89) で次の操作を行うことができますか、それともできませんか。次の (21)〜(32) の各項目について、マークカードの対応する番号欄で、「はい」の人は [2] を、「いいえ」の人は [1] をマークしてください。

	はい	いいえ
(21) 私は、$y = -x^2 + 2x$ のような関数を定義して、そのグラフを表示させることができる。	2	1
(22) 私は、表示されたグラフの特定部分を拡大することができる。	2	1
(23) 私は、一度定義した関数を自由に変更することができる。	2	1
(24) 私は、グラフ画面の x, y の範囲を自由に指定することができる。	2	1
(25) 私は、グラフの x, y 座標を表にして表示させることができる。	2	1
(26) 私は、グラフの x, y 座標を表にしたとき、表示されている x の間隔を自由に変更することができる。	2	1
(27) 私は、 (−) と − の使い分けができる。	2	1
(28) 私は、$\sqrt{5}$ の値を小数で表示させることができる。	2	1
(29) 私は、式 $(x+1)^4$ の展開式を表示させることができる。	2	1
(30) 私は、式 $x^5 - 1$ を因数分解させることができる。	2	1
(31) 私は、方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解を表示させることができる。	2	1
(32) 私は、授業で説明されていない数ナビの使い方を知っている。	2	1

《基礎数学Ⅰ》数ナビを利用した「自由研究」 (7 月版)

$(x+1)^n$ の展開 (Expand)

数ナビを利用すると、具体的な自然数 n について $(x+1)^n$ の展開式を表示させることができる。たとえば、$(x+1)^4$ であれば、基本画面 (HOME を押して現れる画面) で F2 3:expand を押し、入力行 (一番下の行のこと) で expand($(x+1)^4$) ENTER とすればよい。括弧が 2 つ必要なので注意すること。

この機能を利用して、できるだけ多くの n について $(x+1)^n$ の展開式がどうなるかを調べてください。そして、展開式の係数の現れ方に、何かの規則性がないかどうかを考えてください。展開式をそのまま書かないで、係数だけを書き出した方が規則性を見抜きやすいです。この中には、沢山の規則性が含まれています。2 つ 3 つ見つけただけで安心しないで、できるだけ多くの規則性を発見してください。そして、可能なら、なぜそうなるのか、その理由を考えてください。また、$(x+1)^n$ の展開式の左から k 番目の係数を記号で ${}_n\mathrm{C}_k$ と表すことにするとき、${}_n\mathrm{C}_k$ を n, k を使った式で表すことはできないでしょうか。

$(x+1)^n$	降べきの順に展開したときの係数
$(x+1)^1$	1　1
$(x+1)^2$	1　2　1

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下に、発見したことや、気づいた特徴などを書いてください。

[考えてみた感想]

$x^n - 1$ の因数分解 (Factor)

数ナビを利用すると、具体的な自然数 n について $x^n - 1$ を因数分解させることができる。たとえば、$x^4 - 1$ であれば、基本画面 (HOME を押して現れる画面) で F2 2:factor を押し、入力行 (一番下の行のこと) で factor($x^4 - 1$) ENTER とすればよい。

この機能を利用して、できるだけ多くの n について $x^n - 1$ の因数分解がどのような式になるかを調べてください。そして、指数 n と因数分解された式との間に、何かの規則性がないかを考えてください。この中には、沢山の規則性が含まれています。2 つ 3 つ見つけただけで安心しないで、できるだけ多くの規則性を発見してください。そして、可能なら、なぜそうなるのか、その理由を考えてください。

$x^n - 1$		因数分解された式
$x^1 - 1$	$=$	$x - 1$
$x^2 - 1$	$=$	$(x - 1)(x + 1)$

以下に、発見したことや、気づいた特徴などを書いてください。

[考えてみた感想]

《基礎数学 I》夏期休業課題

夏期休業の課題は、以下の 3 点です。

(1) このプリントにある問題をレポート用紙に計算過程とともに回答する。
(2) 「実力確認問題」を時間 (60 分) を自分で計ってやり、そのまま (修正しないで) 提出すること。
(3) このプリントの裏にある自由研究のうち、どれか一つを選んでレポート用紙にまとめて提出すること。

提出日：(1)(2) は 8 月 30 日 (金) に提出。(3) は 9 月 7 日 (水) までに提出。

- **どうしても分からない問は飛ばしてもよいが、必ず提出すること。成績に関係します。**
- **すぐ分かる問以外は答えだけを書かないで途中の計算過程も書くこと。**
- **計算問題では数ナビは答え合わせとして利用する。ただし、表示結果を丸写ししないこと！**
- **計算過程が必要な箇所で答しか書いていない場合は書き直してもらうことがある。**

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

展開　(No.1–2)　数ナビでの確認は F2 3(expand) を利用し、expand$((x^2-3)^3)$ などとする。

1　同じものを一つの文字で置きかえて、次の式を展開せよ。

(1) $(2x^2+x+1)(2x^2+x-1)$　(2) $(2x^2+x-1)(2x^2-x-1)$　(3) $(2x^2-x+1)(2x^2+x-1)$
(4) $(a+2b+3c)(a+2b-3c)$　(5) $(a+2b-3c)(a-2b-3c)$　(6) $(a+2b-3c)(a-2b+3c)$

2　公式 $\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$ は覚えること!!
この公式を利用して、次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　(2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$　(3) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
(4) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$　(5) $(1-3b)(1+3b+9b^2)$　(6) $(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$

3　$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ は覚えること!! この公式を利用して、次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3$　(2) $(2x-1)^3$　(3) $(3x+2y)^3$　(4) $(x^2-3)^3$　(5) $(x^2-y^2)^3$

因数分解　(No.3)　数ナビでの確認は F2 2(factor) を利用し、factor$(6x^2-7x-3)$ などとする。

4　**公式を利用して**、次の式を因数分解せよ。共通なものがあったら、まず、くくること。

(1) $9x^2-16$　(2) $18x^2-12x+2$　(3) $18x^2-8y^2$
(4) $4x^2+20x+25$　(5) $6x^2-7x-3$　(6) $12x^2+21x+9$

5　$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$ は頻出する。この公式を利用して、次の式を因数分解せよ。

(1) x^4-16　(2) $(x+2)^2-1$　(3) $(x+y)^2-(x-y)^2$
(4) $4y^2-(x-2y)^2$　(5) $(2a+b)^2-(a-2b)^2$　(6) $(2x-3y-1)^2-1$

6　一つの文字について降べきの順に整理して、次の式を因数分解せよ。

例　$x^2+2xy+y^2-2x-2y-3=x^2+(2y-2)x+(y^2-2y-3)$ ⟵ 次数の順に**整理**
$=x^2+(2y-2)x+(y+1)(y-3)=(x+y+1)(x+y-3)$
これは、$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$ という因数分解と同じタイプである。

(1) $x^2-2y^2+xy+2x+7y-3$　(2) $x^2-2y^2+xy-4x+y+3$
(3) $2a^2+3ab-2b^2+a+7b-3$　(4) $2a^2-ab-b^2-7a-2b+3$

整式の除法　(No.4, 7) 整式 A を整式 B で割ったときの商を Q、余りを R とすると、$A=BQ+R$ と表せるので、$\dfrac{A}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ である。この変形で、分子の次数を分母の次数より下げることができる。

7　次の分数式の、分子を分母で割った商と余りを求めて、分子が簡単になるように変形せよ。
数ナビでの確認は F2 7(propFrac) を利用し、propFrac$((2x^3+x^2+x-1)/(x-1))$ などとする。

(1) $\dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x-1}$　(2) $\dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x^2-1}$　(3) $\dfrac{2x^3+x^2+x-1}{x^3-1}$

剰余の定理と因数定理　(No.5)
整式 $P(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを R とすると $P(x)=(x-a)Q(x)+R$ である。特に、$R=P(a)$ である。また、$P(a)=0$ であれば、$P(x)=(x-a)Q(x)$ と因数分解できる。

8　剰余の定理を利用して、次の問に答えよ。
(1) $P(x)=x^3+2x^2+ax+1$ が $x+1$ で割り切れるように、a の値を定めよ。
(2) $P(x)=x^6+ax^3+b$ は、$x+2$ でも $x-1$ でも割り切れる。a,b の値を求めよ。
(3) $P(x)=x^3+ax^2+bx+8$ は $x-2$ で割り切れ、$x+3$ で割ると 20 余る。a,b の値を求めよ。

9　因数定理を利用して、次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-3x-2　(2) x^3-2x^2-3x+6　(3) $3x^3+x^2-8x+4$
(4) x^3-x-6　(5) x^4-5x^2+4　(6) x^4-3x^2-4

分数式の計算　(No.6–8)

10　次の分数式を計算して簡単にせよ。
数ナビで確認するには、(1)(2) は、そのまま ((分子)/(分母)) × ((分子)/(分母)) ÷ ((分子)/(分母)) のようにする。分子と分母の他に、分数自体も括弧で区切ることが必要である。(3)(4) は、やはり分子と分母を括弧で区切りながら (分子)/(分母) +(分子)/(分母) のように入力する。

(1) $\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1-x^2}{1+y}\div\dfrac{x+x^2}{1-y^2}$　(2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+8x+15}$
(3) $\dfrac{1}{x^2-x-6}+\dfrac{x}{x^2-2x-8}$　(4) $\dfrac{x-2y}{x^2-2xy-8y^2}-\dfrac{x-3y}{x^2-4xy}$
(5) $\dfrac{x-\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}-2}$　(6) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x-2}}{1-\dfrac{2}{x+2}}$

絶対値　(No.9)
実数 a と原点 0 との距離を $|a|$ で表す。$a\geqq 0$ のとき $|a|=a$、$a<0$ のとき $|a|=-a$ である。
数ナビでの確認は、たとえば $|2-x|$ は、abs $(2-x)$ のようにする。このとき、x の範囲を指定するには、7 の横の左側のキー | を利用して、たとえば、abs $(2-x)$ | $x>3$ のようにする。不等号は、1 番下のキーの黄色の機能である。

11　次の値を求めよ。(4)〜(6) は簡単にせよ。π は円周率である。ともかく、絶対値の内部が正になるか、負になるかを調べればよい。

(1) $|5-2|$　(2) $|1-\pi|$　(3) $|\sqrt{2}-3|$
(4) $|x-2|,\ (x>3)$　(5) $|2-x|,\ (x>3)$　(6) $|x|+|1-x|,\ (x>3)$

平方根　(No.10) $\sqrt{a^2}=|a|$ である。$x>2$ のとき、$\sqrt{4-4x+x^2}=|2-x|=-(2-x)=x-2$

12　次の式を計算をせよ。分数のものは分母を有理化すること。

(1) $(3+4\sqrt{2})^2$　(2) $(3+\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})$　(3) $(3+\sqrt{2})^3$
(4) $\dfrac{1}{4-\sqrt{3}}$　(5) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$　(6) $\dfrac{3-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

13　次の式を、根号も絶対値も使わない式で表せ。

(1) $\sqrt{\pi^2-4\pi+4}$　(2) $\sqrt{\pi^2-6\pi+9}$　(3) $\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$
(4) $\sqrt{a^2-2a+1},\ (a>1)$　(5) $\sqrt{a^2-4a+4},\ (a<0)$　(6) $\sqrt{4a^2+4a+1},\ (a<-1)$

14 $x=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ のとき、次の値を求めよ。(1)(2) は代入して計算。(3) 以降は、(1)(2) の結果を利用する方向で変形する。たとえば、$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ である。

(1) $x+y$　(2) xy　(3) x^2+y^2

(4) $(x+1)(y+1)$　(5) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$　(6) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}$

複素数　(No.11–12) $i^2=-1$ となる新しい数を考える。$a+bi$ の計算は、$i^2=-1$ に注意するだけで普通に計算してよい。$\alpha=a+bi$ のとき、$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ を α の絶対値、$\overline{\alpha}=\overline{a+bi}=a-bi$ を α の共役複素数という。$k>0$ のときは、$\sqrt{-k}=\sqrt{k}i$ である。

数ナビで確認するには、虚数単位 i は [2nd] [CATALOG] を利用する。[alpha] 9 ではないので注意する。絶対値は、前と同じ abs( ) である。

15 次の式を計算して簡単にせよ。

(1) $(3-2i)^2$　(2) $(3-2i)(5+4i)$　(3) $(3-2i)^3$

(4) $\dfrac{1}{4+3i}$　(5) $\dfrac{4+3i}{3-2i}$　(6) $\dfrac{1}{3-2i}+\dfrac{1}{3+2i}$

(7) $(3-\sqrt{-8})(4+\sqrt{-2})$　(8) $\dfrac{1}{4-\sqrt{-3}}$　(9) $\dfrac{2-\sqrt{-3}}{4+\sqrt{-3}}$

16 次の値を求めよ。

数ナビで共役複素数の計算を行うには、たとえば $\overline{3+2i}$ であれば、conj(3 + 2i) のようにする。conj は [alpha] キーを利用する。共役複素数は、conjugate complex number という。

(1) $|4-3i|$　(2) $\left|(5-2i)(3+4i)\right|$　(3) $\left|\dfrac{3+2i}{4-3i}\right|$

(4) $\overline{4-3i}$　(5) $\overline{(5-2i)(3+4i)}$　(6) $\overline{\left(\dfrac{3+2i}{4-3i}\right)}$

17 $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{2}i}{2}$, $\beta=\dfrac{3-\sqrt{2}i}{2}$ のとき、次の値を求めよ。(1)(2) は代入して計算。(3) 以降は、(1)(2) の結果を利用する方向で変形する。

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(5) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$　(6) $\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}$

自由研究

次の課題から 1 つを選択して、何かの規則性がないかどうかを数ナビを利用して調べてください。そして、その結果をレポートにまとめてください。

自由研究の「まとめ方」

まとめ方は自由です。数ナビにどのようなことをやらせたらどのような結果が表示されたか。いろいろやっているうちにどのようなことが予想されてきたか。その予想を確かめようとして、どのようなことをしたか。その予想が正しいことを、どのような理由で確信したか。あるいは、その予想が誤りであることを、どのようにして分かったか。あるいは、どのようなことが原因で、その予想の真偽を確かめることができなかったか。などなど、各自の自由な思考の経過をまとめてくればよいのです。予想が正しいと確信できるときは、その証明も考えてみてください。また、いろいろやってみたが、規則性は分からなかった、というときは、どのようなことをやってみたのか、そのやった内容を書いてきてください。

(1) 繁分数の値

次の繁分数の値を求めてみてください。そして、同様のことをもうちょっと続けてください。そして、一般に、これらの分数の間にはどのような関係があるのか、$\dfrac{B}{A}$ の形にまとめたときの分子と分母はどのような仕組みで変化していくのか、また、その分数の値はどのような値に近づいていくのかなどを考えてください。数ナビで値を求めるには、たとえば 4 番目の値の場合は、「1/(1+1/(1+1/(1+1)))」となります。括弧の対応関係に注意してください。値を小数で表示させるには [ENTER] ではなく、[♦] [ENTER] です。

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}},\quad \cdots$$

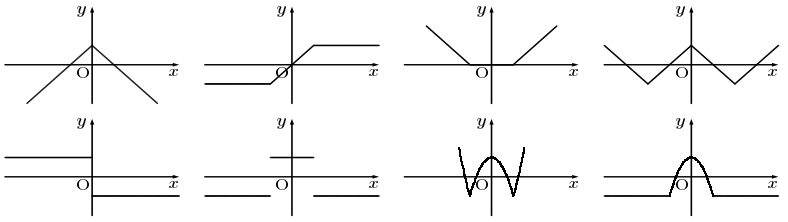
(2) 絶対値関数のグラフ

$y=|x|$ のグラフは、数ナビでは [♦] [F1] で、たとえば $y1=\mathrm{abs}(x)$ として入力します。abs は [alpha] を利用します。あるいは、[CATALOG] [=] を押しても出てきます。$y=|x|$ は、$x\geqq 0$ のときは $y=x$ であり、$x<0$ のときは $y=-x$ ということです。

そこで、$y1$ には適当な関数を定義し、$y2$ は $y2=\mathrm{abs}(y1(x))$ として $y1$ と $y2$ のグラフを比較してください。$y2=|y1(x)|$ としたことになります。グラフを表示させるには [♦] [F3] です。グラフがうまく表示されないときは、[F2] 4 を押してみてください。たとえば、[♦] [F1] で $y1=x^2-1$, $y2=\mathrm{abs}\,(y1(x))$ として [♦] [F3] でグラフを表示させると、どのようなグラフが表示されるでしょうか。これは、$y=x^2-1$ と $y=|x^2-1|$ のグラフを表示させたことになります。ただし、2 つのグラフが重なって分かりにくいので、[♦] [|] で Leading Cursor の箇所を ON に変更した方がグラフが分かりやすくなります。

$y1$ にいろいろな関数を定義して、$y1$ と $y2=|y1(x)|$ のグラフを比較してください。そして、一般に $y=f(x)$ と $y=|f(x)|$ のグラフの間にはどのような関係があるかを考えてください。さらに、$y=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, $y=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$, $y=\big||f(x)|-p\big|$ などは、どのようなグラフになるでしょうか。それは、何故でしょうか。

絶対値を含む関数や、それらの和・差・積・商を利用すると、いろいろなグラフを描くことができます。次のグラフは、どのような関数のグラフでしょうか？ また、絶対値を利用して、もっとおもしろいグラフはできないでしょうか。



《基礎数学 I》「自由研究」(7 月版) の解説

$(x+1)^n$ の展開
基本画面 [HOME] の展開 [F2] 3(expand) を利用して、$(x+1)^n$ の展開式がどうなるかを調べてください。そして、展開式の係数の現れ方に、何かの規則性がないかどうかを考えてください。

解説　まず、できるだけ多くの n について、その展開式を書き出すことが必要です。$(x+1)^n$ の展開式の係数の間には、実に多くの性質があります。それを、どれだけ見つけることができたでしょうか？

$$
\begin{aligned}
(x+1)^1 &= x+1\\
(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\
(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\
(x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1\\
(x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\\
(x+1)^6 &= x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1\\
(x+1)^7 &= x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1\\
(x+1)^8 &= x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1\\
(x+1)^9 &= x^9+9x^8+36x^7+84x^6+126x^5+126x^4+84x^3+36x^2+9x+1
\end{aligned}
$$

係数だけを書き出してみると、より規則性が明確になるかもしれません。

$$
\begin{array}{ll}
(x+1)^1 & 1\quad 1\\
(x+1)^2 & 1\quad 2\quad 1\\
(x+1)^3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1\\
(x+1)^4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
(x+1)^5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
(x+1)^6 & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
(x+1)^7 & 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
(x+1)^8 & 1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1\\
(x+1)^9 & 1\quad 9\quad 36\quad 84\quad 126\quad 126\quad 84\quad 36\quad 9\quad 1
\end{array}
$$

■ この展開式から、多数の人が以下のことに気づきました。

- ピラミッド型になる。
- 最大次数の項は n 次である。
- 初めと最後の係数は 1 である。両端の係数は 1 である。
- 展開式の次数は 1 つずつ小さくなる。
- 係数は左右対称である。真中を境に数字が同じになる。
  左から k 番目と右から k 番目の係数は同じである。
- n が奇数のときは中央に同じ係数がある。
- n が奇数のときは最大の係数が 2 つあり、偶数のときは 1 つである。
- 両端の隣りの係数は指数と同じ数がくる。2 番目の係数は、指数 n と同じである。
  x^{n-1} と x の係数はいずれも n である。
- 係数の個数は、$n+1$ 個である。
- 次数が偶数のとき係数の個数は奇数個、次数が奇数のときの係数の個数は偶数個である。
- 隣りあう 2 つの係数の和は、その次の展開式の係数になる。

■ 以下の人は、上記のことを別な形で表現しています。

- 降べきの順に展開しても昇べきの順に展開しても係数の並び方は同じである。[M] 北田、昆
- 次数が奇数のとき、$(n+1)/2$ 個ずつに分けると、左右の数が対称に並んでいる。[E] 藤井
- 次数が増えるにつれて、項の数は 1 つずつ増加していく。[M] 菊池侑、[E] 奥村
- $(x+1)^n$ の式の左から k 番目の項の係数と $k+1$ 番目の項の係数を足すと、$(x+1)^{n+1}$ の式の $k+1$ 番目の項の係数になる。[E] 小野寺幸、[S] 竹花、橋場、

■ 指数が n のときの係数を、左から順に 0 番目、1 番目、2 番目、$\cdots$ として k 番目の係数を ${}_nC_k$ で表すことにします。たとえば、$n=3$ のときは、${}_3C_0=1,\ {}_3C_1=3,\ {}_3C_2=3,\ {}_3C_3=1$ です。この記号を利用すると、上記の性質は次のような式で表現されます。詳しくは、2 年の数列の箇所で学びます。教科書の 186 頁を見てください。一般には、$(x+1)^n$ の展開式を**二項定理**といいます。

両端の係数は 1 である。	${}_nC_0={}_nC_n=1$
係数は左右対称である。	${}_nC_k={}_nC_{n-k}$
左から 2 番目の係数は指数 n と一致する。	${}_nC_1={}_nC_{n-1}=n$
左から 3 番目の係数は、	${}_nC_2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$
隣り合う 2 つの係数の和は、次の展開式の係数である。	${}_nC_k+{}_nC_{k+1}={}_{n+1}C_k$

なぜ、隣り合う係数の和が次の展開式の係数になるかは、たとえば、$(x+1)^4=(x+1)(x+1)^3$ を実際に計算してみればよいでしょう。

$$
\begin{aligned}
(x+1)^4 &= (x+1)(x+1)^3\\
&= (x+1)(x^3+3x^2+3x+1)\\
&= x^4+3x^3+3x^2+x \qquad \leftarrow x \text{ を掛けた}\\
&\qquad\ x^3+3x^2+3x+1 \qquad \leftarrow 1 \text{ を掛けた}\\
&= x^4+(3+1)x^3+(3+3)x^2+(1+3)x+1\\
&= x^4+4x^3+6x^2+4x+1
\end{aligned}
$$

たとえば、$(x+1)^4$ の x^2 の項は、$(x+1)^3$ の展開式に x を掛けて x^2 になる部分と、1 を掛けて x^2 になる部分の和として得られるので、$(x+1)^3$ の展開式の隣り合う部分の係数になるのです。

■ 以下の人は、これ以外のことに気づいています。⋆印は、私の解説です。

- 指数 n を 2 で割った次数の項の係数が最大の係数である。n が奇数のときは割り切れないので、最大の係数が 2 つある。[S] 高橋英
- n が素数のとき、係数の最大値は 2 つある。[S] 渡辺仁
  (素数でなくとも、奇数でも成立します。)
- n が偶数のとき、中央の係数は偶数である。[S] 戸羽、[C] 川又
- 係数が奇数のときの中央の 2 つの係数の和は、次の展開式の係数の真中の数になる。
  [M] 菊池謙、[S] 菅原佑、[C] 坂本
- $(x+1)^n$ の左から 1 つ目と 2 つ目の係数の和は、$(x+1)^{n+1}$ の左から 2 つ目の係数である。
  [M] 渡辺純、[E] 千葉元
- 指数が奇数のとき、1 番大きい係数を 2 倍すると、次の展開式の係数の最大の数になる。
  [C] 阿部賢、佐藤充、津久井
- 指数が偶数のとき、1 番大きい係数と 2 番目に大きい数を足すと、次の展開式の係数の最大の数になる。[C] 阿部賢、津久井
- 左から 2 番目の係数が n になるのは、$x+1$ を n 回掛けると x^{n-1} が n 回繰り返されるからである。[S] 梅原
- 左から 2 番目の係数は、$1,2,3,4,\cdots$ になる。
  [M] 佐々木勝、渡辺純、名無し、[E] 長谷川、三浦大、[S] 伊勢、[C] 名無し
- 左から 2 番目の係数は、1 つずつ増えていく。[M] 小田嶋、[S] 菊池麻、[C] 高橋快、三浦千
- 左から 3 番目の係数 $1,3,6,10,15,\cdots$ は、それぞれ $2,3,4,5,\cdots$ ずつ増加している。
  [M] 菊池侑、渡辺純、名無し、[E] 中村直、[S] 菊池麻、[C] 及川昌、高橋快、和泉
- 左から 3 番目の係数は、増加量が 1 つずつ増えている。[M] 小田嶋、[E] 丸山

- 左から 3 番目の係数 $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$ は、奇数、奇数、偶数、偶数の順に並んでいる。
  [M] 鈴木康、滝川、
- $(x+1)^{n+1}$ の左から 3 番目の係数は、$(x+1)^n$ の左から 3 番目の係数に指数 n を加えたものである。[M] 北田、鈴木康、滝川、[E] 伊藤、高橋直
- 左から 3 番目の係数は $\dfrac{n^2-n}{2}$ である。$n \times \dfrac{n-1}{2}$ である。
  [E] 加藤裕、藤井、[C] 菅野、小岩、優、和泉
- 左から 3 番目の係数は、1 から $n-1$ までを足した数である。たとえば、$n=5$ のとき 3 番目の係数 10 は、$1+2+3+4=10$ である。[C] 今野、佐藤充
- n が奇数 $2k+1$ のとき、左と右から 3 番目の係数は、$n=2k+1$ に k を掛けた数である。
  [C] 坂本、佐藤紀、畠山
- n が偶数のとき、左と右から 3 番目の係数は、$n \times \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{2}$ である。[C] 宮永、畠山
- $n = 2k$ のとき、左から 2 番目の係数を $k-1$ 倍して k を加えると 3 番目の係数になる。$n = 2k+1$ のときは、左から 2 番目の係数を k 倍すると 3 番目の係数になる。たとえば、$n=6=2\times3$ のときは、$6\times(3-1)+3=12+3=15$ が 3 番目の係数であり、$n=7=2\times3$ のときは、$7\times3=21$ が 3 番目の係数である。[E] 佐々木元
- 左から 4 番目の係数 $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$ は、それぞれ $2, 3, 4, 5, \cdots$ ずつ増加している。
  [M] 渡辺純、名無し、[E] 中村真
- 指数 n が奇数のとき、中心にある係数は 2 で割り切れる。[E] 奥村
- 左から k 番目と右から k 番目の係数の和は偶数、商は 1、差は 0 になる。[E] 柴岡
- 左から 2 番目と右から 2 番目の係数を足すと、その係数の 2 倍になる。[S] 高橋秀
- 右側の端の 2 つの値を加えると、次の展開式に右から 2 番目の係数になる。[C] 高橋君
- 左から 3 番目と右から 3 番目の係数を足して n で割ると、$n-1$ になる。[S] 高橋秀
- 指数が 1 増えるごとに、係数の和も増える。[E] 高橋新
- 係数の和は、n を 1 つ増やすごとに 2 倍になる。係数の和を 2 倍した値は、次の式の係数の和である。[M] 大崎、[E] 赤坂、川村、高橋新、高橋賢、長谷川、千葉元、[S] 菊池麻、竹花、戸羽、橋本、[C] 青沼、伊藤由、及川珠、小笠原孝、小岩、佐藤光、千葉由
- 係数の和は偶数である。係数の和は 2 の倍数である。[M] 大崎、[E] 川村、吉田紘、八嶋、[C] 阿部賢、佐々木泰、佐藤光、高橋君、津久井、山下
- $n \geqq 2$ のとき、係数の和は 4 の倍数である。[M] 大崎
- 係数を合計すると、2^n になる。
  [M] 原田、[E] 菅原拓、[S] 菊池奈、生内、佐藤大、高橋秀、橋場、宮
  ⋆ $(x+1)^n$ の展開式なので、$x=1$ のときを考えてみれば明かです。たとえば、
  $2^4=(1+1)^4=1+4+6+4+1$　となります。
- 1 を除いた係数の和は、2^n ずつ増加していく。
  その和は、2, 6, 14, 30, 62, $\cdots$ であり、4, 8, 16, 32, $\cdots$ ずつ増加している。[E] 菅原拓
- 斜めに係数を加えると、右下の係数がその和になる。たとえば、$1+3+6=10$, $1+4+10=15$ であり、10, 15 はいずれも右下にある。[E] 赤坂
- 指数が偶数 y のとき、3 番目の係数を 2 番目の係数で割った値は、$\dfrac{y-1}{2}$ である。たとえば、$n=8$ のとき、$\dfrac{28}{8}=\dfrac{7}{2}=\dfrac{8-1}{2}$ である。[S] 橋本
- n が偶数のとき、3 番目の係数は n で割り切れないが、n が奇数のときは割り切れる。
  [C] 千葉み
- n が偶数のとき、3 番目の係数を n で割ると、$n \geqq 6$ のときの商は n が増えるごとに 1 から 1 ずつ増える。n が奇数のときの商は、$n \geqq 3$ のとき n が増えるごとに 1 から 1 ずつ増える。
  [C] 千葉み
- (1 以外の) 係数は、n の約数の倍数である。[C] 門脇
- 展開式の項の最大次数は n である。[E] 長谷川
- 両端の 1 以外の係数は、n を素因数分解したときの素因数のどれかで割り切ることができる。
  [S] 佐藤大
- $n=4$ までは、係数を繋げてできる数は 11^n である。たとえば、$11^2=121$, $11^3=1331$ である。[S] 宮
  ⋆ 類似のことが $n>4$ でも成立します。係数の第 2 位以上の値は、次々に左側の係数に加えていけばよいのです。たとえば、$n=6$ のときは、右側の 15 の第 2 位の値 1 を、その左側の 20 に加え、得られる 21 の第 2 位の値の 2 を、その左側の 15 に加え、得られる 17 の第 2 位の値である 1 をその左側の 6 に加える。すると、1771561 という数値が得られ、これは 11^6 です。$(x+1)^6$ の展開式を書いて、$x=10$ を代入してみれば理由が分かります。
- $(x+1)^n$ のグラフを考えると、$n=1$ のときは右上がりの直線、n が偶数のときは放物線のような形で、奇数のときは原点に関して対称なグラフになる。(実際には、$y=x^n$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動しているので、点 $(-1, 0)$ に関して対称です。) [C] 山下
- 数ナビは、$(x+1)^{128}$ まで計算できる。[M] 高橋朋

■ 係数の一般式については、[E] 奥田君が ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ という式を導いてきました。この記号の意味は、教科書の 182 頁を見てください。昨年も、この係数を作り出す規則性を見い出した人がいます。簡単な規則性で、「ある項の係数と指数を掛けて、その項が左から数えて何番目かという数で割ると、次の項の係数になる」というものです。たとえば、$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ の場合、$1\times4\div1=4$, $4\times3\div2=6$, $6\times2\div3=4$, $4\times1\div4=1$ となります。これを、$(x+1)^n$ の展開式で考えた場合、最初の係数は 1 であり、2 番目の係数は $1\times n\div1=n$、3 番目の係数は $n\times(n-1)\div2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$、4 番目の係数は $\dfrac{1}{2}n(n-1)\times(n-2)\div3=\dfrac{1}{2\cdot3}n(n-1)(n-2)$ などと、次々に係数が求まっていきます。

■ 以下は、誤った指摘です。

- 同じ数字が 2 度出てくる。(n が偶数のとき、最大の係数は 1 個だけです。)
- $n=3$ 以外は、最大値は偶数である。($n=7$ のときは奇数です。)
- n が偶数のとき、最大の係数は $n\times n-2$ である。(全々違います。)
- 指数が偶数のとき、両端の 1 以外の係数は、すべて偶数である。($n=6$ のとき奇数もあります。)
- n が偶数のときの最大の係数は、$n-1$ のときの最大の係数の 2 倍である。
- 指数 n が 5 の倍数のとき、両端の 1 以外の係数は 5 の倍数である。($n=10$ のとき違います。)
- 5 で割り切れる数は、逆三角形状に固まっている。($n=10$ のとき違います。)
- 係数の和は n^2 である。(n^2 ではなく、2^n です。)
- 各項の係数は n で割り切れる。($n=4$ のときは、そうではありません。)
- n が奇数のとき、1 以外の係数は n で割り切れる。($n=9$ のときは、そうではありません。)
- n が奇数のとき、係数は n の素因数で割り切れるが、n が偶数のときは、真ん中の数だけ割り切れない。($n=4$ のときは割り切れます。)
- 指数が素数のとき、2 番目の数に素数の順番の数を掛けると、3 番目の係数になる。($n=3, 5, 7$ では成立しているが、$n=11$ のとき、11 は 4 番目の素数である。)

(2) x^n-1 の因数分解

基本画面 HOME の因数分解 F2 2(factor) を利用して、x^n-1 の因数分解がどのような式になるかを、できるだけ多くの n について調べてください。そして、指数 n と因数分解された式との間に、何か規則性がないかを考えてください。

解説　まず、できるだけ多くの自然数 n について x^n-1 を因数分解した式を書き出してみることが必要です。そして、自然数 n と因数分解された式との関係を眺めていると、幾つかの特徴的なことに気がついてくるでしょう。

$$
\begin{aligned}
x^1-1&=x-1\\
x^2-1&=(x-1)(x+1)\\
x^3-1&=(x-1)(x^2+x+1)\\
x^4-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1)\\
x^5-1&=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^6-1&=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\\
x^7-1&=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^8-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\\
x^9-1&=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\\
x^{10}-1&=(x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\\
x^{11}-1&=(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\
x^{12}-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}
$$

■ この因数分解された式を見て、多くの人が以下のことに気づきました。

- $x-1$ が必ず含まれる。
- 因数の係数は ±1 だけである。
- n が偶数のときは $(x-1)(x+1)$ が含まれる。
- n が素数のときは、$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ の形になる。

■ $P(x)=x^n-1$ とおくと $P(1)=1-1=0$ となるので、因数定理により x^n-1 は $x-1$ で割り切れ、$x^n-1=(x-1)Q(x)$ の形になります。$Q(x)$ は x^n-1 を $x-1$ で割った商です。組み立て除法で考えると、

1						−1	
	1	1	1	⋯	1	1	(1
1	1	1	1	⋯	1	0	

となるので、$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ となります。

■ 上記の他に、以下のことについての指摘がありました。⋆印の箇所は、私の解説です。

- 因数分解した式の因数の最高次数は $n-1$ である。[E] 川村
- 因数分解した式の x の最高次数の和は n である。
  [M] 海田、原田、村上、[E] 佐々木優、千葉元、八嶋、[S] 菊池麻、武田、[C] 阿部、及川昌、門脇、田中、津久井
- 各因数の先頭を掛けると x^n になる。[S] 梅原
- 因数分解した式の x を含む部分の係数の和は n である。[E] 吉田
- n が奇数のとき、$x-1$ の次の因数の次数は偶数である。[M] 海田
- n が奇数のとき、$x-1$ 以外の式は $n-1$ 次の多項式である。
  [M] 北田、鈴木健、滝川、[E] 長谷川
- $x-1$ で割った式は $n-1$ 次式である。[M] 似田貝
- n が奇数のとき、$x-1$ 以外の式を展開した式の係数は 1 である。[M] 小野寺敏
- n が奇数のとき、$x-1$ 以外の部分を展開すると $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ になる。
  [E] 高橋新、鈴木広、八嶋、[S] 梅原、田口
- n が奇数のときは、$x-1$ の後に $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ と x が $n-1$ 回続く式ができる。
  [S] 佐藤大、橋場
- n が奇数のとき、因数分解した式の x の数は n と同じ。[S] 佐藤健
- n が奇数 $2k+1$ のとき、因数分解された式の真ん中に x^k の項がある。または、真ん中にある項の次数の和は k になる。[S] 菊池麻
- n が素数のときは、2 つの式に因数分解される。[C] 千葉美
- n が偶数のとき、$(x+1)(x-1)$ 以外の因数の最高次数は偶数である。[S] 菊池奈
- n が偶数のとき、$(x-1)(x+1)$ 以外の部分を展開すると、$x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+x^2+1$ になる。[E] 高橋新、[S] 梅原
- n が偶数 $n=2m$ で、m が奇数のとき、x^n-1 の因数分解した式は、x^m-1 を因数分解した式を含む。[S] 菊池奈
- n が偶数のとき、$(x-1)(x+1)$ 以外の式を展開すると、$x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+x^2+1$ になる。この式に x を含む項は $n/2-1$ 個ある。[S] 佐藤大、橋場
- 指数 n を 2 倍、3 倍した式の因数分解された式には、次のように $x^2-1=(x-1)(x+1)$ や $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ が含まれる。[M] 今野
  $x^{2n}-1=(x-1)(x+1)(x^n+1)$, $x^{3n}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^{2n}+x^n+1)$
- n が 3 の倍数のときは、必ず x^2+x+1 が含まれる。[M] 菊池謙、鈴木健、菅間、滝川、森、渡辺、[E] 伊藤彩、加藤裕、佐々木元、藤井、村上、[S] 伊勢、梅原、田口、橋本、[C] 及川昌
  ⋆ $x^3=X$ とおくと、$x^{3n}-1=(x^3)^n-1=X^n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1)$ であり、$X-1=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ となるからである。
- n が 4 の倍数のときは、必ず x^2+1 が含まれる。[M] 菊池謙、鈴木健、滝川、[E] 伊藤彩、加藤裕、佐々木元、藤井、村上、[S] 伊勢、梅原、田口、橋本、[C] 及川昌、坂本
  ⋆ $x^4=X$ とおくと、$x^{4n}-1=(x^4)^n-1=X^n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1)$ であり、$X-1=x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ となるからである。
- n が 5 の倍数のときは、必ず $x^4+x^3+x^2+x+1$ が含まれる。[E] 伊藤彩、加藤裕、藤井、村上、[S] 伊勢、梅原、田口、橋本、[C] 及川昌
  ⋆ $x^5=X$ とおくと、$x^{5n}-1=(x^5)^n-1=X^n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1)$ であり、$X-1=x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ となるからである。
- n が 6 の倍数のときは、必ず $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ が含まれる。[M] 滝川、[S] 伊勢、橋本
  n が 6 の倍数のときは x^2-x+1 が含まれる。[E] 伊藤彩、加藤裕、藤井、村上、[S] 田口
  ⋆ $x^6=X$ とおくと、$x^{6n}-1=(x^6)^n-1=X^n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1)$ であり、$X-1=x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$ となるからである。
- $n=3$ のときから 5 つの式を挟んだ次の式には x^2+x+1 が含まれる。[E] 佐々木元
  ⋆ $n=3$ から 5 つを挟んだ式は $n=9$、そこからさらに 5 つの式を挟んだ式は $n=15$ のときなので、一般に $n=6(k-1)+3=6k-3$ のときである。そのとき、$x^n-1=x^{6k-3}-1=(x^3)^{2k-1}-1$ となるので、$x^3=X$ とおくと、$x^n-1=X^{2k-1}-1$ は $X-1=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ を因数にもつので、x^2+x+1 が含まれる。
- n が 7 の倍数のときは、必ず $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ が含まれる。[E] 村上、[S] 梅原、橋本、[C] 及川昌
- n が 8 の倍数のときは、必ず x^4+1 が含まれる。[E] 村上

- n が 8 の倍数のときは、$(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ が含まれる。[S] 橋本
  - ⋆ $x^8=X$ とおくと、前と同様に $X-1=x^8-1=(x^4+1)(x^4-1)$ を因数に持つからです。
- n が 9 の倍数のときは、$(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ が含まれる。[S] 橋本
- n が奇数のとき、$x^{2n}-1$ の因数分解の式には、x^n-1 の因数分解に現れた式で係数が -1 のものが含まれる。たとえば、$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ に対して、$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ である。[S] 橋本
- n が 2 のべき乗のときは $x^{\frac{n}{2}}+1$ が含まれる。たとえば、$x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ である。[S] 梅原
- n は、因数分解した式の個々の式の次数よりも大きい。[E] 柴岡、名無し

■ 以下は、誤った指摘です。

- n が奇数のときは $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ の形である。n が奇数のときは括弧の式は 2 つだけである。
  - ⋆ $(x-1)$ 以外の部分を展開すればこのようになりますが、数ナビの表示する式は必ずしもそうではありません。たとえば、x^9-1 がそうです。n が素数のときのことを言っているのか、$x-1$ 以外の部分を展開した場合のことを言っているのかを明確にすることが必要です。
- n が奇数のときは、x^2+x+1 が含まれる。
  - ⋆ 意味不明です。$n=1,5$ のときは、そうではありません。どのような場合のことを述べているのかを、明確に書くことが必要です。
- n が奇数のとき、$x-1$ の次の式は x^2+x+1 の 2 乗、3 乗となる。
  - ⋆ 意味不明です。n が素数のときと、素数ではない奇数のときとでは様子が違っています。
- n が偶数のとき、同じタイプで係数の符号の違う式が含まれる。
  - ⋆ $n=6,10$ ではそうですが、$n=4,8,12$ ではそうではありません。これらの区別をする必要があります。
- 因数分解した式の最高次数を掛けると n になる。
  - ⋆ 最高次数の項を掛けると x^n になりますが、次数は x^k では k のことなので、「掛ける」ではなく「足すと」とすべきです。
- グラフで表すと、y 軸と平行な直線になる。(変化が急激なだけで、直線になっているわけではありません。)

《基礎数学 I》「自由研究」(夏季休業版) の解説

(1) 繁分数の値

次の繁分数の値を求めてみてください。そして、同様のことをもうちょっと続けてください。そして、一般に、どのような値になるかを考えてください。たとえば、4 番目の値の場合は、「$1/(1+1/(1+1/(1+1)))$」となります。数ナビで確認するときは、括弧の対応関係に注意してください。

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

解説　まず、指定された値をできるだけ多く計算してみることが必要です。簡単な分数にすると、次のような値が出てきます。単純に 1 だけからなる式なのですが、この値を眺めてどのようなことに気づくでしょうか。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \frac{144}{233},\ \frac{233}{377},\cdots$$

■ 以下のことには、多くの人が気づきました。

- 分母が、次の分数の分子になっている。
- 分母は、直前の分数の分子と分母の和である。
- 隣りあう 2 つの分数の分子の和と、分母の和は、その次の分数の分子と分母になっている。(たとえば、$\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{5}$ では、$2+3=5,\ 3+5=8$ が、次の分数 $\frac{5}{8}$ である。)
- 大小関係を調べると、「減る・増える」を繰り返している。

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}<\frac{2}{3}>\frac{3}{5}<\frac{5}{8}\cdots$$

- 小数第 6 位までの値は、0.618034 である。

■ これ以外にも、多くの特徴的な性質が含まれています。

- 前の値を x とすると、次の分数は $\dfrac{1}{1+x}$ である。
  [M] 北田、須川、滝川、村上恭、[C] 小野寺緑
- $\dfrac{B}{A}$ の次の分数は、$\dfrac{A}{A+B}$ である。[E] 長谷川、[S] 梅原、生内、菊池奈、高橋俊、[C] 阿部賢、門脇、川又、菊池哲、佐々木舞、畠山
- $\dfrac{B}{A}$ の前の分数は、$\dfrac{A-B}{B}$ である。[C] 畠山、千葉匠、千葉み
- n 番目の分数の分子と分母の和は $n+1$ 番目の分母で、$n+1$ 番目の分子は n 番目の分数の分母である。[C] 及川珠、今野弘
- n 番目の分数を a_n と表すと、$a_n=\dfrac{1}{1+a_{n-1}}$ という関係にある。分母が次の分数の分子になり、分数と分子の和が次の分数の分母になるは、$a_{n-1}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと、

$$a_n=\frac{1}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{(a_{n-1}\text{の分母})}{(a_{n-1}\text{の分子})+(a_{n-1}\text{の分母})}$$

となるからである。[M] 村上恭、

- 分母と分子の差は、前の分数の分子になる。[S] 武田、中澤、[C] 伊藤由、及川昌、宮永、
- i 番目の分数を f_i とすると、$f_i = 1/(1+f_{i-1})$, $f_1 = 1$ である。[E] 奥田
- 次の分数は、分子が直前の分数の分母で、分母は直前の分数の分子と分母の和なので、いちいち繁分数の値を計算しなくても、簡単に求められる。[M] 大崎、今野、[E] 小岩
- 1 つ手前と 2 つ手前の分数の分子どうし、分母どうしを加えることを繰り返していけばよい。[M] 小林
- $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ が分かるだけで、すべての値が求められる。[E] 鈴木大
- 最初の $\frac{1}{1}$ が分かるだけで、すべての分数が分かる。[S] 高橋俊、竹花、[C] 畠山
- 最初の $\frac{1}{2}$ が分かるだけで、後の分数が分かる。[C] 佐々木舞
- $n \geqq 3$ のとき、$n-2$ 番目が $\frac{b}{a}$、$n-1$ 番目が $\frac{d}{c}$ とすると、n 番目は $\frac{b+d}{a+c}$ である。[M] 小野寺翔、菊池謙、[E] 鈴木功、[C] 高橋快、西沢
- 最初の分数を $\frac{b}{a}$ とすると、その続きの分数は次のようになる。[M] 滝川、[E] 川村、菊池信、菅原拓、鈴木広、宮本、[C] 阿部賢、和泉

$$\frac{b}{a},\quad \frac{a}{a+b},\quad \frac{a+b}{2a+b},\quad \frac{2a+b}{3a+2b},\cdots$$

- 現れてくる数字の並び方 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$ は、フィボナッチ数列である。[M] 小林、[E] 奥田
  - ⋆ 1, 1 から始まり、直前の 2 つの数の和として次々に得られる数の列を「**フィボナッチ数列**」といいます。このような数の列は、自然界のいたるところに現れます。
- $\frac{5}{8}$ 以降の値を小数第 3 位で四捨五入すると 0.62 である。[E] 高橋信
- 先に行くにつれ、増加・減少の幅がどんどん狭まっていく。[M] 安部、菅間、菊池裕、[E] 菅原拓、菊池信、菊池冠、[C] 加藤美
- 上記のことを、値が増加・減少を繰り返すグラフを書いて確認した。[M] 菊池謙、[E] 菊池信、[C] 高橋快
- 1 番目、2 番目を、それぞれ a_1, a_2, $\cdots$ のように表すと、$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > a_6 < \cdots$ となっているが、偶数番目だけで考えると、$a_2 < a_4 < a_6 < \cdots$ であり、奇数番目だけで考えると、$a_1 > a_3 > a_5 > \cdots$ である。a_7 の値が分からなくとも、$a_6 < a_7 < a_5$ という関係になる。[S] 梅原
- 偶数番目は番号が若いほど小さく (つまり、増加)、奇数番目は番号が若いほど大きい (つまり減少) している。[S] 戸羽
- 先に行くにつれ、ある値 $(0.618\cdots)$ に近づいていく。たぶん、無理数だと思う。[M] 菊池謙
- ジグザグを繰り返しながら、一定の値になろうとしている。[E] 奥田、吉田紘、[C] 西城
- 増減を繰り返しながら、0.61〜0.62 の間で安定する。[C] 菅野晃、田中穂
- 詳しい値は、0.618033988749 89 である。[S] 及川勇
- 繁分数の分母は、かならず $1+1$ になっている。[M] 岩渕、[C] 和泉
- n 番目の繁分数式の中には、「$1+1$」が $n-1$ 個ある。[C] 和泉
- 隣りあう分数の差は、正負を交互に繰り返し、分子は必ず 1 になる。[C] 三浦千
- 隣りあう分数の分母の比は、その分数の逆数と一致する。たとえば、$\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{5}$ では、$\frac{5}{3} = \frac{1}{3/5}$ である。[C] 三浦千
- 分数にしたとき、分母の数はどんどん大きくなる。[C] 門脇
- 繁分数の式で、分母にある最初の 1 の数は、それ以外の 1 の数より 1 だけ小さい。[C] 高橋春
- 繁分数で表すとき、1 の個数は 2 個ずつ増えていく。[C] 宮永
- 分数に直したとき、分子は奇数・奇数・偶数の順、分母は奇数・偶数・奇数の順に繰り返されている。[C] 千葉み
- 小数第 1 位を四捨五入すると 1 になる。[S] 高橋英
- 次の分数について、同様のことを考えると、直前の分数の分子が次の分数の分母になっていて、分子と分母の和は次の分数の分子になっている。小数に直すと、1.61803 になる。[S] 佐藤大

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1+1}{1},\quad \frac{1+\frac{1+1}{1}}{1},\quad \frac{1+\frac{1+\frac{1+1}{1}}{1}}{1},\cdots$$
$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\cdots$$

- 分母を 1 ではなく、2 にして同じことをやってみると、前の分数の分母が次の分数の分子になる。[M] 原田
- 数ナビで確かめるとき、「/(1+1)」が 1 つずつ増えていく。[C] 岩渕

■ この分数は、どのような値に近づくか？

この分数の値は、増加・減少を繰り返しながらも一定の値に近づいていくことが予想されますが、一体、どのような値に近づいていくでしょうか。ずっ〜と先の分数の値を x とすると、その次の分数の値は $\frac{1}{1+x}$ です。「ずっ〜と先」では、これらの値は相当に近いはずなので、$x \fallingdotseq \frac{1}{1+x}$ です。これより、$x^2 + x - 1 \fallingdotseq 0$ です。解の公式を利用すると、$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ が得られ、$x > 0$ なので $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618033988\cdots$ となります。この値の逆数は

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots (= \alpha \text{とおく})$$

となり、古くより**黄金比**として知られている値です。たとえば、長方形の縦と横の比は、$\alpha : 1$ となるようにしたときが最も美しいと言われています。昔の障子も、このような比で作られています。ピラミッドやモナ・リザの肖像などにも、この比が駆使されていると言われています。

■ 以下は、誤った指摘です。

- だんだん 0 に近づいていく。0.6 に近づく。0.61〜0.62 におさまる。0.617 に近づいている。0.618034 になると値は変わらない。1 に近づいていく。等々
- 最終的には 0.618034 に近づいていく。15 番目以降の数値は変わらない。
  - ⋆ この値は数ナビで四捨五入された値であり、「0.618034」という値になるわけではありません。
- 小数の値は、ひたすら減少していく。
  - ⋆ 数値の大小をよく見てください。
- 分母から分子を引くと、$1, 2, 3, 4, \cdots$ となっている。
  - ⋆ もう一度やってみてください。$0, 1, 1, 3, 5, 8, 13, \cdots$ となります。
- 分母は、奇数と偶数を繰り返している。
  - ⋆ 奇数が連続するときもあります。

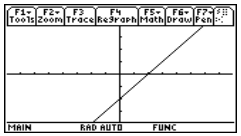
(2) 絶対値関数のグラフ

$y = |x|$ のグラフは、数ナビでは ♦ F1 で、たとえば $y1 = \mathrm{abs}(x)$ として入力します。abs は alpha を利用します。$y = |x|$ は、$x \geqq 0$ のときは $y = x$ であり、$x < 0$ のときは $y = -x$ です。$y1$ には適当な関数を定義し、$y2 = \mathrm{abs}(y1(x))$ として ♦ F3 でグラフを描画させてください。そのとき、 ♦ | で Leading Cursor を ON にした方がグラフが分かりやすいです。$y1$ にいろいろな関数を定義してみて、一般に $y = f(x)$ と $y = |f(x)|$ のグラフの間にはどのような関係があるかを考えてください。

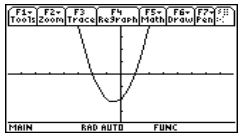
解説　この課題を選択した人は [M] 小野寺敏、佐藤健、[E] 八嶋だけでした。絶対値 $|x|$ の定義は、$x \geqq 0$ のときは $|x| = x$ で、$x < 0$ のときは $|x| = -x$ ということですから、$y = |f(x)|$ は、$f(x) \geqq 0$ のときは $y = |f(x)| = f(x)$ であり、$f(x) < 0$ のときは $y = |f(x)| = -f(x)$ ということです。$f(x) \geqq 0$ ならグラフは x 軸より上側にあり、$f(x) < 0$ ならグラフは x 軸の下側にあることに注意すると、要するに、$y = f(x)$ のグラフで、x 軸より上側にある部分はそのままにして、x 軸より下側にある部分は符号を反対にして x 軸より上側になるようにしたものが $y = |f(x)|$ のグラフです。このことを、いろいろな関数のグラフを見るなかで実感させようとするのが、この課題のねらいでした。

■ 残念ながら、上記の「ねらい」を明確に認識できたと思われる人はいませんでした。

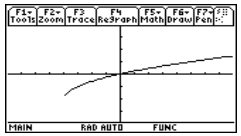
この課題を選択しなかった人は、たとえば、次のグラフをみてください。$y = f(x)$ のグラフに対して、その絶対値をとった関数 $y = |f(x)|$ のグラフがどのような関係になっているか、一目瞭然ではないでしょうか。そして、その理由は、**負になるときは符号を変えて正になるようにする**という絶対値の定義から明らかではないでしょうか。



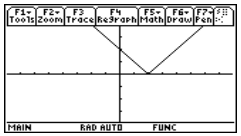
$y = x - 2$



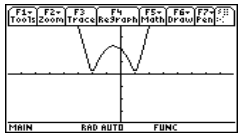
$y = x^2 + x - 2$



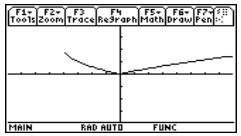
$y = \sqrt{x+4} - 2$



$y = |x - 2|$



$y = |x^2 + x - 2|$

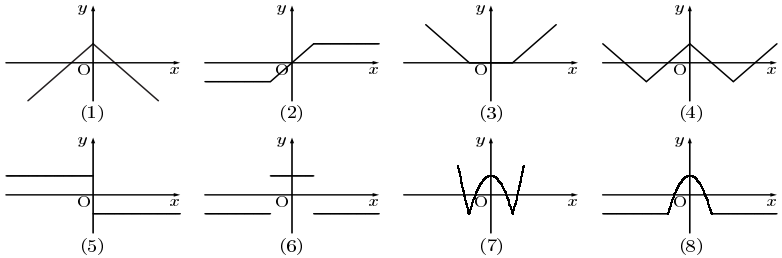


$y = |\sqrt{x+4} - 2|$

絶対値に関する重要な注意

数ナビで無理関数と絶対値を両方含む関数を表示させるときは、|を利用して、その**関数の定義域も明示する**ようにしてください。たとえば、数ナビで $y1(x) = |\sqrt{x+4}-2|$ のグラフを表示させると、$x < -4$ の部分のグラフも表示してきます。**そのグラフをみて納得してはいけません！** $x+4 < 0$ の部分は表示されるべきではありません。数ナビは複素数の計算もできるために、$x < -4$ のとき、たとえば $x = -5$ のときは $y = |\sqrt{-5+4} - 2| = |\sqrt{-1} - 2| = |i - 2| = |-2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ を計算してしまうのです。これは、数ナビ設計上の仕様です。したがって、このようなときは、「$y1(x) = \mathtt{abs}(\sqrt{x+4} - 2)$ | $x > -4$」として、定義域を明示するようにしてください。

■ 例示したグラフの方程式



■ この課題を選択したのは 3 名だけしたが、(6) 以外のグラフは方程式が指摘されました。

(1) たとえば、$y = -|x| + 1$ とすれば表示されます。数ナビでは、$y1 = -\mathrm{abs}\,(x) + 1$ です。
[E] 八嶋は $y = -|x| + 2$ を示し、[M] 佐藤は $y = -|f(x)| + p$ $(p > 0)$ のタイプであることを指摘しています。要するに、符号を変えて x 軸に関して対称移動してから y 軸方向に平行移動すればよいわけです。[M] 小野寺は、絶対値を利用せずに、次式であることを見抜いています。

$$y = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ -x+1 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

(2) 八嶋は、$y = -|x-1| + |x+1|$ であることを見抜きました。$x-1$, $x+1$ の符号は $x = \pm 1$ で変わるので、$x < -1$, $-1 \leqq x < 1$, $1 \leqq x$ の 3 つに分けて考えると、

$$y = -|x-1| + |x+1| = \begin{cases} -(-(x-1)) - (x+1) = -2 & (x < -1) \\ -(-(x-1)) + (x+1) = 2x & (-1 \leqq x < 1) \\ -(x-1) + (x+1) = 2 & (1 < x) \end{cases}$$

(3) 八嶋は、$y = |x+1| + |x-1| - 2$ であることを見抜きました。佐藤は、$y = \dfrac{|x+p|}{2} + \dfrac{|x-p|}{2} - p$ の形で示しています。たとえば、$p = 1$ としてやってみてください。

(4) 佐藤は、$y = \big||x| - p\big| - q$ としました。たとえば、$p = 2$, $q = 1$ でやってみてください。絶対値を取ることで角ができるので、それを y 軸方向に平行移動して負の部分を作って、もう一度絶対値をとればよいわけです。同じ形を、八嶋は $y = |x+4| + |x-4| - |x| - 5$ として実現しています。

(5) 八嶋は、$y = \dfrac{|x|}{-x}$ としています。佐藤は $y = \dfrac{x}{|x|}$ としました。たとえば、後者であれば

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{-x} = -1 & (x < 0) \\ \dfrac{x}{x} = 1 & (x > 0) \end{cases}$$

$x = 0$ のとき、この関数は分母 $= 0$ となるので定義されません。数ナビのトレース機能で、$x = 0$ としてみてください。値はありません。

(6) この関数のグラフは、たとえば $y = \dfrac{|x+1|}{x+1} - \dfrac{|x-1|}{x-1} - 1$ とすれば得られます。

(7) 八嶋は、$y = |x^2 - 3| - 2$ としました。

(8) 八嶋は、$y = |x^2 - 2| - |x^2| + 1$ としました。

■ この 3 名のやったことを見ながら、各自 (1)〜(8) のグラフを試してみてください。そして、絶対値がどのようなものかを実感として把握してください。　(以上)

数学に関する意識調査

最初に、マークカードに 氏名を書いてください。各項目への回答は、マークカードの右端にある「良い例」にならい、回答欄の数値 [1][2][3]··· をマークし (縦の太線で塗りつぶし) ます。まず、次の項目に記入します。

- マークカードの左端の「年」の欄で、[1] の欄を、右端の「良い例」にならいマークする。
- 「クラス」欄では、M は [1]、E は [2]、S は [3]、そして C は [4] の欄をマークする。
- 「番号」欄は自分の出席番号をマークする。4 番の人は、左側は [0]、右側は [4] の欄をマークする。32 番の人は、左側は [3]、右側では [2] の欄をマークする。

以下の項目では、マークカードの上側にある 1〜50 の番号のうち、該当する質問項目の回答欄 [1][2][3]··· をマークしてしてください。鉛筆は、濃さが HB 以上を使用してください。

1 次の項目につき、あなたはどのように思いますか。マークカードで、(1)〜(15) の各項目につき、自分に該当すると思う番号 ([1]〜[5]) をマークして下さい。なお、ここでの「数学」は、基礎数学 I や基礎数学 II を含めた「数学全般」として回答してください。

	そう思う	そう思うどちらかといえば	そう思わないどちらかといえば	そう思わない	分からない
(1) 私にとって数学は好きな科目だ	5	4	3	2	1
(2) 数学を勉強をする目的は分かっている	5	4	3	2	1
(3) 数学は、計算問題より応用問題の方がおもしろい	5	4	3	2	1
(4) 数学の勉強についていくのは大変だ	5	4	3	2	1
(5) 数学は、他の科目より時間をかけて勉強している	5	4	3	2	1
(6) 数学の勉強は楽しい	5	4	3	2	1
(7) 数学は、得意な教科ではない	5	4	3	2	1
(8) 勉強すれば、数学で良い成績を取れる	5	4	3	2	1
(9) 数学は大切な科目だ	5	4	3	2	1
(10) 自分は、コンピューターの操作は苦手だ	5	4	3	2	1
(11) 数学の勉強は、将来役に立つ	5	4	3	2	1
(12) 数学は、いろんな計算の仕方が分かればそれでよい	5	4	3	2	1
(13) 数学の問題を、じっくり時間をかけて考えるのは楽しい	5	4	3	2	1
(14) いろいろな公式は、その証明も理解した方がよい	5	4	3	2	1
(15) 難しい問題を友人が解いたときは、自分も頑張ろうと思う	5	4	3	2	1

2 以下は、数学の問題を解くときの、いろいろな考え方を示しています。あなたの考えは、どのようなものですか。次の (16)〜(20) の各項目について、マークカードの該当する番号 [1]〜[4] をマークしてください。

	そうしている	そうしているどちらかといえば	そうしていないどちらかといえば	そうしていない
(16) 数学の問題を解くとき、前に問いた問題と似ているところや違ったところがどこかなどを考えようとしていますか。	4	3	2	1
(17) 数学で新しい内容を勉強したとき、前に勉強したことと、どのような関係があるか考えようとしていますか。	4	3	2	1
(18) 数学の問題が解けなかったとき、自分がなぜ解けなかったかをふり返って考えようとしていますか。	4	3	2	1
(19) 数学の問題が解けたとき、別な解き方を考えようとしていますか。	4	3	2	1
(20) 数学の問題の解き方が分からないとき、あきらめずにいろいろ考えようとしていますか。	4	3	2	1

3 あなたは、貸与された数ナビ (TI–89) で次の操作を行うことができますか、それともできませんか。次の (21)〜(32) の各項目について、マークカードの対応する番号欄で、「はい」の人は [2] を、「いいえ」の人は [1] をマークしてください。

	はい	いいえ
(21) 私は、$y = -x^2 + 2x$ のような関数を定義して、そのグラフを表示させることができる。	2	1
(22) 私は、表示されたグラフの特定部分を拡大することができる。	2	1
(23) 私は、一度定義した関数を自由に変更することができる。	2	1
(24) 私は、グラフ画面の x, y の範囲を自由に指定することができる。	2	1
(25) 私は、グラフの x, y 座標を表にして表示させることができる。	2	1
(26) 私は、グラフの x, y 座標を表にしたとき、表示されている x の間隔を自由に変更することができる。	2	1
(27) 私は、 $\boxed{(-)}$ と $\boxed{-}$ の使い分けができる。	2	1
(28) 私は、$\sqrt{5}$ の値を小数で表示させることができる。	2	1
(29) 私は、式 $(x+1)^4$ の展開式を表示させることができる。	2	1
(30) 私は、式 $x^5 - 1$ を因数分解させることができる。	2	1
(31) 私は、方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解を表示させることができる。	2	1
(32) 私は、授業で説明されていない数ナビの使い方を知っている。	2	1

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

4 数ナビ (TI–89) を使用してみて、次の (33)〜(42) の各項目について、あなたはどう思いますか。自分にあてはまると思う番号をマークしてください。

	はい	どちらでもない	いいえ
(33) 数ナビを、家や寮で勉強するときも使った。	3	2	1
(34) 数ナビを使って、新しく発見したことがある。	3	2	1
(35) 数ナビを、私は授業で使うときしか使用しない。	3	2	1
(36) 数ナビを利用して、数学につき考えるようになった。	3	2	1
(37) 数ナビを利用すると、数学の理解がさらに深められる。	3	2	1
(38) 数ナビを使って、数学が前より分かるようになった。	3	2	1
(39) 数ナビと出会って、数学に対する見方が変わった。	3	2	1
(40) 数ナビがあると、自分で考えなくなる。	3	2	1
(41) 数ナビを通して、友達と数学の話をする機会が増えた。	3	2	1
(42) 数ナビは、できるだけ使わないようにしてきた。	3	2	1

5 これまで、$(x+1)^n$ の展開、x^n-1 の因数分解、$1/(1+1/(1+1))$ のような繁分数の値、絶対値関数のグラフなど通常の演習問題とは異なる課題を「自由研究」として考えてもらいました。このような課題を考えてみて、あなたはどのように感じましたか。次の各項目について、自分にあてはまると思う番号をマークしてください。

	はい	どちらでもない	いいえ
(43) 考えると、いろいろな発見があり、とてもおもしろかった。	3	2	1
(44) 普通の問題を解いたときとは異なる喜びを感じた。	3	2	1
(45) 時間をかけて考えても何も分からず、大変だった。	3	2	1
(46) 多くの規則性があることが分かり、数学の奥深さを感じた。	3	2	1
(47) 「数学」というものに対する見方が変わった。	3	2	1
(48) 考えることは苦手なので、適当に回答してしまった。	3	2	1
(49) 後で配布された「自由研究」の解説は、とても参考になった。	3	2	1
(50) 1つのことを時間をかけて考えることの大切さを感じた。	3	2	1

6 「グラフ・アート」をやってみて、どのような感想を持ちましたか。また、友達の作品を見て、どのように感じましたか。

7 「自由研究」をやってみて、あなたはどのような感想を持ちましたか。正直な感想を聞かせてください。

8 「数ナビ」について、あなたはどのように思いますか。自由な感想を聞かせてください。

《基礎数学 I》冬季休業課題

クラス＿＿＿　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 2 点 A$(2,-3)$、B$(5,3)$ に対して、次の問に答えよ。ただし、原点を O とする。

(1) 線分 AB の長さ

(2) 線分 OB の長さ

(3) 線分 AB の中点の座標

(4) 線分 AB を $3:2$ に内分する点の座標

(5) 2 点 A, B から等距離にある x 軸上の点

(6) 2 点 A, B から等距離にある y 軸上の点

(7) 原点と点 A を通る直線の方程式

(8) 2 点 A, B を通る直線の方程式

(9) 原点を通り線分 AB に垂直な直線の方程式

(10) 三角形 △OAB の面積

2 次の不等式を解け。負数を掛ける (負数で割る) ときは、不等号の向きが変わることに注意する。

(1) $\dfrac{x+3}{2} > \dfrac{2x-1}{3} - 1$

(2) $\begin{cases} \dfrac{3x+4}{2} > \dfrac{2x-1}{3} \\ \dfrac{4x-1}{3} < \dfrac{3x+2}{2} \end{cases}$

3 次の 2 次不等式を解け。x 軸との共有点があるかどうかは、判別式 D の符号で判定できる。

(1) $x^2+x-2>0$

(2) $\begin{cases} x^2+2x-2<0 \\ x^2+4x>0 \end{cases}$

4 等式 $3(x-2)^2+5(x-2)-1=3x^2-7x+1$ を証明せよ。

5 $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$ が恒等式になるように、定数 a, b の値を定めよ。

6 全体集合を実数全体とし、$A=\{x \mid x^2-x-2>0\}$、$B=\{x \mid x^2-9 \leqq 0\}$ とするとき、次の集合を求めよ。まず、A, B を表す 2 次不等式を解くことが必要である。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

7 次の命題の逆・裏・待遇を書き、その真偽を述べよ。偽のときは反例をあげること。

(1) $x=1$ ならば $x^2=1$ である

(2) $x>0$ または $y>0$ ならば、$xy>0$ である

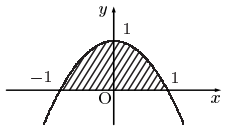
「自由研究」の冬季課題

以下の課題のうち、いずれかを選択して、**1 月 16 日 (月)17 : 00 までに提出**してください。これまでと同様に、各自がどのようなことを行い、それによりどのようなことを考えたか、あるいは思ったか、また、どのようなことを予想し、それをどのようにして確かめたか、あるいはどのような理由で確かめることができなかったか、というような、各自の思考の経過をまとめてくればよいのです。「やってみたけど、分らなかった！」という場合は、どのようなことをやってみたのか、「分らない！」と結論づけるまでに各自がどのようなことを考えたのか、その思考の経過をまとめてくればよいのです。

なお、この課題の意図は、通常の問題とは異なる問題を考えることにより、自分の頭に新な思考回路を構築してほしい、ということにあります。考えていって「何かに気づいたとき」、通常の問題を解いたときは異なる喜びがあるはずです。アンケートの結果によれば、半数以上の人が、自由研究では「(43) 考えると、いろいろな発見があり、とてもおもしろかった」と回答しています。この「発見の喜び」をできるだけ多くの人に体験してもらいたい！、ということも意図しています。

図形の面積

皆さんが面積の求め方として知っているのは、長方形、平行四辺形、台形、そして三角形の面積です。これらの図形を組み合わせることで、他の図形の面積を求めることはできないでしょうか。たとえば、$y = 1 - x^2$ のグラフは、$y = -x^2$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフなので右図のグラフです。



このグラフと x 軸との間で囲まれた図形の面積を求めるにはどうすればよいでしょうか。できるだけ正確な近似値を求める方法を考案してください。そして、具体的にその値を計算してください。

また、一般に、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との間で囲まれた図形の面積を計算するには、どのようにすればよいでしょうか。その一般的な方法についても考えてみてください。そして、自分で適当な関数のグラフを考え、そのグラフと x 軸との間で囲まれた図形の面積を計算してみてください。

$(x^2 + x + 1)^n$ の展開式の係数

$(x+1)^n$ を展開したときの式の係数については、すでに 7 月にやって、どのような性質があるか、皆さんが発見した内容をプリントにまとめて解説しました。単純なことであるにもかかわらず、その中にはいろいろな性質があったと思います。

では、$(x^2+x+1)^n$ の展開式ではどうなるでしょうか。 F1 で「3: expand(」を選択して、その展開式や、その係数をできるだけ沢山の n について書き出してください。たとえば、$(x^2+x+1)^2$ であれば、「expand $((x^2+x+1)^2)$」として ENTER を押すことになります。括弧が 2 つ必要なので気をつけてください。そして、係数の間に成り立つ特徴について考察してください。$(x+1)^n$ の場合に成立した性質は、$(x^2+x+1)^n$ でも成立するでしょうか。次数 n と係数の間にはどのような関係があるのでしょうか。この展開式の係数を簡単に求める方法はないでしょうか。

$x^n + k$ の因数分解

$x^n - 1$ の因数分解については、7 月にやりました。単純なことであるにもかかわらず、いろいろな性質が含まれていたかと思います。

今度は、$x^n + k$ のタイプの式が因数分解できるのは、$n,\ k$ がどのような場合であるのかを考えてみてください。ただし、$n,\ k$ はいずれも 1 以上の自然数とします。たとえば、$x^4 + 4$ は、一見すると因数分解できないように見えますが、

$$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$
$$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

のように変形すると因数分解することができます。数ナビで因数分解するには、 F1 2 として、「2: factor(」を選択して、「factor $(x^4 + 1)$」として ENTER を押すことになります。

手計算でも数ナビを利用しても、どちらでもかまいません。$x^n + k$ が因数分解できるのは $n,\ k$ がどのようなときであるのかを考察してください。数ナビを利用するのであれば、まず、いろいろな n, k について因数分解される場合の式を書き出して、何か特徴がないかどうかを考えていけばよいでしょう。

繁分数の値

次のような繁分数の値については、すでに夏季休業の課題の中でやってもらいました。

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+1},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

一見すると複雑そうに見えながら、簡単な性質があったと思います。では、この式を 1 以外の数について考えるとどうなるでしょうか。いろいろと具体的な n(自然数) について、

$$\frac{n}{n},\quad \frac{n}{n+n},\quad \frac{n}{n+\dfrac{n}{n+n}},\quad \frac{n}{n+\dfrac{n}{n+\dfrac{n}{n+n}}},\quad \frac{n}{n+\dfrac{n}{n+\dfrac{n}{n+\dfrac{n}{n+n}}}}$$

の値を調べてみてください。分母だけを 1 以外の数とした場合で考えるとどうなるでしょうか。

$$\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n+n},\quad \frac{1}{n+\dfrac{1}{n+n}},\quad \frac{1}{n+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n+n}}},\quad \frac{1}{n+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n+n}}}}$$

これらの値に、1 だけからなる式のときのような規則性はあるでしょうか。繁分数の計算をせずに k 番目がどのような式になるか求めることはできないでしょうか。n を具体的な自然数で考えてもよいし、文字のまま考えてもかまいません。

3 次関数のグラフ

数ナビを利用して、3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフの形について考えてください。この関数のグラフはどのような形をしているでしょうか。係数 $a,\ b,\ c$ の値を変えることにより、グラフの形はどのように変化するでしょうか。$a,\ b,\ c$ の値をやみくもに変えても訳が分からなくなるだけです。2 つを固定して 1 つだけ変化 (増加や減少) させるとどうなるか、あるいは、$y = x^3 + ax^2,\ y = x^3 + bx,\ y = x^3 + ax^2 + bx$ のように分けて考えてみるとよいでしょう。

グラフの山や谷は a, b, c の値とどのように関連しているでしょうか。2 次関数のときのように、基本になる関数の平行移動として考えることはできないでしょうか。各自の問題意識にもとづいて考えてみてください。

ただし、a, b, c は整数ではなく実数とします。正の数ばかりではなく、負の数についても考えてください。

平成 16 年度〜平成 17 年度
日本学術振興会 科学研究費補助金 (基盤研究 (C)(2))

高専における「試行錯誤」を伴う数学教材の
開発・評価に関する実践的研究

平成 18 年 3 月 31 日発行
研究代表者：梅野善雄
一関工業高等専門学校
021–8511　岩手県一関市萩荘字高梨
Tel: 0191–24–4700, Fax: 0191–24–2146
印刷所： (株) 一関プリント社