From TRANSACTIONS OF MATHEMATICAL EDUCATION FOR KOSEN AND UNIVERSITY
( VOL.8 NO.1 May 2001 )
Japan Society of Mathematical Education, Division of Kosen and Universty

# 数式処理電卓を用いた微積分教育の改善

梅野　善雄

# Improvement of Teaching Method on Calculus with Algebraic Calculators

Yoshio UMENO

日本数学教育学会高専・大学部会論文誌別刷
( Vol.8 NO.1 May 2001 )

# 数式処理電卓を用いた微積分教育の改善

**梅野 善雄***

# Improvement of Teaching Method on Calculus with Algebraic Calculators

UMENO Yoshio*

**Abstract:** A great change in mathematics education, world wide, has been caused by the use of graphing calculators. In Japan, however, graphing calculators are rarely used in mathematics classes, as most mathematics teachers have little knowlegde about the functions or significance of them. To confirm the effects of graphing calculators on mathematics classes, we lent algebraic calculators to our students and used them in calculus almost all year. We noticed the following results;

(1) The students' attitude towords mathematics progressed dramatically. For example, they said that they gained a better understanding of mathematics. (2) It was possible, by the use of algebraic calculators, that students discovered, by themselves, some properties of calculus which had been, prior to calculator use, taught by the teacher. (3) Students gained a better and quite obvious understanding of calculus by the use of the visuallization property of algebraic calculators. (4) It was possible, by the use of algebraic calculators, for mathematics teachers to set tasks which needed mathematical trial and error. This suggests a new educational method for mathematics.

After having used algebraic calculators in calculus all year, most students appreciated them very much. The vertification of these calculators on several points of view must be done immedeately, and must be wide spread as well.

**Keywords:** Algebraic Calculators, Calculus.

## 1 はじめに

今，世界の数学教育では，グラフ電卓を活用した大きな変革が進行中であり [1]，その動きはすでに 10 年以上も前に始まっている．日本でもグラフ電卓の機能やその数学教育上の意義に関する先駆的な出版が行われてはいるが [2]，大部分の教育現場では，世界で起きている「数学教育の革命」とも呼ばれる大きな変化を，あまり知らないように思われる．その変化とは，教師が一方的に「教える」授業から，学生自らが「学ぶ」授業に転換した授業である．グラフ電卓は，学生自身がいろいろな思考実験や数学的な試行錯誤をすることを可能にし，学生の数学に対する興味・関心や能力を大きく進展させる可能性を持つものである．

最新のグラフ電卓は，高度の数式処理機能を持つ [3]．それは，単なる「関数電卓」の延長線上で把えられるべきではない．むしろ，Mathematica や Maple のような数式処理ソフトの小型

*一関工業高等専門学校一般教科, 岩手県
Ichinoseki National College of Technology, Ichinoseki-shi, 021–8511, Japan

版と理解した方が，この電卓の能力や意義を正しく伝えている．その数式処理能力は極めて高度であり，数式処理ソフトの国際コンペで，数式処理電卓 TI–92 は Mathematica と並んで首位タイになったこともある [4].

本校では，このようなグラフ電卓を活用した数学教育の効果を確認するため，平成 12 年度の本校 2 年生に対してグラフ電卓を活用した微積分の授業を試行した．使用したのは，数式処理機能を持つグラフ電卓 TI–89 である．平成 12 年 6 月より平成 13 年 2 月末の学年末試験終了日まで，著者の担当する 2 年生 2 クラスの全学生にマニュアル付きで貸与した†．以下では，この数式処理電卓を用いた 1 年間の実践結果について報告する．この電卓の数学教育上の意義を考えるとき，何らかの参考になれば幸いである．

## 2　高専における数式処理電卓の利用状況

はじめに，数式処理電卓を活用した日本の数学教育の状況を述べる．この電卓を活用した数学教育は，日本ではまだ数えるほどしか行われていない．しかし，この電卓は，数学教育にとって極めて大きな意義を持つものである．その利用法等を検討するための研究会 (数ナビ活用研究会‡) も結成され，メーリングリストで様々な情報が交換されている．平成 12 年度時点では，以下の高専で，グラフ電卓や数式処理電卓を活用した授業が試みられている．

なお，高校では，大阪の私立清風高校において，数式処理電卓 TI–92 を長期貸与した授業が一部のクラスで平成 10 年より試行されている [5].

**石川高専**　平成 11 年度に，数式処理電卓 (TI–89) を購入して授業で試行．平成 12 年度からは 2 クラス (1 年と 3 年) に長期貸与して，この電卓を本格利用した授業を実践中である．

**一関高専**　平成 11 年度に数式処理電卓 (TI–89) を購入し，平成 12 年の 2 年生の微積分の授業と 4 年の応用数学 (フーリエ級数) の授業で使用．同年 6 月から平成 13 年 3 月までは，2 年生 2 クラスに TI–89 を長期貸与した授業を試行した．

**福井高専**　平成 12 年度の新入生全員に数式処理電卓 (TI–89) を購入させ，1 年の全クラスでこの電卓を活用した授業が行われた．

**金沢高専**　平成 8 年度よりグラフ電卓 (TI–83) を新入生全員に購入させ，数学と物理を融合した総合科目「数物ハンズオン」で活用されている．

**その他**　日本数学教育学会高専・大学部会では，平成 12 年度の日本数学教育学会全国算数・数学教育研究 (千葉) 大会において，数式処理電卓の実践報告会を開催した．そこでは，上記 4 高専の実践報告が行われると共に，参加者に数式処理電卓 (TI–89) を貸与して，これらの高専教官が中心となった講習が行われた．約 50 名の参加があり盛況であった．

---

†これらの電卓は，テキサスインスツルメント社から研究助成として貸与を受けたものである．ここに深甚なる謝意を表する．

‡この研究会では，数式処理可能なグラフ電卓を含むハンドヘルドコンピューターは，もはや「電卓」ではなく数学上の「思考のツール」であるということから,「数学ナビゲータ」(略して「**数ナビ**」) と呼ぶことを提唱し，学生にもそのように呼ばせている．このように命名して研究会を発足させたのは，石川高専の阿蘇和寿教授である．

## 3　高専における微積分の授業内容

本校の 2 年の微積分 (4 単位) で使用した教科書は，高専用の教科書である「微分積分 I」(田河成長他著，大日本図書) である．日本で数式処理電卓を利用した授業を行っているところはまだ少ないので，授業の指針や他校での長期的な実践例は皆無に近い．したがって，実際の授業は，この電卓をどのような場面でどのように利用させるべきかを，手探りで探し求めながら行わざるをえない．並行する他クラスでは，電卓を利用しない普通の授業が行われている．年度末で進度のずれを生じるわけにはいかないので，授業の進行状態は他クラスとほぼ同一レベルに保つことが必要となる．そのため，授業の内容はできるだけ教科書に添い，その内容をよく理解させるためのツールとして利用した．

具体的な教授項目は以下の通りである．この年度では，4 章§2 の「極座標による図形」まで終えることができた．

**大日本図書「微分積分 I」の内容**

1 章 微分法
- §1 関数の極限と導関数
  - 関数の極限，関数の連続，微分係数，導関数，導関数の公式，合成関数の導関数
- §2 いろいろな関数の導関数
  - 三角関数の導関数，逆三角関数，逆三角関数の導関数，対数関数・指数関数の導関数

2 章 微分法の応用
- §1 関数の変動
  - 平均値の定理，関数の増減と極値，関数の最大・最小，高次導関数，曲線の凹凸
- §2 いろいろな応用
  - 媒介変数表示の微分法，接線と法線，不定形の極限値，速度と加速度

3 章 積分法
- §1 定積分と不定積分
  - 定積分の定義，定積分の性質，不定積分，定積分と不定積分の関係，定積分の計算
- §2 積分の計算
  - 不定積分の置換積分法，定積分の置換積分法，部分積分法，分数関数・無理関数の積分，三角関数の積分

4 章 積分の応用
- §1 面積・曲線の長さ・体積
  - 図形の面積，曲線の長さ，立体の体積，回転体の表面積
- §2 いろいろな応用
  - 媒介変数表示による図形，極座標による図形，変化率と積分，広義積分，数値積分

## 4　微積分の授業における数式処理電卓の利用

数式処理電卓を，微積分の授業で具体的にどのように利用したかを以下に述べる．すべての授業を再現するわけにはいかないので，典型的な使用例の幾つかを紹介する．特徴的なことは，従来は教師が板書をしながら説明していた内容を，電卓を通した思考実験をさせることにより

学生自身に発見させ，その後に通常の説明をするということである．

### 4.1　微分と積分の計算練習

数学で数式処理電卓を利用させることに対しては，大きな誤解を受けることが多い．微分や積分などの計算を電卓のキー操作だけで行わさせるのではないか，それでは微分・積分の計算力が身につかないのではないか，というものである．

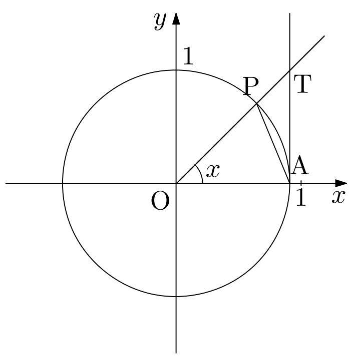
数式処理電卓を学生に貸与して以来，極限値の計算，微分の計算，そして積分の計算などでこの電卓を利用してきた．教科書やプリントの計算問題は，電卓を使えばキー操作だけで即座に答が表示される.「計算のときに電卓を使ってはいけない」と注意したのは，電卓を貸与後の計算練習の最初の時間のとき，1 回だけである．それは，電卓の表示する答を書き写すだけで問題解きを終えたような錯覚をしている学生が数名いたからである．この注意は，それ以降は一度も言う必要はなかった．学生は，自分の計算結果の答え合わせとして利用している．試験のときの持ち込みは認めていないので,「その計算を自分でできるようにならなければいけない」ことは，どの学生も当然の如く弁えているといえよう．

不定積分の計算のときは，電卓による不定積分の求め方をまだ教えていないにもかかわらず,かなりの学生がこの電卓を利用していた．電卓による不定積分の求め方をすでに知っていたわけではない．自分で行った積分計算の結果を電卓の数式処理機能を利用して微分し，元の関数に戻るかどうかを確かめていたのである．従来の授業でも，積分の計算が正しいかどうかを微分して確かめさせてはいたが，それは簡単な場合についてだけである．しかし，数式処理電卓を利用すれば，積分結果が複雑な式であっても，いつでも結果を微分して確かめることができる．このような目的で電卓を使うことは，微分と積分の関係を正しく身につけさせるためにも有効と思われる．

### 4.2　極限値　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

**教科書の説明の概略**

$x \to 0$ のときを考えるので，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考えれば十分であることに触れた上で，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える．右図のような単位円において角 $x$ の動径を考え，AT は点 A における単位円の接線とする．面積の大小関係は,




$$\triangle\mathrm{POA} < \text{扇形 OAP} < \triangle\mathrm{TOA}$$

であることから,

$$\sin x < x < \tan x \qquad \therefore\ \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$0 < x < \pi/2$ では $\sin x > 0$ より両辺を $\sin x$ で割り，さらに，その逆数をとることにより,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

を導く．次に，$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のときは，$-x = t$ とおくと $0 < t < \frac{\pi}{2}$ であり，

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

となることから，$x < 0$ のときも上の不等式が成立することを導き，その上で，$x \to 0$ のとき $\cos x \to 1$ であることから，挟み撃ちの原理により，次式を得る．

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

### 数式処理電卓のグラフ機能を利用した説明

この部分は，数式処理電卓のグラフ機能を利用して次のような流れの授業を行った．

(1) 2 つの関数 $y = \sin x, y = x$ のグラフをグラフ電卓で表示させる．(図 1)

(2) それを原点を中心として何度か拡大させる．(図 2)

(4) 拡大された画面から，$\dfrac{\sin x}{x}$ の値はどのような値であるかを予想させる．

(5) 使用しているグラフ電卓は，2 つのグラフの座標データを即座に表に変換する機能がある．(2) で拡大された画面の座標データを表に変換させる．(図 3)

(6) 表から，$x \to 0$ につれて $y1 = \sin x$，$y2 = x$ の値がどのように変化していくかを考えさせる．

(7) 次に，$y3 = \sin x/x$ の数値も表に同時に表示させ，気づいたことを書かせる．(図 3)

(8) さらに，$y = \sin f(x), y = f(x)$ の $f(x)$ をいろいろな関数に変えて，$f(x) \to 0$ のとき，$\sin f(x)/f(x)$ のグラフや値がどのようになるかを考えさせる．

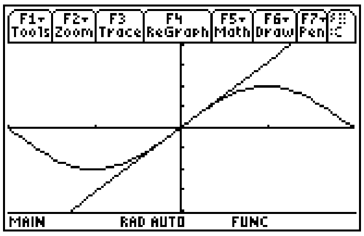



**図 1**

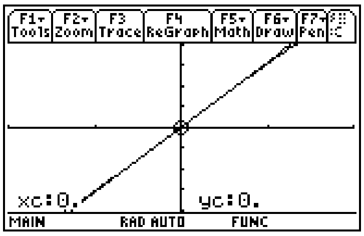



**図 2**

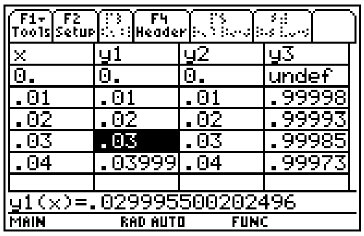



**図 3**

$y1 = \sin x$，$y2 = x$，$y3 = \sin x/x$

以上を，学生に数式処理電卓を操作させることにより行った．具体的な人数は調べなかったが，多数の学生が $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ であることに気づいた．この後で，通常の説明を行った．

## 4.3　合成関数の微分の公式

### 教科書の説明

合成関数の微分公式は，導関数の定義に基づき，式の変形だけで次のように行われる．

$y = f(u), u = g(x)$ が微分可能のとき，$x$ の増分に対する $u$ の増分を $\Delta u$ とし，それに対する $y$ の増分を $\Delta y$ とすると，

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x), \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

である．微分可能なら連続であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ であることに注意した上で，$\Delta u \fallingdotseq 0$ のときは

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

となることを導き，$\Delta u = 0$ のときも証明できるとする．

しかし，増分を表す記号である $\Delta y, \Delta u, \Delta x$ を多数混在させた式による「証明」を行っても，どの程度の学生が真の理解を得たかは疑問である．そして，その後は，ともかく公式であるとして，これに基づいた多数の計算練習を行わさせて，この公式の定着を図ることになる．

**数式処理電卓の数式処理機能を利用した説明**

数式処理電卓の数式処理機能を利用し，次のような流れで合成関数の微分の公式に気づかせようとした．

(1) 具体的な関数を，$y = f(u), u = g(x)$ という 2 つの関数に分解させる．
その関数は，$y = (3x-5)^4, y = \sqrt{3x+4}$ などである．

(2) $y = f(u), u = g(x)$ の導関数を自分で計算させる．
この段階で，$y = x^n, y = \sqrt{x}$ の導関数については，すでに学んでいる．

(3) $y = f(g(x))$ の導関数を，数式処理機能を利用して求めさせる．

(4) $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$ の間にどのような関係があるかを考えさせる．

約半数の学生が $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ に気づいた．中には，3 つに分解する場合も同様であることを自分で確かめ，自分の発見に「すごい」とほくそえんでいる学生もいた．このような発見をさせた後で，普通の証明を行った．

## 4.4　定積分の定義

**教科書の説明**

高専用の教科書である大日本図書の「微分積分 I」では，積分法の最初に和の極限として定積分を次のように定義する．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

ここで，$x_k$ は区間 $[a, b]$ を $n$ 個の小区間に分割したときの分点であり，$\Delta x_k$ は小区間の幅である．この定義に基づき，$f(x) = x$ や $f(x) = x^2$ などの関数について区間 $[0, 1]$ を $n$ 等分した場合について和や極限値の計算を行う．そして，この定義から定積分の性質を導く．その後で不定積分について説明し，積分の平均値の定理を経てから，定積分と不定積分の関係として微積分の基本定理の証明が行われる．

数学の立場から見ると正統的な説明方法であるが，2 年生に定積分をこのような和の極限として理解させることは，実際にはなかなか難しいものがある．それは，理論的な話が連続することもさることながら，そこでは 1 年で学んだ和の記号 $\Sigma$ が現れ，そのときに学んだ数列の和

の公式を知っていなければならず，さらには半年前に学んだ極限値の計算も必要になるからである．

### 数式処理電卓を利用した説明

数式処理電卓の数式処理機能とグラフ機能を複合的に利用して，次の流れで和の極限としての定積分を理解させようとした．関数 $f(x)=x^2$ を区間 $[0,1]$ で考え，$n$ 等分した場合を考えている．

(1) 区間 $[0,1]$ を 2 等分して，長方形の高さを小区間の右端に対応する $f(x)$ の値で定めたときの，長方形の面積の和を計算させる．

(2) 3 等分，4 等分した場合の計算をさせる．

(3) $n$ 等分した場合の，長方形の面積の和の式を書かせる．

(4) 数式処理電卓に $f(x)=x^2, s(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を定義して $s(2), s(3), s(4)$ を表示させる．(1)～(2) で求めた値と一致することを確認させる．(図 4～6)

(5) $n=10, 50, 100, 500$ の場合の $s(n)$ の値を電卓を利用して分数と少数で求めさせ，表に書き入れさせる．

(6) グラフの表示の仕方を数列用に変更させ，数列 $s(n)$ のグラフを表示させる．$x=n, y=s(n)$ の場合のグラフが表示される．グラフ上を移動すると，点の座標が下段に表示される．その値が (4)(5) で求めた値と一致することを確認させる．(図 7)

(7) グラフの座標データを表で表示させ，(4)(5) と一致することを確認させる．(図 8)

(8) $s(n)$ を表示させて書き写させ，$n\to\infty$ のときの極限値を自分で計算させる．(図 9)

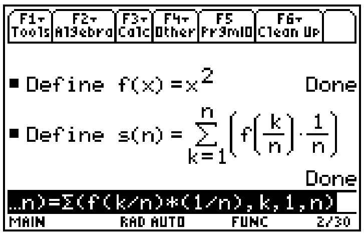



**図 4**

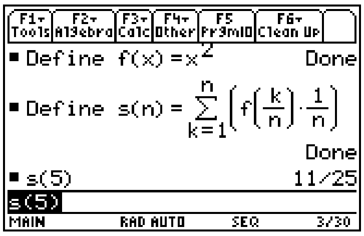



**図 5**

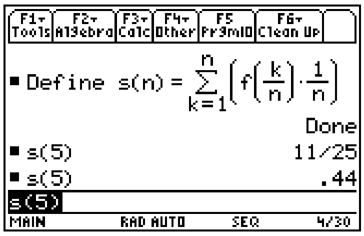



**図 6**

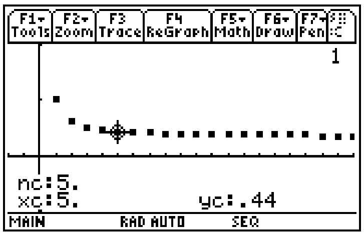



**図 7**

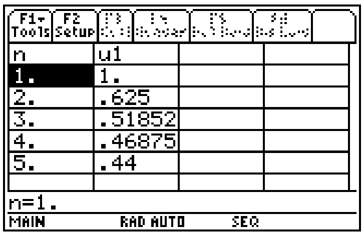



**図 8**

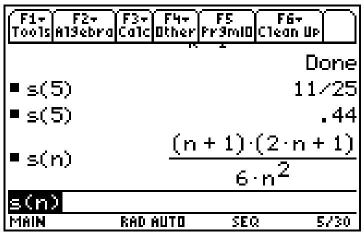



**図 9**

(9) 以上のことより，$\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ であることを確認させる．

(10) 同様のことを区間 $[0,x]$ で行わさせ，$s(n,x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)\frac{x}{n}$，$g(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} s(n,x)$ として，いろいろな $f(x)$ に対して $g(x)$ を求めさせ，$g(x)$ と $f(x)$ との間にどのような関係があるかを考えさせる．(図 10〜12)

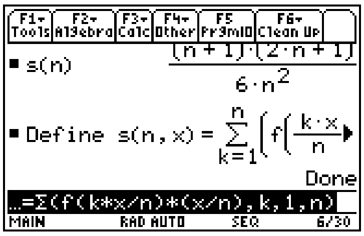



図 10

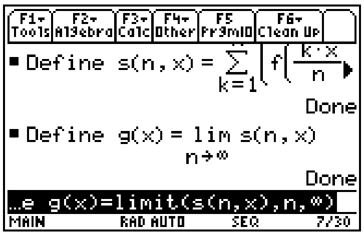



図 11

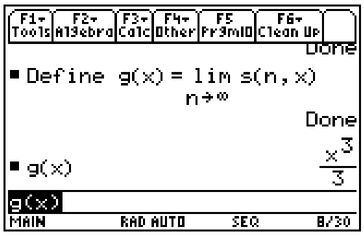



図 12

以上の手順により，$f(x)=x^n$ のとき $g(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ であることに，かなりの学生が気づいた．クラスによっては，$g'(x)=f(x)$ であることに 10 名近くが気づいている．この後で，全体をもう一度おさらいする感じで通常の説明を行った．

この部分は手順が多くて若干複雑だったかもしれず，微積の基本定理にまで気づいた者はそれほど多くはなかった．しかし，手順をもう少し工夫して時間を多く取れば，多くの学生が気づくようにさせることも可能と思われる．

## 5　数式処理電卓を活用した授業の有効性

数式処理電卓が数学教育の中でどのような有効性があるかを，前節の例は如実に示している．前節の例は，従来は，いずれも教師が黒板で一方的に説明する部分である．しかも，その内容について，どの程度の理解が得られたかは不明であり，単に計算公式としての記憶が残るだけの場合が多いのが実態ではないだろうか．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であることは，$y=\sin x, y=x$ グラフを単に拡大するだけで一目瞭然の理解が得られる．また，区間の分割数を増やすにつれて定積分が収束する様子を見ることが，これまでの数学教育の中で，これほどの容易さで可能であっただろうか．2 年生に微積分の基本定理にまで気づかせることが可能なのは，数式処理電卓ならではのことである．

このように，数式処理電卓のグラフ機能や数式処理機能を利用すれば，教授すべき内容をよりストレートに学生に理解させることが可能であり，しかも，これまで教師が説明していたことを学生自身が気づくように導くことも容易に可能になる．このことが，世界中で「数学教育の革命」と呼ばれる所以である．

## 6　数式処理電卓と数学的思考力

この電卓を利用すると，前節で述べたような教科書に記述されている内容を理解させるために有効なばかりではなく，学生自身に数学的な試行錯誤をさせることが可能になる．これは従来の教科教育法では見落とされていた部分であり，この電卓の活用により，数学教育に関して全く新しい側面からのアプローチが可能になると思われる．

たとえば，3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを係数 $a, b, c$ を変えながら数式処理電卓で表示させ，係数 $a, b, c$ とグラフの形状との関係について考察させることが可能になる．通常の数学の問題は，いろいろな計算問題や典型的な応用問題を解かせることが多く，学生にいろいろな試行錯誤をさせて，その中から何らかの規則性を発見させるような課題が出されることはなかった．というより，出したくても出せなかったというべきであろう．数式処理電卓を利用させれば，このような課題を出すことが可能になる．

この 3 次関数の課題について，学生はいろいろな調べ方をしている．

(1) ある学生は，$y = x^3 + 2x^2 + 4x + 6$ を基本にして，係数の一つを少しずつ変えながら，どの部分の係数をどう変えるとグラフがどのように変わるかを詳細に調べている．

(2) ある学生は，$a, b, c$ の中に 0 が含まれるかどうかにより，いろいろなケースを細かく分類して調べている．

(3) ある学生は，$a, b, c$ の符号のあり方により，いろいろなケースを細かく分類して調べている．

(4) ある学生は，係数 $c$ はグラフの形状には関係がないことを見抜き，$y = x^3 + ax^2 + bx$ について調べている．

そして，学生は，具体的には「係数 $a$ が増えると，グラフは山なりになること」「係数 $b$ の部分が増えるとグラフの傾きが急になること」「グラフの形状は係数 $b$ の符号で決まること」「係数 $c$ は $y$ 切片であること」などに気づいている．

このような課題を何度も繰り返していけば，数学的思考力が大きく鍛えられるだろうことは容易に想像できる．そのような課題は既存の問題集にはないので，必要に応じて教師側が適切な課題を見い出すことが必要になる．学生に解答可能な内容の課題を見出すのは容易ではないかもしれない．学生の側も，そのような課題への解答の仕方には慣れていないので，どのように解答すべきかの戸惑いがあるであろう．提出されたレポートには細かい個別指導が必要かもしれない．しかし，適切な課題と適切な指導・助言のもとに，このような課題を長期的に何度も繰り返した場合，一体どのような学生が育つことになるのだろうか．

このような利用法で日本で最も進んだ実践が行われているのは，大阪の私立清風高校においてである．具体的な課題やそれに対する生徒の解答，そして 2 年間の長期実践を経た生徒の感想などがホームページで公開されている [5]．この電卓を長期間有効活用した場合の教育効果の大きさを垣間見ることができる．

# 7　数式処理電卓を利用した授業に対する学生の感想

## 7.1　アンケート調査からみた学生の意識

学生が，この電卓や，それを利用した授業をどのように思っているかを調査するため，数度にわたるアンケート調査を実施した．以下には，最後の授業 (平成 13 年 2 月中旬) で調査したときの結果を述べる．回答数は 2 クラスで 73 名である．なお，この電卓を，学生には「数ナビ」と呼ばせている (**2** 節参照)．

## 表１　数式処理電卓の使用に関する学生の意識

(平成 13 年 2 月下旬調査)

| 数式処理電卓 (「数ナビ」) に関する意識 | はい | 中間 | いいえ |
|---|---|---|---|
| 数ナビを家や寮でも使っている | 63.0% | 21.9% | 15.1% |
| 数ナビを使う授業はおもしろい | 49.3% | 42.5% | 8.2% |
| 数ナビは復習するとき便利だ | 82.2% | 13.7% | 4.1% |
| 数ナビはできるだけ使わないようにしてきた | 6.8% | 42.5% | 50.7% |
| 数ナビのおかげで，いろいろな計算が楽しくなった | 27.4% | 67.1% | 5.5% |
| 数ナビを使うと数学がよけいに分からなくなる | 6.8% | 32.9% | 60.3% |
| 数ナビのおかげで数学が前よりおもしろくなった | 30.1% | 64.4% | 5.5% |
| 数ナビを使うようになって前よりも計算力が落ちた | 11.0% | 53.4% | 35.6% |
| 数ナビの操作は，結局よく分からなかった | 19.2% | 43.8% | 37.0% |
| 数ナビを私は授業のときしか使わない | 15.1% | 19.2% | 65.8% |
| 数ナビを通して友達と数学の話をする機会が増えた | 19.2% | 41.1% | 39.7% |
| 数ナビを使わないで普通の授業をしてほしかった | 11.0% | 31.5% | 57.5% |
| 数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる | 63.0% | 35.6% | 1.4% |
| 数ナビに頼って，自分であまり計算しなくなった | 19.2% | 39.7% | 41.1% |
| 数ナビを使って，数学が前より分かるようになった | 35.6% | 58.9% | 5.5% |
| 数ナビのおかげで，理論的なことへの関心が高まった | 31.5% | 54.8% | 13.7% |
| 数ナビを使うと，難しい内容も簡単に見えてくる | 37.0% | 32.9% | 30.1% |
| 数ナビがあると難しい計算も自分でやってみる気になる | 35.6% | 38.4% | 26.0% |
| 数ナビを使うことにより数学が嫌いになった | 0.0% | 30.1% | 69.9% |
| 数ナビを使って数学について前より考えるようになった | 32.9% | 53.4% | 13.7% |
| 数ナビに出会って，数学の楽しさを知った | 17.8% | 64.4% | 17.8% |
| 数ナビを１年のときから使いたかった | 64.4% | 21.9% | 13.7% |

「中間」は,「どちらともいえない」に対する回答である．有効回答は 73 名.

このアンケートを調査した時期の授業内容は，積分の応用として媒介変数や極座標による面積や長さを扱っているときである．2 年生にとって，これらの内容を理解してきちんと計算ができるようになることは，そう容易なことではない．実際,「数ナビを利用すると難しい内容も簡単に見えてくる」という項目に「いいえ」と否定的な回答をする者は 30.1%もいる．なお，前回の調査 (平成 12 年 10 月) では，この項目に否定的な回答をする者は 19.7%であった.

しかし，それにもかかわらず,「数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる」(63.0%),「数ナビを使う授業はおもしろい」(49.3%),「数ナビを利用すると難しい内容も簡単に見えてくる」(37.0%) と回答している．しかも，これらの項目への肯定的な回答は，前回の調査よりも増えている．特に,「数ナビを使って数学について前よりも考えるようになった」(32.9%) とあり，学生の数学に対する意識が相当向上したことがうかがわれる.

ただし,「数ナビを使うようになって前よりも計算力が落ちた」(11.0%),「数ナビに頼って，自分であまり計算しなくなった」(19.2%) という学生がいることには注意が必要である．これらの学生の計算力が実際に低下したことを示す変化は試験の成績には現れていないが，この電卓の長期的な使用では，その使い方に十分な注意が必要であることを示している．

以下では，学生の生の声を幾つか紹介しておく．

**電卓使用に肯定的な意見**

- 難しそうな計算も，数ナビがあればすぐあきらめずに「自分でやろう」という気になる．1 年間で全部までとはいかないが，ある程度使えるようになったのでいい方だと思う．1 年のときから使っていれば，もう少し理解できたかもしれない．
- 数ナビにはいろいろスゴイ機能があって，ちょっと感動した．数学は好きだけど面倒くさそうな計算を後回しにしていた私は，数ナビを使うことによって，より難しい計算もできるようになった気がする．
- 数ナビを使用することによって，今まで理解出来なかった計算でも少しずつ分るようになってきたと思う．数学の授業以外でも，よく家などで使っていた．
- 難しい積分は数ナビで答えが分かると，何となく解き方が予想できて解きやすくて良かったと思う．あんまり使わなかったけど，あって良かったと思う．
- 中学校では数学が最も得意な分野だったのに，高専に入ってから成績ががっくり落ちて少し落ち込んでいたけど，数ナビを使ってから数学が前よりできるようになった気がした．
- 一つの関数で，いろいろな見方ができるのでとてもおもしろかった．できれば，もっと使い方をマスターしておけばよかった．この 1 年間は数ナビのおかげで，けっこう楽しい数学ができました．
- 数ナビを使ってから $\sin x$ や $\cos x$ のグラフが分かるようになった．グラフに関してよく使えて役に立った．
- まあまあグラフとは分かるようになった．そして，この式がどういうグラフかと感覚的に分かるようになった．

**計算力の低下を懸念する意見**

- 数ナビのおかげで難しい計算も自分で答えを出せるようになり，自学自習に大いに役立った．特にグラフが表示できる機能は頭の中のイメージを確かめることができるので，すごく良いと思う．ただ，数ナビを使っていると自分の計算力が低下するのではないかと気になる．数ナビを使用すべきところを見きわめるのが重要だと思った．
- 何でも数ナビに頼ってしまう時がある．ボタン一つで計算できるという簡単なものなので，自分の力だけでの計算ができなくなってしまうと思ったこともあった．あくまでも数ナビは補助的な道具として使いたい．また，復習する際にも大いに役立った．
- 1 年間数ナビを使ってきましたが，一人で使いこなせたという域には達っしなかった思います．数学は計算練習が大切ですが，数ナビの便利さに頼ってしまうこともありました．数

ナビはいろいろなことができます．もっと，教えられるのではなく，自分で覚えていきたかったと思いました．

- 使い方をすぐ忘れてしまったりすることが多かったので大変だった．数ナビに頼ってばかりだったので，いざとなったらグラフとかが描けなくなっていた．数ナビで答え合わせをしたけど，途中計算が分からなく自分で見直しても理解できなく大変なときもあった．

### 7.2 クラス間の学力差とアンケートへの反応

2 年の 2 クラスで使用したが，これらのクラス間には平均で 10 点近い学力差がある．その学力差は，アンケートへの反応にも現れている．電卓の使用のさせ方や授業中の説明などはほぼ同一の授業を行ったが，アンケートの項目によっては，その回答の仕方に大きな差がみられた．回答の仕方にクラス間で大きな差のみられた項目は，以下の項目である．なお，試験の成績では，B クラスの成績の方が A クラスの成績よりも約 10 点高い．

**表 2　クラス間の回答数に差が大きい項目**

| 数ナビを使う授業はおもしろい | A | B | 全体 | 数 |
|---|---|---|---|---|
| 1) はい | 24.4% | 66.7% | 49.3% | 36 |
| 2) どちらともいえない | 55.9% | 30.8% | 42.5% | 31 |
| 3) いいえ | 14.7% | 2.6% | 8.2% | 6 |
| **数ナビを使わないで普通の授業をしてほしい** | **A** | **B** | **全体** | **数** |
| 1) はい | 17.6% | 5.1% | 11.0% | 8 |
| 2) どちらともいえない | 35.3% | 28.2% | 31.5% | 23 |
| 3) いいえ | 47.1% | 66.7% | 57.5% | 42 |
| **数ナビを使って，理論的なことへの関心が高まった** | **A** | **B** | **全体** | **数** |
| 1) はい | 17.6% | 43.6% | 31.5% | 23 |
| 2) どちらともいえない | 70.6% | 41.0% | 54.8% | 40 |
| 3) いいえ | 11.8% | 15.4% | 13.7% | 10 |
| **数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる** | **A** | **B** | **全体** | **数** |
| 1) はい | 55.9% | 69.2% | 63.0% | 46 |
| 2) どちらともいえない | 44.1% | 28.2% | 35.6% | 26 |
| 3) いいえ | 0.0% | 2.6% | 1.4% | 1 |

成績の良い B クラスの方が,「数ナビを使う授業はおもしろい」(66.7%) と思い，普通の授業よりも数ナビを使った授業を求めている.「数ナビを利用して数学の理解がさらに深められた」者は 69.2%,「理論的なことへの関心が高まった」者は 43.6%である．

このことは，学生の学力レベルに応じて，その使わせ方には配慮が必要であることを示している．学力レベルの高いクラスでこの電卓を長期にわたり使用すれば，相当の効果が期待できるであろう．一方，学力レベルが低い A クラスでは，否定的な意見が B クラスよりは多いもの

の，それはこの電卓の使用自体を否定するほどのものではない．A クラスにおいても，この電卓に関しては肯定的な意見が多数である．表 3 以外の項目では両クラスに大きな差はみられないので，全般的にみると，学力レベルの低いクラスにおいてもこの電卓の効果が現れていることは歴然としていよう．学力レベルによる電卓の使わせ方を工夫すれば，その効果はさらに高まることが期待される．学力が高いクラスでは数学的内容の深化を図る方向での利用，そして，低いクラスでは基礎を定着させる方向での利用が望ましいと思われる．

## 8　試験の成績からみた他クラスとの比較

2 年の他のクラスでは，電卓を使わない通常通りの授業が行われた．数式処理可能な電卓を学生に利用させることに対しては，学生の計算力が低下するのではないかという懸念の声が多く出される．前節のアンケートでは，学生自身の中からも，そのような声があがっている．そこで，数式処理電卓の使用の有無により計算力に変化が生じるかどうかを，定期試験の成績を通して確認することとした．従来型の授業を行っている他クラス担当の教官と協議して，定期試験の問題の一部 (2 枚のうち 1 枚) を共通問題として実施した．

表 3 は，年 4 回行われた定期試験のうち，共通問題の得点を 100 点満点に換算した成績である．共通問題の配点は，前期の中間試験では 64 点，期末試験では 50 点，後期の中間試験では 50 点，そして期末試験では 48 点である．クラス間の格差を見るため，1 年時の成績も示した．「1 年数学」は，2 科目ある 1 年の数学の平均である．ただし，それは学年を通した評価としてのものであり，単なる試験点の平均ではない．

著者が担当しているのは A と B のクラスである．試験のときは，数式処理電卓の持ち込みは認めていない．問題の内容は，微積分で通常出題されるような問題である．授業中に学生に課す問題は特に協議しているわけではないので，教え方の違いによる差が出ないよう，共通問題はできるだけ教科書にある問題やその類題で構成されている．

**表 3　共通問題のクラス間の成績比較**

| クラス | A | B | C | D | 備考 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 年数学 | 64.9(15.0) | 70.7(9.2) | 72.6( 7.3) | 79.9(0.0) | |
| 前期中間試験 | 58.8(17.3) | 68.6(7.5) | 69.5( 6.6) | 76.1(0.0) | 微分の計算 |
| 前期期末試験 | 59.6(17.6) | 69.6(7.6) | 61.8(15.4) | 77.2(0.0) | 微分の応用 |
| 後期中間試験 | 50.2(18.0) | 64.2(4.0) | 58.0(10.2) | 68.2(0.0) | 積分の計算 |
| 後期期末試験 | 61.7(14.8) | 69.8(6.7) | 67.5( 9.0) | 76.5(0.0) | 積分の応用 |

括弧内の数値は，D クラスの成績との差である．

クラス間の差をみるため，最も成績のよい D クラスとの差を括弧内に示した．

前期の中間試験は，数式処理電卓を使用し始めてまだ間もない時期である．年間を通すと，C クラスの変動が少し大きいが，A クラスや B クラスの成績と D クラスとの差は，特に拡大する傾向はみられない．むしろ，少し差が縮まったのではないかと思われる．特に，表 2 にあるように，電卓利用により数学に対する理解や関心が高まったと思われる B クラスの成績と D クラ

スの成績との差は注目に値する．このデータだけから結論を出すのはまだ早計であるが，少くとも，数式処理電卓の使用により学力低下を示す傾向は，このデータにはみられない．

# 9　実践上のいろいろな問題点

数式処理電卓を個々の学生に貸与した授業を約 1 年間実践し，学生の反応や試験成績の結果などを前節で述べた．表 1 の結果を見ても，その教育効果には歴然としたものがあり，このような電卓の活用は早急に押し進められるべきであろう．しかし，その活用や普及を図る上においては，解決しなければならない幾つかの問題がある．

## 9.1　数式処理電卓の価格と認知度

多くの高専では，入学時に関数電卓を学生に購入させている．数式処理電卓の価格が関数電卓と同程度であれば，関数電卓の代わりにそれを購入させることは容易であろう．しかし，数式処理電卓は，高機能であるがゆえに通常の関数電卓の数倍以上の価格である．学生に購入させるには，それを購入させた場合の教育効果について教師側がある程度の確信を持つことが必要であり，それを活用できる内部の体制が整っていることも必要となる．

日本では，このような電卓を活用した数学教育には，なぜか冷淡な態度が取られてきた．数式処理可能な電卓が存在することすらあまり知られておらず，それを学生に購入させることに対しても,「計算力が低下するのではないか？」という危惧の声が根強い．

数式処理電卓は，単に購入させて放置するのではなく，その正しい使い方を学生に指導することが必要である．授業でも，それを活用して教育効果を高めるような工夫が求められる．したがって，学生に購入させる前に，この電卓の機能や教育効果，あるいはそれを活用した授業の方法などについて，教官側にある程度の共通理解が必要となろう．しかし,「グラフ電卓」の機能やその教育効果に対する認知度が低い現状では，そのような理解を形成するのは容易なことではない．

## 9.2　教室の中だけでの利用の限界

学生に個人購入させることが難しい場合は，学校側で学生の人数分の電卓を用意して利用させることになる．全学生分を購入するのは難しいと思われるので，現実には数クラス分の購入になると思われる．

数式処理電卓はかなりの多機能であり，それを学生が使いこなすには相当の習熟期間が必要である．授業のたびに教室で電卓の配布と回収を繰り返す方式では，この電卓の操作についての習熟を図るのは容易なことではない．電卓の使用を前提としたプリントを作成しても，全員が時間内に終えることができるわけではない．やり残したプリントを家に持ち帰っても，電卓が回収されてしまった後ではやりようがない．そのプリントは，電卓がなければ家で復習することすらできない．特に，この電卓により数学的な試行錯誤などを通して「思考力の強化」を図るには，学生に十分な時間が必要である．教室の中だけの利用でそのようなことを求めるのは，実際にはなかなか難しいものがある．

その意味でも，数式処理電卓は学生一人一人に購入させて (または貸与して)，学校でも自宅でも自由に使える環境にあることが望ましい．

## 9.3 教授学年

2 年の微積分の授業で試行したが，微積分では，まず基本的な関数の性質を熟知していることが前提となる．しかし，必ずしもそれを前提にできないのが現実である．微分積分を理解させようとしても，学生は，それ以前の関数そのものの理解でつまずいている場合がある．

また，数式処理電卓でいろいろな探究をさせるには，教師側は適切なテーマを学生に与えることが必要となる．微積分のテーマは，グラフを描いたり極値を求める等，総合的な考察を必要とするものが多い．微分積分でこの電卓を活用させるには電卓の機能にある程度習熟していることが必要である．しかし，現実には，電卓の操作への習熟を図りながら 2 年の微積分の授業をするのは，実際にはなかなか大変なものがある．

以上の 2 点の困難を避けるには，その使い方を 1 年次から少しずつ習得させながら使用させることが望ましいと思われる．1 年であれば，単純な因数分解だけでも，かなりのことを学生に考えさせることができる．たとえば，数式処理機能を利用して $x^n - 1$ の因数分解をさせ，自然数 $n$ と因数分解された式の形との関係について考察させると，相当高度の内容にまで学生は気づいてくる [6]．また，グラフ機能を利用させれば，従来は教師が説明していたいろいろな関数の性質を，学生に発見させることができる．平成 12 年度の新入生全員に数式処理電卓を購入させた福井高専の実践では，この電卓を利用させて 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの特徴について学生に考察させたところ，教師が教えるべき内容のほとんどを指摘されてしまったことが報告されている [7].

## 9.4 使用教科書

日本には，数式処理電卓の利用を前提とした教科書は存在しない．この電卓を利用した授業を行うには，既存の教科書に沿いながら利用するか，あるいは教科書の内容と関係なく独自の教材にもとづいて行うことになる．しかも，電卓を使用しない他クラスとある程度進度をそろえることも必要となる．

授業で電卓を利用するには,「操作説明の時間」＋「学生が操作する時間」＋「教師がまとめる時間」が必要である．これらの時間を既存の内容をこなしながら捻出するのはなかなか容易ではない．既存の教授内容について思い切った取捨選択が必要であるが，同じ学年の特定のクラスだけでそれを行うことには問題があろう．教師は，電卓を利用して学生に伝えたい数学知識と，ある程度の進度を保たねばならない焦燥感との板ばさみに会うことになる．場合によっては，両方が中途半端なものになりかねない．

その意味でも，数式処理電卓の使用を前提とした新しい数学教科書の作成が早急に望まれる．

## 9.5 学生の能力差

学力差の大きい 2 クラスで試行したが，同じ内容のプリント教材で電卓を使わせても，操作の仕方やそれによる内容理解の程度に差が現れる．理解力のある学生は，電卓の使用によりさ

らに上のレベルの理解を得ることが容易に可能になるが，そうでない者にとっては電卓の操作自体が難儀なことであり，そこで理解させようとしている教師側の意図がなかなか伝わらない傾向がある．つまり，学生の能力差は，電卓の操作への理解力と，学習中の数学への理解力との両面で影響を及ぼしてくる．

したがって，クラス間の学力差が大きい場合には，電卓の使わせ方にも配慮が必要である．学力レベルが低いクラスでは，探究活動よりもむしろ内容理解を確実にさせる方向の使わせ方が望ましいと思われる．

### 9.6　単純計算時間の省略

数式処理電卓を利用すれば，単純計算はキー操作だけで解が表示される．しかし，学生は自力である程度の計算ができることは是非とも必要であり，そのための練習時間をそう簡単に削るわけにはいかない．つまり，数式処理可能な電卓を所持させたとしても，これまで単純計算の練習のために費やしていた時間を省略することは簡単にはできない．そのような計算練習を行った上で，なおかつ思考力重視の授業時間を確保することは，限られた時間の中ではそう簡単ではない．結局は，思い切った内容の取捨選択しかないのではないかと思われる．

### 9.7　教師側の負担と意識革命

この電卓を利用した授業では，どのようなときに，電卓をどのように使用させるべきかを事前に検討することが必要である．国内には参考になるべき資料はほとんど何もない．米国のグラフ電卓の利用を前提とした教科書を取り寄せてみても，日本の教科書を使わせながらの授業では，そのまま素直に参考になるわけではない．結局は，授業のたびに，どのような使い方をさせるべきかについて教師側が事前の思考実験を行い，それをもとに教材プリントを自作することになる．日常の公務の合間に，これまで行ったこともない授業の準備をするのは，実際にはなかなか大変なものがある．特に，電卓の操作の仕方は，教室で口頭で説明してもなかなか全員には伝わらない．したがって，プリント教材には，電卓の操作説明をあらかじめ書き込むことが望ましい．できれば，数式の扱い (TEX が望ましい) や電卓の液晶画面 (tiff, eps 画像) のプリントへの貼りつけができることが理想であるが，そのような教材をすべての数学教師が自作できるとは限らない．

また，多忙な日常業務の中で，自主的にこのような新しい授業を一から作り上げる作業を行うには，教師側の意識にそれなりの必然性が必要である．グラフ電卓を活用した授業では，教師を駆りたてる何かがある．それは，7 節に見られるような学生の反応であり，授業の中で本来伝えたい数学の知識を，よりストレートに伝えることができることに対する教師としての喜びである．そのための教材準備は楽ではないが，それは決して苦痛ではない．むしろ，楽しみながら行うことができる．グラフ電卓の活用は，このような教師自身の意識革命をも同時に引き起こすものである．授業を変えるには教師自身が変わることが必要であり，米国の実践でも，まず教師自身に変化が起きることが報告されている．

## 10　高専における数式処理電卓の意義

高専では，高校から大学までの数学が教授される．昨今の高校の教授内容の変遷にもかかわらず，高専における教授内容は，大筋では高専創設時の内容がそのまま教授されている．それは，在学中の工学系専門科目で数学が駆使されるため，そこで必要となる数学の内容をそう簡単には変更できないからである．専門科目では，単なる数学の知識ばかりではなく，数学上の高度の計算が必要となり，さまざまな場面で数学を使いこなすことが求められる．その内容は大学レベルであり，学年が上がるほど数学を使いこなす場面は増すことになる．つまり，小・中・高・短大・大学の中で，数式処理電卓の必要度や使用頻度が最も高いのは高専であるといえるのではないだろうか．しかも，5 年という長期間の使用が可能であり，進学すればその期間はさらに増えることになる．したがって，高専では学生に個人購入させる必然性がある．

このように，高専では，数式処理電卓を数学と工学の両面から活用した教育が可能であり，この電卓の有効性を最も高く実現できる環境にあると思われる [8]．しかも，高専での実践結果は，高校から大学工学部まで幅広く活用できる．入学時から，数学と工学の両面でこの電卓を 5 年間有効活用させた場合，卒業時には学生の能力はどのようなレベルにまで高まるのだろうか．すべてはこれからの実践に依るが，相当すごいレベルの学生が育つだろうことは想像に難くない．

以上のことから，数式処理電卓は，まず高専においてこそ普及させるべきである．そのためには，数学の教官のみならず，専門学科の教官にも，この電卓の有効性を啓蒙することが必要になってくると思われる．

## 11　おわりに

高専 2 年の微積分の授業で，4 月から既存の教科書に添った内容で数式処理電卓を利用してきた．その実践から言えることは，世界で起きているグラフ電卓を活用した数学教育の革命は，日本でも十分に起こりうるということである．

グラフ電卓や数式処理電卓を活用した数学教育は，現状では関心を持った一部の教官が個人的に実践しているに過ぎない．そのような状況にある理由の多くは，この電卓の機能や教育上の意義，あるいは世界で起きている数学教育の大きな変化ついて，ほとんど知られていないことにあると思われる．他にも，ある程度の台数を用意しなければならないという予算上の問題や，新規の教材準備など多くの問題がある．しかし，いろいろな困難はありながらも，数式処理電卓を有効に活用した数学教育は，従来の方法では得られないほどの大きな効果をもたらすものである．困難を避けるのではなく，その困難を乗り越える方向での検討が必要であろう．

最後に，この実践を行うにあたっては，共通問題での試験実施等において本校教官高橋知邦助教授の協力を得た．また，この論文の粗稿には，数ナビ活用研究会の皆様から貴重なご意見をいただいた．ここに，深甚なる感謝の意を表します．

# 参考文献


[1] 梅野善雄：グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 7 巻, 第 1 号, pp.1–20, 2000

[2] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦偏：テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997

[3] 各社の数式処理電卓の詳細は，以下の URL を参照されたい．
http://www.casio.co.jp/edu/index.html
http://www.naoco.com/
http://www.hp.com/calculators/

[4] TI-92 Wins System Challenge at Math Software Conference,
http://www.ti.com/calc/docs/swh/ti92wins.htm

[5] 大阪の清風高校の数式処理電卓を利用した数学教育の内容は，清風高校数学教育研究所のホームページで公開されている．http://www.seifu.ac.jp/math/

[6] 清風高校の生徒が，$x^n - 1$ を数式処理電卓 TI–92 で因数分解させて，どのようなことに気づいたかが紹介されている．http://www.seifu.ac.jp/math/Resources/factor1.pdf

[7] 井之上和代：TI–89 を利用した 2 次関数の学習から見る高専の数学教育, 福井工業高等専門学校研究紀要 自然科学・工学, 第 34 巻, pp.95–105, 2000

[8] 梅野善雄：数式処理電卓は工学教育に何をもたらすか？, 工学教育, 第 48 巻, 第 4 号, 2000