数学教育の会
数学教育研究　４号
2002 年１月

数式処理電卓を利用した高専における微積分教育

梅野　善雄
(一関工業高等専門学校)

数学教育の会編集「数学教育研究」第４号 (学力向上のための数学教育の研究)　別刷
科学研究費補助金　課題番号 13680206 (研究代表者　学習院大学理学部、飯高茂)

数式処理電卓を利用した高専における微積分教育

梅野　善雄
UMENO, Yoshio
一関工業高等専門学校

1　はじめに

一関高専では，平成 12 年度の 2 年生 (2 クラス) に数式処理電卓を貸与して微積分の授業を行った。貸与した数式処理電卓は，テキサスインスツルメント社の TI–89 である。平成 12 年 6 月から翌年の 2 月末日まで，学生一人一人にマニュアル付きで貸与した。

TI–89 は 1998 年に発表された数式処理機能を持つグラフ電卓である。機能的には，TI–92 に Plus Module（微分方程式の解法機能などがある）を付加した機能から，幾何機能（カブリジオメトリ）を除いたものである。通常の多機能関数電卓と同じ程度の大きさであるが，極めて高度の数式処理が可能であり，通常の「電卓」の範疇をもはや越えている。その数式処理能力は高専や大学工学部での使用にも耐えうるものがあり,「電卓」というよりも，むしろ，マセマティカのような数学上の「思考のツール」として捉えるべきである。その意味で，石川高専の阿蘇和寿教授は，このような高度の数式処理機能を持つハンドヘルドテクノロジーを数学ナビゲータ（略して「数ナビ」）と呼ぶことを提唱する。この電卓を活用した数学教育の改革に熱意を持つ高専数学教官の間では，そのことに賛意を示し，学生にも「電卓」ではなく「数ナビ」と呼ばせ、その活用法の研究のために「数ナビ活用研究会」を発足させている [1]。

以下では，この電卓 (「数ナビ」) の具体的な利用例や，そのような授業を受けた学生の感想を紹介する。また，この電卓の使用で，数学の学習に際して学生が感じる不安感がどのように変化したかを，電卓を使用しない他クラスと比較しながら分析する。そして，この電卓の数学教育における意義について考察したい。

なお，この論考は,「数学教育の会」の平成 13 年の 1 月と 9 月の集会で発表した内容であり，参考文献 [2–4] を原典とするものである。

2　高専の数学カリキュラム

高専の 5 年間一貫教育の中では，高校から大学工学部の内容までが教授される。工学の専門科目では数学が駆使されるので，微積分や微分方程式の知識は必須である。学生は，工学の専門科目が教授される前に，一通りの微積分を学んでおかなければならない。そのため，高専における数学のカリキュラムは，基本的には，高専が創設されて以来あまり大きな変化はない。1 年から 3 年までの数学の単位数は，高専により異なる部分もあるが，ほぼ各学年とも 5〜7 単位で授業が行われている。本校では，1 年と 2 年が各 6 単位，3 年が 5 単位である。

以下に，参考までに微積分の内容を紹介する。高専用の数学教科書「微分・積分 (I)」「微分・積分 (II)」(大日本図書）の目次は次のようになっている。

第 2 学年の微分・積分

1 章　微分法

§1　関数の極限と導関数

関数の極限，関数の連続，微分係数，導関数，導関数の公式，合成関数の導関数

§2　いろいろな関数の導関数

三角関数の導関数，逆三角関数，逆三角関数の導関数，対数関数・指数関数の導関数

2 章　微分法の応用

§1　関数の変動

平均値の定理，関数の増減と極値，関数の最大・最小，高次導関数，曲線の凹凸

§2　いろいろな応用

媒介変数表示の微分法，接線と法線，不定形の極限値，速度と加速度

3 章　積分法

§1　定積分と不定積分

定積分の定義，定積分の性質，不定積分，定積分と不定積分の関係，定積分の計算

§2　積分の計算

不定積分の置換積分法，定積分の置換積分法，部分積分法，分数関数・無理関数の積分，三角関数の積分

4 章　積分の応用

§1　面積・曲線の長さ・体積

図形の面積，曲線の長さ，立体の体積，回転体の表面積

§2　いろいろな応用

媒介変数表示による図形，極座標による図形，変化率と積分，広義積分，数値積分

第 3 学年の微分・積分

1 章　級数

§1　数列と級数

数列の極限，級数，正項級数

§2　関数の展開

べき級数，マクローリン展開とテイラー展開，オイラーの公式

2 章　偏微分

§1　偏微分法

2 変数関数，偏導関数，接平面，合成関数の微分法

§2　偏微分法の応用

高次偏導関数，テイラーの定理 (2 変数関数の場合)，極大・極小，陰関数の微分法条件つき極値問題，包絡線

3 章　重積分

§1　2 重積分

2 重積分の定義，2 重積分の計算

§2　変数の変換と重積分

座標軸の回転，極座標による 2 重積分，変数変換，広義積分，2 重積分の応用

4 章　微分方程式

§1　微分方程式と解

微分方程式の意味，微分方程式の解，変数分離形，同次形，1 階線形微分方程式
完全微分方程式

§2　2 階微分方程式

線形微分方程式，定数係数非同次線形微分方程式，定数係同次数線形微分方程式
いろいろな線形微分方程式，線形でない 2 階微分方程式

3　微積分における数式処理電卓の利用例

以下では，微積分の授業の中で数ナビをどのように利用したかを述べる。すべての授業を再現するわけにはいかないので，典型的な使用例の幾つかを紹介したい。

3.1　数式処理機能の利用例—合成関数の微分公式—

合成関数の微分公式 $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$ は，まず教師がその公式の証明を行い，次に具体的な例題をやってみせてから学生に問題を課すのが普通であろう。

数ナビを利用すると，最初にこの公式を学生に発見させることができる。それは，次の手順による。

(1) $y = (2x+1)^3$ のような関数を，$y = f(u) = u^3$，$u = g(x) = 2x+1$ のように 2 つの関数に分解させる。

(2) 分解した個々の関数の導関数 dy/du，du/dx を自分で計算させる。

(3) もとの関数 $y = f(g(x)) = (2x+1)^3$ の導関数 dy/dx を数ナビで計算させる（図 1)。

(4) 3 つの導関数 dy/dx，dy/du，du/dx の間にどのような関係があるかを考えさせる。

(5) 関数が 3 つに分解される場合は，どのような関係になるかを考えさせる。

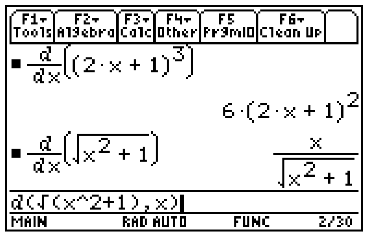


図 1: 合成関数の導関数

最後の 3 つに分解する場合にまで進んだ者は時間の関係で多くはなかったが，約半数の学生は 2 つの導関数の積をとればよいことに気づいた。数ナビ自身は合成関数の微分公式に基づいて計算しているので，この手順でその公式に気づいたとしても，数学的な意味での発見とは言いがたいかもしれない。しかし，教師から一方的に教えられた公式を用いて計算する場合と，自分で気がついた公式で計算する場合とでは，自ずとその認識の度合には違いが生じてくるであろう。

3 つに分解できる場合も同様であることに気づいたある学生（成績は中程度）は，自分の発見に「すごい！」と言ってほくそえんでいた。その発見は，3 つの導関数の積が電卓の表示する導関数 dy/dx と同じであることを，その積を自分で実際に計算して確かめたものである。そして，その発見を隣の席の学生にも伝えていた。数学的な発見とは言いがたいとしても，この

ような数学に関することで「自分で気がつく」喜びを感じさせることの重要性は疑いようがない。教材の作成の仕方により，成績上位の学生でなくともそれを感じさせることができるわけである。なお，このような公式に気づかせた後では，通常の証明についても説明してある。

3.2　グラフ機能の利用例—媒介変数表示—

媒介変数表示された関数 $x = f(t),\ y = g(t)$ は，単に媒介変数 t を消去して x, y に関する方程式を導き，どのような曲線であるかを理解できるだけでは不十分である。媒介変数 t の変化に伴い，点 $(f(t),\ g(t))$ が曲線上をどのように変化するかを理解することが重要である。しかし，その理解を学生に得させるのは容易なことではない。媒介変数を消去して $x,\ y$ の方程式を導けただけで良しとしているのが実情ではないだろうか。

この電卓のグラフ機能を利用すれば，$y = f(x)$ の形の関数ばかりではなく，媒介変数表示や極座標で表された関数のグラフも表示できる。図 2 は，画面を左右 2 つに分割して $x = \cos t,\ y = \sin t$ のグラフを表示させている。t の変化につれて点 $(\cos t,\ \sin t)$ がどのように動いてグラフが描かれるかを，学生は簡単に見ることができる。また，この円上の点の動きを $y = \sin t$ のグラフと同時に表示させれば，$\sin t$ が単位円上の点の y 座標の変化を表すものであることは，一目瞭然の理解が得られる (図 3)。

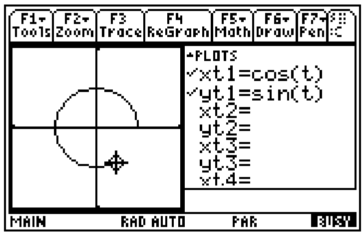


図 2: 媒介変数表示

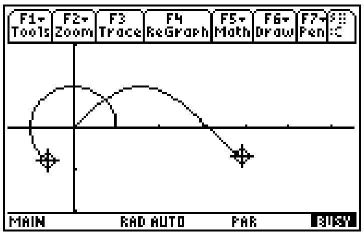


図 3: サインカーブ

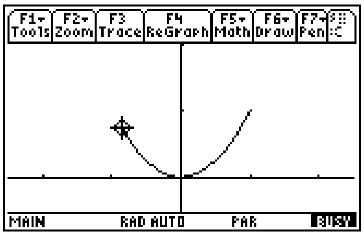


図 4: 放物線

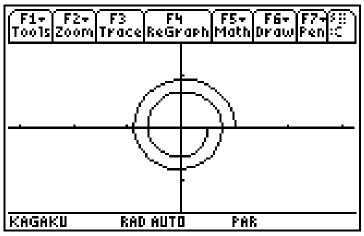


図 5: 渦巻き

勿論，媒介変数の導入直後は，t, x, y の表を作成させて自分でグラフを描かせ，t の変化により点 (x, y) が変化して曲線が描かれることを理解させている。グラフ機能は，その作業を経た後に利用させた。そして，点が次のような動きをするには媒介変数表示をどのように変えればよいかを考えさせた。

(1) 点が単位円上を時計回りに動くようにしたい。
(2) 媒介変数 t が $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点が円上を 2 回転するようにしたい。
(3) t が 0 から 2π まで変化するにつれて，点が放物線 $y = x^2$ 上を，

$$(1, 1) \to (0, 0) \to (-1, 1) \to (0, 0) \to (1, 1)$$

と変化するようにしたい（図 4)。

(中略)

(11) t が 0 から 2π まで変化するにつれて，点 $(1,0)$ を出発した点が左回りに 2 回転しながら点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ に到達するようにしたい（図 5）。

最後の問は発展課題として出したものであり，実際に解答する学生がいるとは思っていなかった。しかし，数名の学生が最後の式まで簡単に見出してしまい驚かされた。いずれにしろ，このような形で数ナビを利用させることにより，媒介変数の意味を学生に実感として理解させることができたと思われる。

この機能を利用すれば，たとえばリサージュ曲線 $x=\sin mt, y=\sin nt$ の曲線形と m,n との関係について何らかの規則性を見出させて，その証明を考えさせることもできる。テクノロジーを利用すれば，このような試行錯誤を伴うものを数学教育に組み入れることが可能であり，数学教育のあり方に新な方向性が示唆される。

3.3 数式処理とグラフ機能の複合的利用例—定積分の定義—

数ナビの数式処理機能とグラフ機能とを複合的に利用すれば，定積分を和の極限として理解させ，微積分の基本定理にまで気付かせることができる。

まず，関数 $f(x)=x^2$ を区間 $[0,1]$ で n 等分した場合を考える。

(1) 区間 $[0,1]$ を 2 等分した場合の図を描かせる。そして，長方形の高さを小区間の右端に対応する $f(x)$ の値で定めたときの，面積の和を求める式を $f(x), \Delta x$ などの記号を使って書かせ，その値を自分で計算させる。

(2) 3 等分，4 等分した場合も同様の図を描かせ，面積を求める式と値を自分で求めさせる。

(3) n 等分した場合の，長方形の面積の和を求める式を書かせる。

(4) 数ナビに $f(x)=x^2, s(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を定義して $s(2), s(3), s(4)$ を表示させ，(1)(2) で求めた値と一致することを確認させる。(図 6,7)

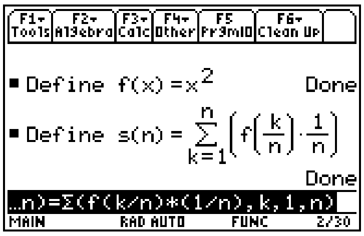


図 6: 部分和の定義

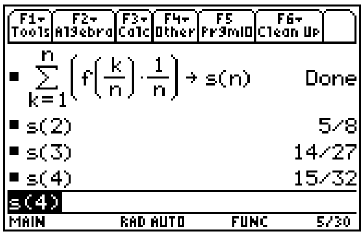


図 7: 部分和の値

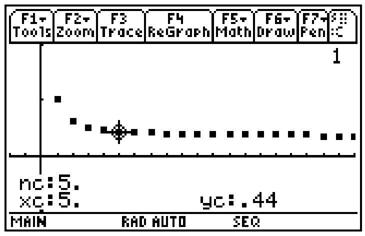


図 8: 数列 $s(n)$

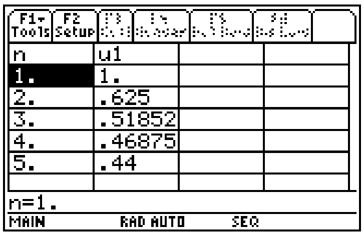


図 9: 部分和の数表

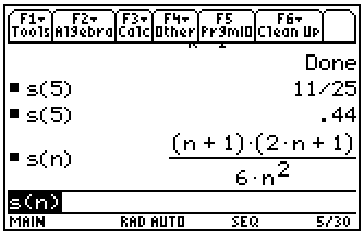


図 10: 第 n 部分和

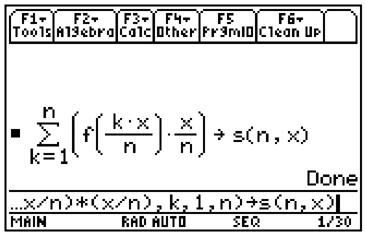


図 11: 区間 $[0,x]$ での部分和

(5) $n = 10, 50, 100, 500$ の場合の $s(n)$ の値を数ナビを利用して分数と少数で求めさせ，分割数と面積値との表を作成させる。

(6) 数ナビのグラフ表示の仕方を数列用に変更させ，数列 $s(n)$ のグラフを表示させる。$x = n, y = s(n)$ の場合のグラフが表示される。グラフ上を移動すると，点の座標が下段に表示される。その値が (4)(5) で求めた値と一致することを確認させる。(図 8)

(7) グラフの座標データを表で表示させ，(4)(5) と一致することを確認させる。(図 9)

(8) $s(n)$ を表示させて書き写させ，$n \to \infty$ のときの極限値を自分で計算させる。(図 10)

(9) 以上のことより，$\displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ であることを確認させる。

(10) 同様のことを区間 $[0, x]$ で行わさせる。まず，区間を $[0, x]$ に変更すると，和の式 $s(n)$ に対応する式がどのように表されるかを考えさせる。対応する和の式を $s(n, x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)\frac{x}{n}$ とする (図 11)。

(11) $s(n, 1)$ が $s(n)$ と一致することを確認させる。それは，数ナビで幾つかの n に対する値を表示させることにより行った。(図 12)

(12) $g(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} s(n, x)$ とする。$g(1)$ が (9) の値と一致することを確認させる (図 13)。

(13) いろいろな $f(x)$ に対して $g(x)$ を求めさせ，$g(x)$ と $f(x)$ との間にどのような関係があるかを考えさせる。(図 14)

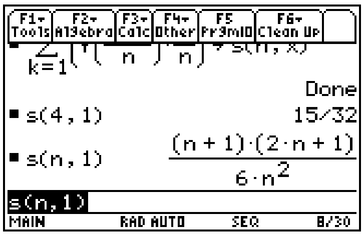


図 12: 区間 $[0, 1]$ の場合

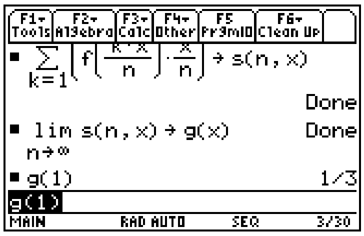


図 13: 和の極限

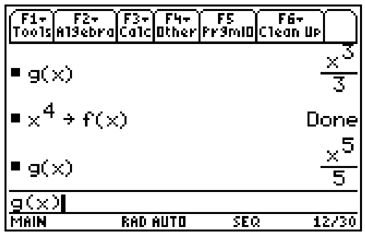


図 14: x^n の積分

以上の手順はかなり複雑かもしれないので，実際の授業では操作手順を含めたプリントを用意し，式の部分は穴埋め形式にした箇所もある。授業の目的は，定積分が和の極限であることの理解を確実にさせると同時に，微積分の基本定理に気づかせることにある。

使用した大日本図書の教科書では，積分は最初から区分求積法で説明される。定積分の定義と $f(x) = x^2$ の場合の例題は，この課題の前に 2 時間かけて説明済なので，(1)〜(9) は復習を兼ねたものにもなっている。ただし，区間 $[0, x]$ での考察は初めて扱うものであり，学生は微積分の基本定理についてはまだ知らない。

操作手順がプリントに書いてあるとはいえ，学生はいちいち「ふ〜ん」とうなずきながら操作していた。数ナビの機能を利用すれば，50 等分，100 等分の場合の値も表示される。しかも等分数を増すごとに和の値が収束していく様子もグラフ上から確認できる。定積分が「和の極限」であることへの理解が深められたことは確実と思われる。そして，和の極限で定義された $g(x)$ と $f(x)$ との間の関係について，半数以上の学生が $f(x) = x^n$ のときは $g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ であることに気づいた。残りの半数はこの関係に気づかなかったのではなく，時間内にそれを考察

する箇所まで到達できなかった。さらに，$g'(x) = f(x)$ であることには 10 名程度が気づいた。それらの学生には,「君達は，大変な大発見をしたのだ！」ということを強調した。

このような形で $g'(x) = f(x)$ に気づかせても，数学的な意味での基本定理の発見とは言いがたいかもしれないが，少なくとも，和の極限で表される関数と元の関数との間に簡単な関係があるということは理解されたと思われる。

3.4　数式処理電卓を利用した授業の特徴

数式処理電卓が数学教育の中でどのような有効性があるかを，以上の例は如実に示している。合成関数の微分公式は，従来は教師が一方的に証明してきた箇所である。媒介変数表示された関数も，グラフを見るだけで曲線上の点の動きには一目瞭然の理解がえられる。また，区間の分割数を増やすにつれて定積分が収束する様子を見ることが，これまでの数学教育の中で，これほどの容易さで可能であっただろうか。

このように，数式処理電卓（数ナビ）のグラフ機能や数式処理機能を利用すれば，教授すべき内容をよりストレートに学生に理解させることが可能であり，しかも，これまで教師が説明してきたことを学生自身が気づくように導くことも容易に可能になる。

大きく分けると，数ナビを活用した教育で特徴的なことは，以下の 4 点にあると思われる。

(1) **学生による定理・公式の発見**

従来は教師が板書をしながら説明していたような定理・公式を，数ナビを操作させて学生自身に発見させる方向の授業が可能になる。同じ内容でも，一方的に教授された内容と，自ら気がついた内容とでは，その後の定着度や理解の深さには異なるものがあろう。

(2) **グラフ機能による一目瞭然の理解**

従来は式の変形で説明していたような内容を，グラフを通して一目瞭然の理解をさせることが可能になる。それは，式とグラフの両面からの同時理解を可能とするものである。グラフから x, y 座標を即座に表にできるので，数値的側面からの理解も容易である。

(3) **数学的な試行錯誤の容易さ**

従来は，学生に数学上の試行錯誤をさせて，その中から何らかの法則性を発見させることはなかなか困難であった。しかし，数ナビの数式処理機能やグラフ機能の活用で，学生にそれを行わさせることが可能になる。その発見を定式化させて証明まで考えさせることができれば，それは，まさに，学生に「数学」そのものを擬似体験させているることになるのではないだろうか。

(4) **実データからの関数理解**

いろいろな関数の授業では，最初に個々の関数の説明がなされ，その具体例は教師が黒板で例示していたと思われる。しかし，数ナビのオプションであるデータ収集器 (CBL) を併用すれば，学生に実データを採取させ，そのデータをもとにして関数を理解させることが可能になる。著者には，CBL を利用した授業経験はまだない。しかし，この機器を活用した授業は，数学と実世界との関りを理解させる上で極めて重要と思われる。

4　数式処理電卓の利用に関する学生の意識

4.1　「数ナビ」を使った授業に対する学生の意識

平成 12 年 6 月から平成 13 年 2 月まで，数式処理電卓 (数ナビ) を前節のような使い方をしながら微積分の授業をしてきた。そして，学生が，数ナビを利用した授業をどのように思っているかを，数度にわたりアンケート調査を行った。以下は，最後の授業 (平成 13 年 2 月下旬) に調査したときのものである。回答数は 2 クラスで 73 名である。

表 1　数式処理電卓の使用に関する学生の意識

数式処理電卓 (「数ナビ」) を使った授業に対する意識	はい	中間	いいえ
(1) 数ナビを家や寮でも使っている	63.0%	21.9%	15.1%
(2) 数ナビを使う授業はおもしろい	49.3%	42.5%	8.2%
(3) 数ナビは復習するとき便利だ	82.2%	13.7%	4.1%
(4) 数ナビはできるだけ使わないようにしてきた	6.8%	42.5%	50.7%
(5) 数ナビのおかげで，いろいろな計算が楽しくなった	27.4%	67.1%	5.5%
(6) 数ナビを使うと数学がよけいに分からなくなる	6.8%	32.9%	60.3%
(7) 数ナビのおかげで数学が前よりおもしろくなった	30.1%	64.4%	5.5%
(8) 数ナビを使うようになって前よりも計算力が落ちた	11.0%	53.4%	35.6%
(9) 数ナビの操作は，結局よく分からなかった	19.2%	43.8%	37.0%
(10) 数ナビの電池が無くなったので自分で交換した	2.7%	12.3%	84.9%
(11) 数ナビを私は授業のときしか使わない	15.1%	19.2%	65.8%
(12) 数ナビを通して友達と数学の話をする機会が増えた	19.2%	41.1%	39.7%
(13) 数ナビを使わないで普通の授業をしてほしかった	11.0%	31.5%	57.5%
(14) 数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる	63.0%	35.6%	1.4%
(15) 数ナビに頼って，自分であまり計算しなくなった	19.2%	39.7%	41.1%
(16) 数ナビを使って，数学が前より分かるようになった	35.6%	58.9%	5.5%
(17) 数ナビは，専門科目の勉強や実験のときも役立った	56.2%	30.1%	13.7%
(18) 数ナビのおかげで，理論的なことへの関心が高まった	31.5%	54.8%	13.7%
(19) 数ナビを使うと，難しい内容も簡単に見えてくる	37.0%	32.9%	30.1%
(20) 数ナビがあると難しい計算も自分でやってみる気になる	35.6%	38.4%	26.0%
(21) 数ナビを使う課題をもっと出してほしかった	11.0%	47.9%	41.1%
(22) 数ナビを使うことにより数学が嫌いになった	0.0%	30.1%	69.9%
(23) 数ナビを使って数学について前より考えるようになった	32.9%	53.4%	13.7%
(24) 数ナビに出会って，数学の楽しさを知った	17.8%	64.4%	17.8%
(25) 数ナビを 1 年のときから使いたかった	64.4%	21.9%	13.7%

「中間」は「どちらともいえない」に対する回答である。有効回答は 73 名。

この調査をした2月の授業内容は，積分の応用として媒介変数や極座標による面積や長さを扱っているときである。2年生にとって，これらの内容を理解してきちんと計算ができるようになることは，そう容易なことではない。実際,「(19) 数ナビを利用すると難しい内容も簡単に見えてくる」という項目に「いいえ」と否定的な回答をする者は 30.1%もいる。

しかし，それにもかかわらず,「(14) 数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる」(63.0%),「(2) 数ナビを使う授業はおもしろい」(49.3%) と回答している。「(22) 数ナビを使うことにより数学が嫌いになった」を「はい」と肯定する者は一人もいない。

総じて，数ナビを使用した授業は，学生から好意的に受けとめられたとみてよいであろう。ただし,「(8) 数ナビを使うようになって前よりも計算力が落ちた」(11.0%),「(15) 数ナビに頼って，自分であまり計算しなくなった」(19.2%) という学生がいることには注意が必要である。これらの学生の計算力が実際に低下したことを示す変化は試験の成績には現れていないが，この電卓の長期的な使用では，その使い方に十分な注意が必要であることを示している。

4.2 「数ナビ」使用に対する学生の意識変化

数ナビを使用した授業を学生がどのように感じているかは，貸与を始めて1ヶ月後の平成12年7月中旬，10月下旬，そして翌年の2月下旬と3回にわたる調査を行った。調査時点での授業内容は，7月は微分法の応用として関数の極大・極小，10月は積分法で定積分の定義や不定積分の計算，そして2月は積分法の応用として媒介変数や極座標による面積や長さを扱っている。

質問項目は時期に応じて変えているが，共通する項目も幾つかある。以下では，その共通項目への回答を時系列的に眺めてみたい。これにより，数ナビ使用の授業に対する学生の意識変化を知ることができる。

これをみると,「数ナビを利用すると，数学の理解がさらに深められる」(図1) を「はい」と肯定する者が，2月になって大きく増加している。「数ナビを使用すると，数学がかえって分からなくなる」(図2) を否定する者も，時期を追うごとに増加している。学生は，数ナビは数学の学習をする上で役に立つと感じているとみてよいであろう。

しかし，一方では,「数ナビを利用して，数学が前より分かるようになった」(図3) を肯定す

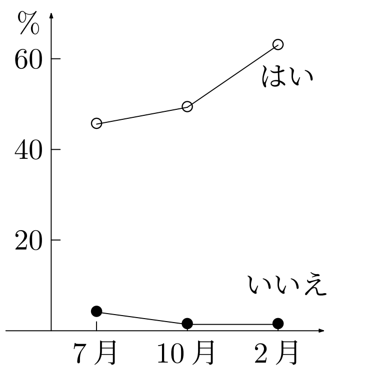


図 15: 数ナビ使用で数学の理解がさらに深められる

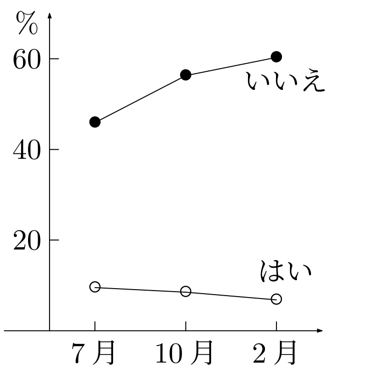


図 16: 数ナビの使用で数学がよけい分からなくなる

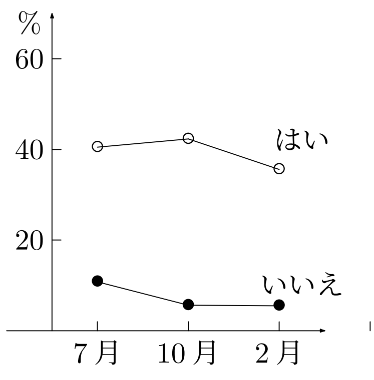


図 17: 数ナビで数学が前よりも分かるようになった

る者は，2 月の調査では逆に減少している。2 月の時期の授業内容では，媒介変数や極座標による面積や長さを扱っている。いかに数ナビを利用しようとも，これらは 2 年生にとってそう簡単な内容ではない。内容的に難度が増したことが,「前よりも分かるようになった」を肯定する者が減少した理由と思われる。しかし，この項目を「いいえ」と否定する者が増えているわけではない。この項目を否定する者は 10 月，2 月の調査とも 5%台であり,「どちらともいえない」という中間回答が多くなっている。

4.3 「数ナビ」使用に対する学生の生の声

以下では，数ナビに対する学生の生の声を幾つか紹介する。平成 13 年 2 月下旬の最後の授業で調査したものである。括弧内の数値は，学年末試験の成績である。平均 50 点，標準偏差 10 点の偏差値に変換した値で示した。

数ナビ使用に肯定的な意見

- 難しそうな計算も，数ナビがあればすぐあきらめずに「自分でやろう」という気になる。1 年間で全部までとはいかないが，ある程度使えるようになったのでいい方だと思う。1 年のときから使っていれば，もう少し理解できたかもしれない。 (41)
- 数ナビにはいろいろスゴイ機能があって，ちょっと感動した。数学は好きだけど面倒くさそうな計算を後回しにしていた私は，数ナビを使うことによって，より難しい計算もできるようになった気がする。 (47)
- 数ナビを使用することによって，今まで理解出来なかった計算でも少しずつ分るようになってきたと思う。数学の授業以外でも，よく家などで使っていた。 (33)
- 難しい積分は数ナビで答えが分かると，何となく解き方が予想できて解きやすくて良かったと思う。あんまり使わなかったけど，あって良かったと思う。 (59)
- 中学校では数学が最も得意な分野だったのに，高専に入ってから成績ががっくり落ちて少し落ち込んでいたけど，数ナビを使ってから数学が前よりできるようになった気がした。(34)
- 一つの関数で，いろいろな見方ができるのでとてもおもしろかった。できれば，もっと使い方をマスターしておけばよかった。この 1 年間は数ナビのおかげで，けっこう楽しい数学ができました。 (60)
- 数ナビを使ってから $\sin x$ や $\cos x$ のグラフが分かるようになった。グラフに関してよく使えて役に立った。 (54)
- まあまあグラフとは分かるようになった。そして，この式がどういうグラフかと感覚的に分かるようになった。 (51)
- 数ナビを利用して勉強してきたが，微分積分をやっていく上で，グラフの変化の仕方がよく分かるので，授業が分かりやすくなった。それに，答え合わせができるので，その点でも役に立った。 (63)

数ナビの使用で計算力の低下を懸念する意見

- 数ナビのおかげで難しい計算も自分で答えを出せるようになり，自学自習に大いに役立った。特にグラフが表示できる機能は頭の中のイメージを確かめることができるので，すごく良いと思う。ただ，数ナビを使っていると自分の計算力が低下するのではないかと気になる。数ナビを使用すべきところを見きわめるのが重要だと思った。 (58)
- 何でも数ナビに頼ってしまう時がある。ボタン一つで計算できるという簡単なものなので，自分の力だけでの計算ができなくなってしまうと思ったこともあった。あくまでも数ナビは補助的な道具として使いたい。また，復習する際にも大いに役に立った。 (47)
- 1 年間数ナビを使ってきましたが，一人で使いこなせたという域には達っしなかった思います。数学は計算練習が大切ですが，数ナビの便利さに頼ってしまうこともありました。数ナビはいろいろなことができます。もっと，教えられるのではなく，自分で覚えていきたかったと思いました。 (48)
- 使い方をすぐ忘れてしまったりすることが多かったので大変だった。数ナビに頼ってばかりだったので，いざとなったらグラフとかが描けなくなっていた。数ナビで答え合わせをしたけど，途中計算が分からなく自分で見直しても理解できなく大変なときもあった。(61)

5　数式処理電卓の使用と成績変化

5.1　数ナビの使用の有無による成績変化

微積を学習中の学生に数式処理電卓を使用させると言うと,「それでは，微積の計算を自分で出来なくなるのではないか？」という誤解を受けることが多い。3 節で紹介したように，数ナビは微積の概念を効果的に伝えるために利用したのであり，いろいろな問題を数ナビのキー操作だけで解かせようとしたわけではない。計算問題では，数ナビの数式処理機能を自分の計算結果の答え合わせとして利用させた。試験のときの利用は認めなかったので，自分で計算できなければならないことは，どの学生もわきまえており，数ナビの表示する解を書き写そうとする学生は皆無であった。

しかし，数式処理電卓を利用させると計算力が低下するのではないかという懸念には根強いものがあり，前節のアンケートでは学生自身の中からもそのような声があがっている。そこで，数式処理電卓の使用により計算力に変化が生じるかどうかを，定期試験の成績を通して実際に確認することとした。

従来型の授業を行っている他クラスの担当教官と協議して，定期試験の問題の一部 (2 枚のうち 1 枚) を共通問題として実施した。共通問題の配点は試験により異るが，100 点満点では 48 点〜64 点分が共通問題の配点である。

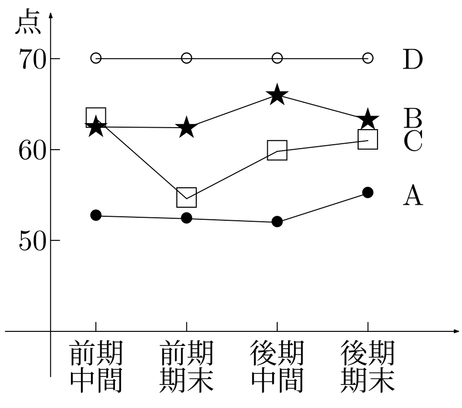


図 18: 共通問題のクラス間の成績

図 18 は，年 4 回行われた定期試験のうち，共通問題の得点を 100 点満点に換算した成績である。最も成績の良い D クラスの成績 (クラス平均) を 70 点とした場合の他クラスの成績を示した。著者が担当しているのは A(●) と B(★) のクラスである。試験のときは，数式処理電卓の持ち込みは認めていない。問題の内容は，微積分で通常出題されるような問題である。授業中に学生に課す問題を特に協議しているわけではないので，教え方の違いによる差が出ないよう，共通問題はできるだけ教科書にある問題やその類題で構成されている。

前期の中間試験は，数式処理電卓を使用し始めてまだ間もない時期である。年間を通すと，C クラスの変動が少し大きいが，A クラスや B クラスの成績と D クラスとの差は，特に拡大する傾向はみられない。むしろ，少し差が縮まったのではないかと思われる。

数ナビの使用は，わずか 1 年未満である。これだけの短期間で目に見える学力向上を期待するのは，無理な注文というべきであろう。これらのデータからいえることは，数ナビの使用で学力低下を示す傾向はみられなかったということである。4 節の結果では，数ナビの使用は数学を理解する上で有益であると多くの学生は感じている。さらに長期にわたり使用した場合は，試験の成績からみる学力向上も十分期待できるのではないかと思われる。

5.2 成績別にみた数式処理電卓への意識

数ナビに対する意識に成績による違いがないかどうかをみるため，2 月に行われた学年末試験の共通問題の成績により，全体を「上位 (23 名)」「中位 (29 名)」「下位 (21 名)」と 3 分する。そして，各成績区分ごとに，表 1 の数ナビに対する意識を調べてみた。

図 19〜21 は，各成績区分ごとに，これらの項目に対する「はい」と「いいえ」の割合をグラフ化したものである。これを見ると，これら 3 項目に対する回答には，あまり成績による差はみられないことが分かる。どの成績区分の学生も，半数以上は「数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる」を「はい」肯定し,「数ナビを使うと数学がよけいに分からなくなる」を「いいえ」と否定している。学生は，成績の上下によらず，数ナビの利用は数学を理解する上で役に立つと感じているとみてよいであろう。さらには，どの成績区分の学生も，半数近くは「数ナビを使う授業はおもしろい」と答えている。数学の理解に役に立ち，しかも授業がお

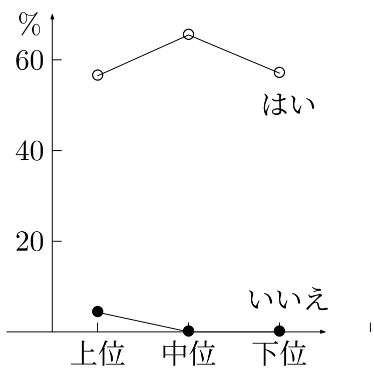


図 19: 数ナビ利用で数学の理解がさらに深められる

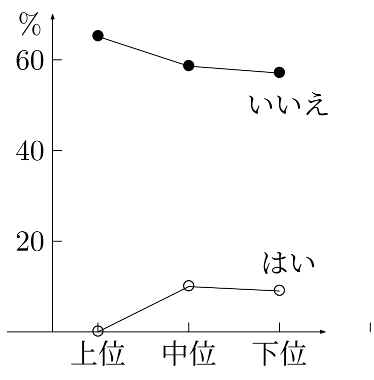


図 20: 数ナビを使うと数学がよけい分からなくなる

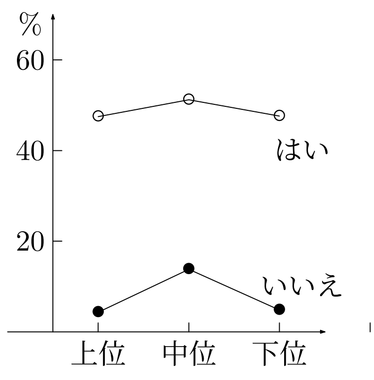


図 21: 数ナビを使う授業はおもしろい

もしろいと感じているわけであり，数学の授業をする側からみると，この上もないツールといえるのではないだろうか。なお，数ナビの使用を否定する者が皆無とまではいえないが，そのような学生は極めて少数である。表 1 からも分かるように，他の項目でも同様の傾向にある。

図 22〜24 は，回答の仕方に成績区分による差が見られた項目である。これを見ると，成績の上位の学生ほど,「数ナビを使うようになって，理論的なことへの関心が高まった」と回答している。これは，いろいろな場面で，数ナビを利用して数学の真の理解を得させようとしてきた結果と思われる。成績上位の学生が数ナビを使いこなした場合には，学生は数学的な思考を自分でどんどん押し進めることが容易に可能になる。著者は，時間の関係で，数ナビを通常の教科書の内容をよく理解させる方向での使い方しかできなかったが，数学的思考力を高めるような課題を長期にわたり何度も繰り返した場合，上位学生の能力には相当の進展がみられるだろうことが期待される。

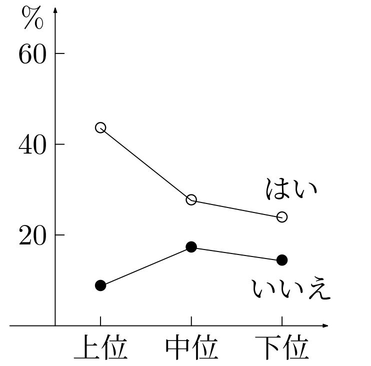


図 22: 数ナビで理論的なことへの関心が高まった

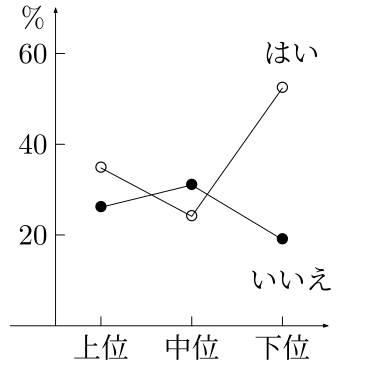


図 23: 難しそうな計算も自分でやってみる気になる

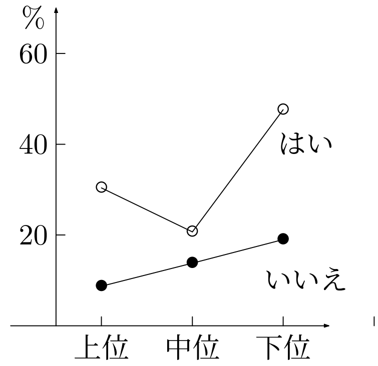


図 24: 前よりも数学について考えるようになった

このような方向で数ナビを利用した教育を実際に実践中の学校がある。大阪の有名進学校である私立清風高校である。清風高校では，平成 10 年度より，理数科の生徒に数式処理電卓 TI–92 を長期貸与した授業を実践中であり，従来にはないさまざまな課題が与えられている。たとえば，$\sin x$ のマクローリン展開が収束する様子から，$\sin x$ を $h(x) = x - x^3/6$ の $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$ の部分だけで表すことができるのではないかと思ったある生徒は，苦心の末，次のような式を考案している。[ ] はガウスの記号である。

$$\sin x \fallingdotseq (-1)^{\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right]} \times h\left(x - \pi\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right]\right)$$

このような式を考案することを教師が求めたわけではない。生徒が自らの興味のもとに，自主的に問題を設定して取り組んだものである。いろいろな課題の内容や，それに対する生徒のレポート，そして，そのような教育を受けて卒業していった生徒の感想がホームページ (`http://www.seifu.ac.jp/Math/`) で公開されている。数ナビを長期使用した場合の効果の大きさを垣間見ることができるだろう。

そして，注目すべきことは，成績上位の学生ばかりではなく成績下位の学生への効果もみられることである。図 23・24 をみると，成績下位の学生の半数近くは,「数ナビがあると，難しそ

うな計算も自分でやってみようという気持になる」「数ナビを使うようになって，前よりも数学について考えるようになった」と回答している。一般的にいって，成績下位の学生は，分からない箇所に遭遇すると自力でその先に進むことはなかなか困難であることが多い。しかも，そのような学生に限って，教師に質問することもない。ただ一言,「分かりません」をいう言葉を発して自分でその先を考えることを拒否し，机に突っ伏してしまうのが実情ではないだろうか。

しかし，数ナビを利用すれば，いろいろな関数のグラフは即座に表示される。学生にとっては難しそうな計算問題でも，結果は簡単に表示される。4.3 節にある学生の感想をみても，数ナビの表示するグラフや計算結果をみて，解答を考える上で参考になったことが記されている。数ナビを利用することにより，自分で解答にたどりつける可能性が高まったということであり，そのことが，難しい計算でも「自分でやってみよう」という気持にさせているのではないかと思われる。

いずれにしろ，学生は，成績の上下によらず，数ナビの使用は数学を理解する上で有益であると感じており，その授業に「おもしろさ」も感じている。特に，成績下位の学生の意欲を喚起していることには注目すべきであろう。数ナビの使用は，成績上位の者にも下位の者にも有効であるということであり，この電卓の教育効果の大きさが感じられる。

6　数式処理電卓の長期使用と数学不安感の変化

前節までのことから，数ナビの長期使用により，学生の数学に対する意識は大きく改善されたことが推察され，数学の学習に対して感じる不安感も軽減されたであろうことが期待される。そこで，以下では，そのような不安感を具体的に数値化し，数ナビを使用し始めた 6 月と翌年の 2 月下旬との間で，その数値の変化を調べてみたい。

「数学不安」をどのように数値化するかが問題であるが，教育心理学における数学不安に関する既存の研究を参考にして質問項目を作成した [5]。ただし，その内容は高専の数学の学習場面に合うよう多少の変更を加えた。「これから数学の授業が始まるとき」「数学のテスト勉強をするとき」「数学の教科書で新しい章に入るとき」「数学の授業を欠課したとき」など，合計 34 項目である。そして，これらの各項目に対して，不安を感じるかどうかを問い，それぞれ「1: 全く不安ではない」「2: あまり不安ではない」「3: どちらともいえない」「4: すこし不安である」「5: とても不安である」の 5 件法で回答を求めた。その回答の仕方に応じて 0〜4 点を与え，全項目の合計得点を「数学不安」とした。その得点が高ければ高いほど，その学生は数学の学習に強い不安を感じているとみてよいであろう。

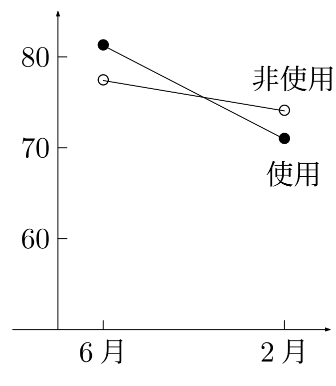


図 25: **数ナビの使用の有無と数学不安感の変化**

調査は，数ナビを貸与した平成 12 年 6 月上旬と，それを回収する平成 13 年 2 月下旬に同一の質問紙で行った。数ナビの使用効果をみるため，数ナビを使用しない他クラスでも同じ時期

に同一の調査を行っている。

図 25 は，数ナビの使用クラス (81 名) と非使用クラス (74 名) について，数学不安の平均を比較したものである。数学不安はいずれも減少しているが，数ナビの使用クラスの方の減少の方が大きい。平均値の差に関する検定を行うと，数ナビ使用クラスの 6 月から 2 月にかけての減少には有意差 (有意水準 1%) が認められた。

数ナビを使用しない他クラスの授業は別な数学教官が担当しており，教科書に沿った伝統的な微積分の授業が行われている。表 1 の回答結果をみれば，数ナビの利用で「数学不安が減少した」のは当然のことにようにも思えるが，一般的傾向として，学生は学年が上がるにつれて勉強自体への関心が薄らいでいく傾向がある。数学不安の減少要因には，数ナビの使用・非使用以外の要因も含まれていると思われ，その中で数ナビの効果がどの程度の割合を占めるのかは，さらに慎重に分析することが必要と思われる。

7　数式処理電卓を利用した学生のグラフアート

微積分の授業では，それ以前に学んだいろいろな関数の性質を熟知していることが前提とされる。しかし，実際には，必ずしもそれを前提にはできないのが現実である。微積分の授業は，そこで現れる関数の性質を復習しながら行わざるをえない。特に，関数のグラフで囲まれた図形の面積を求める箇所では，その関数のグラフを描けないことにはどうにもならない。

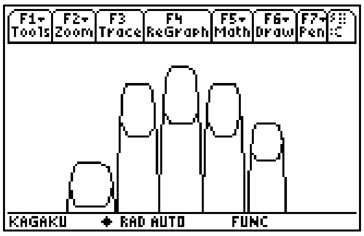
そこで，関数グラフの総復習をかねて，関数グラフを繋ぎあわせて何らかの絵を描いてくることを平成 12 年度の冬季休業の課題とした。数ナビのグラフ機能は極めて強力であり，99 個の関数を定義できる。しかも，個々の関数に，その描画範囲を指定することができる。この課題を出すにあたっては，描画範囲の指定の仕方や，グラフを繋いで絵を描く方法などについて，ある程度の説明を加えた。休業後の課題の提出率は 85%である。次頁に，提出された学生の作品の幾つかを紹介する。

正直なところ，これだけの作品が提出されるとは予想していなかった。学生は，これを完成させるまでには相当の試行錯誤があったと思われ，その中では，どのような関数のグラフがどのような形になるかを身をもって体験したと思われる。いみじくも，ある学生は，最後の授業で書かせた感想の中で次のように記している。

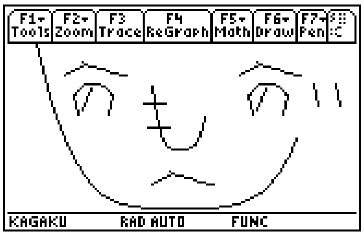
> グラフが描けるのがとても便利だと思いました。漠然と関数の式を見ても，よく分からないものが，グラフにすることによって変化の仕方を見たりすると理解が深まったような気がします。微分や積分の計算が出来るのも，テスト勉強の時に役立ちました (途中計算を確かめるのに)。数ナビアートも楽しかったです。グラフをよく理解していないと，考えているような線が引けず，苦労しましたが，関数の総復習になったように思えます。

この課題は，まさに，このような目的のために課したものである。数ナビを用いたグラフアートの課題は他高専でも行われており，Web 上で公開されている (`http://www.mathnavi.org/`)。

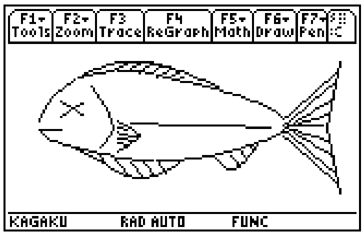
図 26: 数ナビによる学生のグラフアート



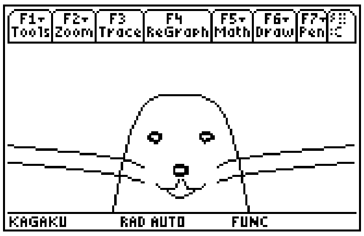
指



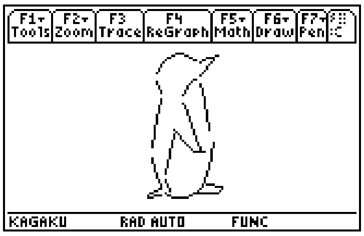
へのへのもへじ



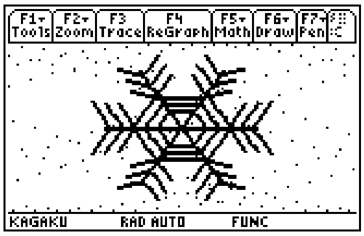
魚



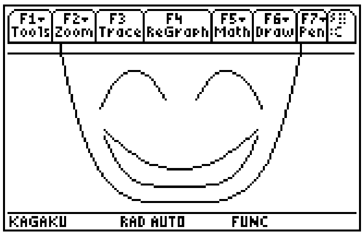
もぐら



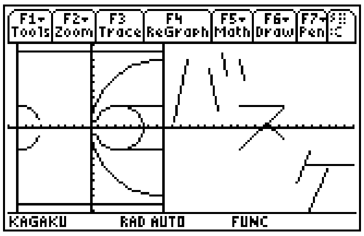
ペンギン



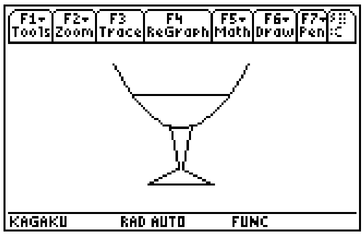
雪印



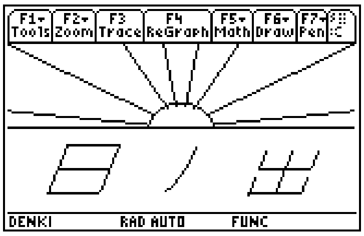
ニヤリ



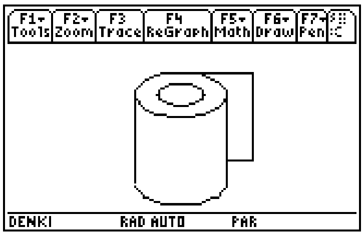
バスケットコート



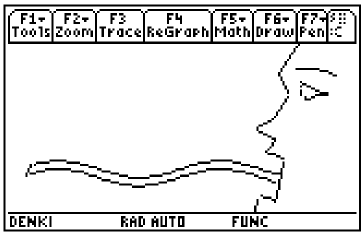
グラス



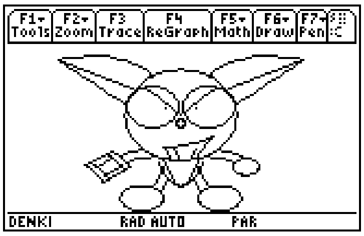
日ノ出



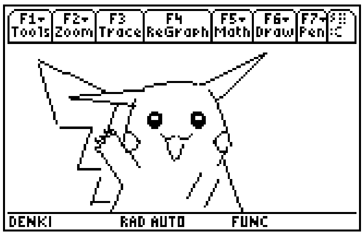
トイレ



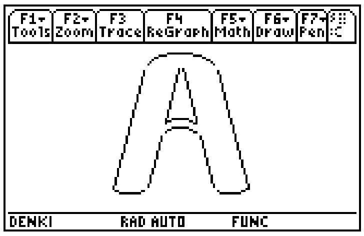
舌



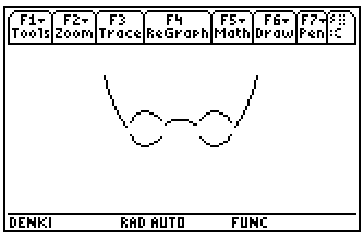
クロチャン



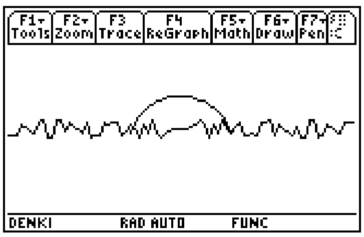
ピカチュウ



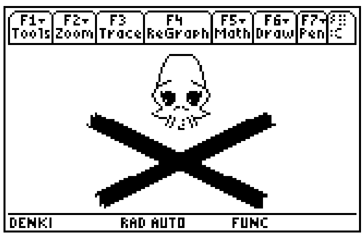
A



メガネ



荒海の日の出



ドクロ

指	指や爪の形状は，すべて x^8 の拡大や平行移動により描かれている。
へのへのもへじ	右側の「への」は，左側の「への」を平行移動したものである。
魚	50 以上の関数を組み合わせて作成されている。
もぐら	もぐらの髭は，無理関数のグラフが利用されている。
雪印	ドットは，$\sin 10x$ のグラフをドット表示させて実現されている。
トイレ	媒介変数表示が利用されている。
クロチャン	媒介変数表示された関数を 50 組以上も利用して作成されている。
ピカチュウ	50 個以上の関数を組み合わせて作成されている。成績下位の学生である。
メガネ	メガネのフレームには指数関数のグラフが利用されている。
荒海の初日の出	荒海は $\sin(x^3)$ であるが，ドットの精度の関係で，このように表示される。
ドクロ	成績下位の学生である。太線は直線を少しずつずらしながら描かれている。

8 おわりに

数式処理電卓 TI–89 を 6 月から翌年の 2 月まで学生に個人貸与して微積分の授業を行ってきたが，これまでやったこともない授業を行うことになり教材の作成等の準備が大変であった。しかし，学生の反応や教育効果は，それ以上のものが得られたと思われる。

この電卓を積極活用した数学教育は，学生自らが楽しみながら，しかも自分で「数学をする」ことを可能にする。数式処理機能を持つグラフ電卓は，学生に購入させるにはまだまだ高価であるが，それを有効活用した場合の教育効果には非常に大きなものがある。特に，成績の上下によらず，どの学生も数ナビの利用で数学の理解が深められると感じている。数年単位の長期の使用では成績面での効果も現れるだろうことが期待される。この電卓の使用は，積極的に推し進められるべきである。

参考文献

[1] 数ナビ活用研究会：すべての高専生に「数ナビを」，日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 7 巻, 第 1 号, pp.141–142, 2000 (URL) http://www.mathnavi.org/

[2] 梅野善雄：グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 7 巻, 第 1 号, pp.1–20, 2000

[3] 梅野善雄：数式処理電卓を利用した微積分教育の改善, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 8 巻, 第 1 号, pp.13–30, 2001

[4] 梅野善雄：数式処理電卓の利用による数学に対する学生の意識変化, 平成 13 年度国立高等専門学校教員教育研究集会，豊橋技術科学大学, 2001.8

[5] 藤井義久：数学不安尺度 (MARS) に関する研究, 教育心理学研究, 第 42 号, 第 4 号, pp.86–92, 1994