From TRANSACTIONS OF MATHEMATICAL EDUCATION FOR KOSEN AND UNIVERSITY
(VOL.7 NO.1 May 2000)
Japan Society of Mathematical Education, Division of Kosen and Universty

グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界

梅野　善雄

On the Possibility of a New Mathematical Education Using Graphing Calculators

Yoshio UMENO

日本数学教育学会高専・大学部会論文誌別刷
(Vol.7 NO.1 May 2000)

日本数学教育学会高専·大学部会論文誌, 第7巻第1号, 2000.5

グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界

梅野 善雄*

On the Possibility of a New Mathematical Education Using Graphing Calculators

Yoshio Umeno*

Abstract: When we talk of graphing calculators, we are apt to think of the ones which enable us to compute various functions and plot graphs. Some of the latest models, TI-92 and TI-89 types for example, however, have advanced built-in software for the symbolic manipulation of algebra and calculus. As a matter of fact, the function performances of these calculators range over almost all the mathematics taught in the colleges of technology and the universities. Unfortunately, this fact is still unfamiliar to most math teachers in Japan.

If we can teach students how to make full use of these graphing calculators, it might bring about not only a considerable change in traditional math teaching, which has long laid special emphasis on the student's ability to compute acurately with a paper-and-pencil, but also to gain a footing with a new method of math teaching in which we lay more stress than ever on a mathematical way of thinking.

The aim of this paper will be to discuss firstly what we can do with these calculators, secondly the advantage in using them in math classes, thirdly the circumstances regarding the spread of graphing calculators in the foreign countries, and lastly several problems with introducing them.

Keywords: Graphing Calculators, Mathematics Education.

1 はじめに

近年のテクノロジーの発展にはすさまじいものがある．最新の数式処理ソフトは，単なる式の計算のみならず微分積分の数式計算や微分方程式の解析的な解でさえ求めることができる．3次元空間の曲面も簡単なコマンドで表示でき，それを回転させることもマウス操作だけで自在である．高専や大学で学生に教えている程度の数学は，すべて計算機に行わさせることができるといっても過言ではない．

この機能を教室で手軽に利用することができれば，学生の数学的概念の理解を深める上において格段の効果が期待される．そのためには，数式処理ソフトを組み込んだパソコンを教室に持ち込むか，あるいは電子計算機室の端末からそのようなソフトを利用することが考えられるが，本格的な数式処理ソフトを１クラスの人数分そろえるのは，いかに教育機関用の価格であっても相当の予算処置を伴なう．

*一関工業高等専門学校一般教科, 岩手県
Ichinoseki National College of Technology, Ichinoseki-shi, 021–8511, Japan

近年のグラフ電卓の中には，数式処理機能を持つものがある．テキサス・インスツルメント社の TI–89, TI–92Plus，ヒューレット・パッカード社の HP–49G，そしてカシオの CFX–9970G, Algebra FX 2.0 である [1]．これらの電卓は高度の数式処理を行うことができ，高価な数式処理ソフトと比較して極めて安価に入手できる．学生個々に購入させることも可能な価格帯にある．

この論考では数式処理機能を持つグラフ電卓として TI–92Plus を取り上げ，その機能の概要を既成の数式処理ソフトと比較すると共に，この電卓を数学教育の中で利用することは数学教育にどのような効果をもたらすかを考察したい．

2 数式処理可能なグラフ電卓

2.1 機能の概要

最初に，数式処理機能を持つグラフ電卓 TI–92Plus は，具体的にどのようなことが可能であるかを概観したい．

TI–92Plus は縦 12cm，横 21cm，厚さ 3cm の大きさであるが，その中にはパソコン用の数式処理ソフト Derive の機能が詰め込まれている．このソフトの開発者も参加して TI–92 は開発された．CPU にはモトローラの 68000(10MHz) を使用．メモリーは 500K バイト以上あり，ユーザーエリアは約 188K バイト．約 384K バイトのフラッシュROM を内蔵している．

図 1: グラフ電卓 TI–92Plus

この電卓の機能は多岐にわたるが，例えば微積分関連では以下の機能を持つ．

微分・積分： 関数や数列の極限値，微分係数の値，(偏) 導関数の計算, (高次) 導関数の計算，接線の方程式，極値，変曲点，テイラー展開，指定された範囲における関数の最大値と最小値，総和 (有限和と無限和)，不定積分，定積分，多重積分，特異積分，数値積分

関数とグラフ： 1 変数関数のグラフ表示（陽関数，陰関数，媒介変数，極座標），グラフと座標軸との交点の座標，二つのグラフの共通部分の陰影表示，2 変数関数のグラフ表示 (陰線処理，ワイヤーフレーム，等温線図，円柱座標），グラフの拡大・縮小・回転

微分方程式： 1 階常微分方程式の一般解，定数係数 2 階線形常微分方程式の一般解，連立 1 階微分方程式の解曲線表示，高階微分方程式を 1 階連立微分方程式に変換することによる解法，初期条件・境界条件を与えた解法，ベクトル（勾配) 場の表示，解曲線のグラフ表示

他にも，数と式，方程式，線形代数，集合演算，統計解析，表計算等に関して多くの機能を持つ．幾何機能 (カブリジオメトリ) を備えており，これは初等幾何教育に極めて有効と思われる．この電卓の液晶画面は，簡単な器具（LCD パネル) を OHP に載せるだけでスクリーンに投影することができる．

文字列操作にも優れている．If 文，For 文，While 文，Loop 文などによる構造化プログラミングが可能であり，変数は局所変数と大域変数とを区別できる．パソコンとのデータ通信ができるので，WWW 上で入手した様々なプログラムを TI–92Plus に転送することができる．特に，別売オプションのデータ収集器 CBL(Calculater–Based Laboratory) を利用すれば，いろいろなセンサーを通して温度・圧力・速度・距離等の実データを収集でき，それらのデータに統計処理を施して即座にグラフ化することができる (ただし収集できるデータ数には限りがある)．この機能は，現実世界と数学との関わり方を示す上において，数学のみならず工学系専門科目の導入段階で極めて有効な機能と思われる．

なお，TI–89 は TI–92Plus の機能から幾何機能 (カブリジオメトリ) を除いたものである．TI–92Plus より小型のため液晶画面がやや小さいが，以下で述べられる例は TI–89 でも可能である．この論文ではカブリジオメトリについて詳しく述べることはできないが，中学校の幾何教育で利用すれば画期的な教育効果が見込まれる [2]．

2.2 幾つかの画面例

TI–92Plus は具体的にどのような計算を行うことができ，その結果をどのように表示するかを見るため，以下に幾つかの例を上げる．

図 2 では，複素数を含む繁分数式の計算や因数分解が行われている．繁分数式は「見たまま」の表示がなされる．因数分解では，実数と複素数の範囲の分解を区別させることができる．図 3 は，$y = x^5 - 3x^3 + 1$ のグラフを表示して x 軸との交点の座標を求めたものである．交点の存在する x の範囲を指定するだけでカーソルが移動し，その x 座標の値を表示する．この画面のまま，最大値・最小値・接線・変曲点・x 軸とで囲まれた部分の面積・曲線の長さなどを簡単な操作で求めることができる．半角のテキスト文字を任意の位置に埋め込むことができ，表示されているグラフの座標データを瞬時に表データに変換することもできる．

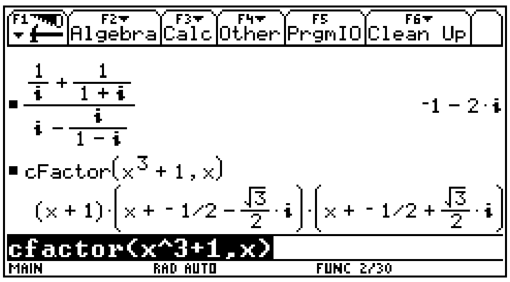


図 2: 繁分数式と因数分解の計算

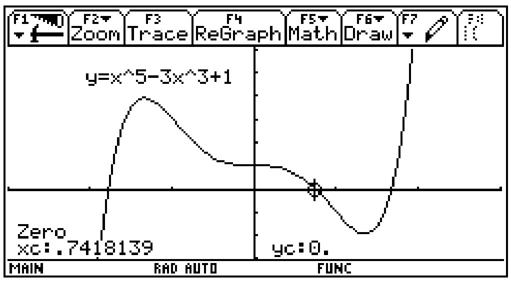


図 3: グラフと x 軸との交点

図 4 では微積分の計算がなされている．極限値が正の無限大に発散するときは ∞ が返される．微分する階数を指定すれば高階の導関数が求められ，微分する変数を指定すれば偏導関数を求めることができる．結果を分数や無理数で表すことができるときはそのような表示がなされ，電卓の能力で計算不能のときは入力式がそのまま返される．また，数値的にしか求めることができないときは，自動的に数値解が計算される．例えば，$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ を計算させると，8 秒後に $\sqrt{\pi}/2$ ではなく .886227 が返される．図 5 では，テイラー展開や 2 階定数係数線形微分方

程式の一般解が求められている．テイラー展開では指定された点において指定された次数までの展開式が降べきの順に表示される．その関数を即座にグラフ表示することも容易である．高階の非線形微分方程式を一階の連立微分方程式に直して，その解曲線を表示させることもできる．なお，@1 や@2 は任意定数を表す．

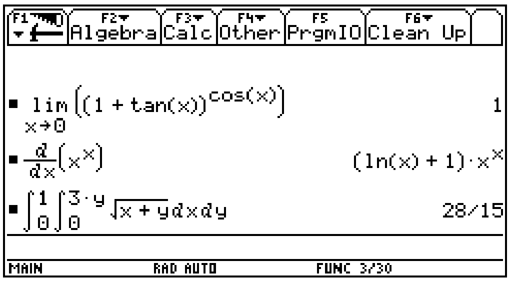


図 4: 微積の計算

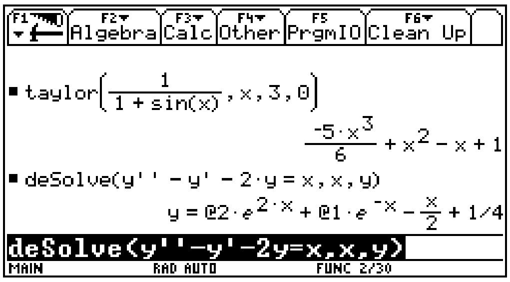


図 5: テイラー展開・微分方程式

図 6 は，複素関数の絶対値関数 $z = |(x+iy)^3|$ を表示したものである．この曲面を拡大・縮小・回転することも容易である．軸の分割数を指定することもできるが，分割数を多くするとグラフが表示されるまでにかなりの時間がかかるのはやむをえない．図 6 の曲面は $-1.5 \leqq x \leqq 1.5$, $-1.5 \leqq y \leqq 1.5$ の範囲で $-1 \leqq z \leqq 2$ の部分を表示したものである．x, y の分割数を 20(標準では 14) にして計算させると表示されるまでに 55 秒を要した．図 7 は，画面を左右に 2 分割して表示したものである．左側は，ロトカ・ヴォルテラの微分方程式 $dx/dt = -y+0.1xy, dy/dt = 3y-xy$ のベクトル場と $x(0) = 2, y(0) = 3$ のときの解曲線である．この画面は約 28 秒で表示された．右側では個々の解曲線 $x = x(t), y = y(t)$ が示されている．デフォルトではルンゲ・クッタ法で近似解が求められるが，オイラー法で求めさせることもできる．画面は上下に分割することもできる．

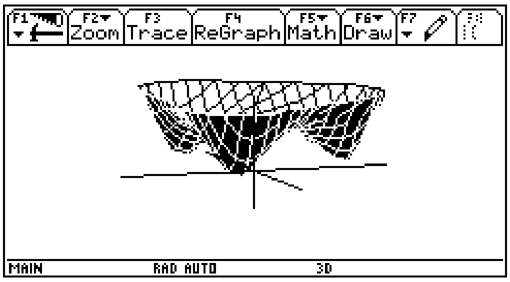


図 6: 曲面の表示

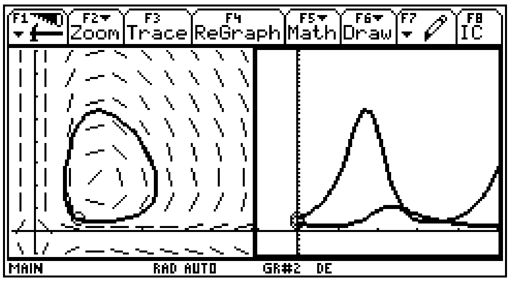


図 7: ベクトル場と解曲線

3　数式処理ソフトとの比較

数式処理ソフトとしては，Mathematica, Maple 等，長年の使用実績をもつものがある．これらのソフトの機能は豊富であり，専門研究の一つのツールとしても利用されている．このような本格的数式処理ソフトとグラフ電卓の数式処理能力とを比較するのはフェアではないが，機能的側面から TI–92Plus について若干の比較を試みてみたい．

3.1 OHP への投影

教室における OHP への投影方法について考える．数式処理ソフトの表示画面を OHP に投影するには，数式処理ソフトが組み込まれたパソコンとその CRT 画面をスクリーンに投影する装置 (液晶プロジェクター，あるいは OHP 投影用の機器) が必要であり，それを教室まで運ばなければならない．機器の大きさもさることながら，その投影装置はかなりの高価格であり，高性能パソコン 1 台分以上の投資が必要である．電子計算機室の端末で数式処理ソフトを利用させる場合はそのような装置は不用であるが，学生を端末室まで移動させることが必要となる．

グラフ電卓の液晶画面をスクリーンに投影する場合も，投影用の機器 (LCD パネル) が必要である．この電卓のオプションとして用意されているそれは，液晶プロジェクターなどと比べると極めて軽量，価格も安価である．

LCD パネルとの接続コードは標準でも長さが 2m 以上はあるので，教師はグラフ電卓を手に持って OHP の近くを歩き回りながら操作・説明することができる．このことは，実際の授業現場では重要なことである．

3.2 操作性

教室で数式処理ソフトを利用するには，まず幾つかのコマンドをマウスやキーボードで一つ一つ打ち込まなければならない．端末室で学生に利用させる場合では，主要なコマンドについてあらかじめ説明しておくことが必要となる．

それに対してグラフ電卓では，数式や関数式の入力時を除けば，ほとんどのコマンドは幾つかのキーを押すだけで実現できる．すべてのコマンドが辞書的に整理されて登録済みである．小型・軽量であるので片手に持って立ったまま操作できる．

特に，グラフ電卓を学生一人一人に利用させる場合，ハンドヘルドなため机の上で操作できる．しかも，キー操作だけでほとんどの機能が実現可能である．学生は入力コマンドを覚える必要がなく，スペルミスで悩むこともない．電卓を与えて幾つかのキー操作を説明するだけで，学生は即座にその電卓のメインの機能を利用することができる．

また，グラフ電卓を学生一人一人に利用させる場合，学生は教室を移動する必要はない．ハンドヘルドであるため，学生はどこでもそれを利用することができる．通学途上の列車内や家に帰ってからでも数式処理機能を利用できることになる．

3.3 機能

処理速度，機能の豊富さ，そしてカラー表示可能という面からみると，パソコン搭載の数式処理ソフトが優るのはいうまでもない．しかし，TI–89 や TI–92Plus は，数式処理ソフトには無い幾つかの機能を持っている．

たとえば，これらの電卓はグラフ画面を即座に表データに変換することができる．この機能はグラフと数値データとの対応関係を明確にし，関数に対する理解を深めさせるときに有効と思われる．また，センサーから実データを収集してグラフ化したり，そのデータに統計処理を施して回帰曲線を表示させる等を，新なプログラムを書くことなく幾つかのキーを押すだけで

実現できる．この機能は現実の現象と数学との関わり方を理解させ，学生自身に自分で現象を解析させることを可能にするものである．

さらに例を上げると，1 変数関数のグラフを表示させ，指定した範囲における最大値・最小値，定積分の値，そして曲線の弧の長さなども，幾つかのキーを押すだけで求められる．x 軸との交点や変曲点の座標，指定されたグラフ上の点における微分係数の値や接線のグラフと方程式も表示する．これらの機能は，学生がグラフに対する総合的な理解を深める際に極めて有効と思われる．

他にも教育的な配慮に基づく多くの特徴的な機能を持っている．

また，TI–92 は，数式処理ソフトの国際コンペで Mathematica と並び首位タイになったことがある [3]．それは，定めれた時間内に例えば以下のような問題を高精度で解くものである．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\pi}+n^2+\sqrt{n}+1)^{-1/3}$ の値を求める．

(2) $(x+1)^{2000}(x^2+x+1)^{1000}(x^4+x^3+x^2+x+1)^{500}$ で x^{3000} の係数を求める．

(3) 1000 次のラゲール多項式の最大の零点を求める．
なお，ラゲール多項式は，次の漸化式で定義される．

$$L_n(x)=\frac{2n-1-x}{n}L_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}L_{n-2}(x),\quad L_0(x)=1,\ L_1(x)=1-x$$

(4) $\displaystyle Li_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^n}$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 x^2 Li_3\left(\frac{1}{x+1}\right)$ を求める．

(5) $\displaystyle\int_0^1 \exp(x+y+x^2+xy+y^2+x^2y^2)f(y)dy=\lambda f(x)$ を満たす最大の固有値を求める．

TI–92 がこのような問題に耐えうることは，その数式処理機能は教育用だけに留まるものではないことを示している．

3.4　教師にとっての有用性

数式処理可能なグラフ電卓は，教室での利用ばかりではなく，教師の教材作りにとって極めて有用なツールとなりうる．いろいろな計算結果や関数のグラフを容易な操作で表示させることができる．数と式，方程式の解法，微分積分，微分方程式，ベクトルと行列，統計等の計算問題やその解答を作るとき，教師がその繁雑な計算をいちいち自分で行う手間が省ける．関数や方程式の係数等を変えながら，その結果を即座に見ながら問題作りを行うことができる．数式処理ソフトにおいてもそれは可能であるが，パソコンを起動させることなく，机上での手軽なキー操作だけで各種の計算やグラフを表示させることができる．教師の教材作りにおいて，極めて有用なツールといえる．

この電卓の計算能力に信頼感を持てた場合は，教材作りばかりではなく，論文等に出てくる単純ではあるが煩雑な計算の実行やフォローに利用することができる．前節のような問題に耐えうることは，単純計算ばかりではなく，かなり高度の数学にも活用できることを示している．有効に活用すれば，論文によっては，その作成や読解に要していた時間が相当効率化されることが期待される．

4　従来の数学教育

4.1　計算力中心の授業

高専における従来の数学教育では，微分積分や微分方程式等，いわゆる解析系の計算ができるようにさせることに力点が置かれている．どちらかというと「思考力」よりも「計算力」を重視した教育が行われてきた．それは，基本的な計算ができなければ，その先の応用や思考を問う話題には進めないからである．限られた授業時間の中では，とりあえず工学で必要とされる計算ができるようにさせることで精一杯であるというのが現状であろう．

しかし，学生は，新な計算手法を学習するたびに既習の内容を忘れていく．彼等の忘却の仕方は徹底していて，その週に学んだことさえ忘れる者もいる．それを忘れさせないために，教師は計算問題を中心とするさまざまな練習問題を学生に課す．学生は次第に計算自体が目的となり，その計算の目的や意味を忘れていく．そして，計算はできてもその意味が分からないという状態が生じてくる．あるいは，与えられた式の計算はできても，問題内容を解釈して解くべき式を自分で見い出すことができない場合もある．このような計算中心の授業では，学生は与えられた問題を解く (計算する) ことだけが数学の勉強であるかのような錯覚を起こすことになる．また，計算問題中心の授業では，いろいろな計算手法ばかりが頭に残り，数学上の概念や意味についての理解が不十分になりかねない．

数学教育では，本来どのような能力を育成することが求められているのだろうか．単にいろいろな式や微分積分の計算ができたり，微分方程式が解ければよいというものではないであろう．ある目的のために，必要があって計算したりグラフをかくのである．本来は，基本的な計算の仕方を学んだ後は，種々の条件を勘案して問題を数学的に定式化できる能力の開発にこそ重点がおかれるべきである．そして，その定式化された式の計算結果やグラフを見ながら，さらに種々の検討を加えることに重点がおかれるべきであろう．

従来の数学教育は，そのための「基本的計算」ができるようにさせるだけで精一杯であったといえよう.「応用」にかける時間は決定的に少ない．触れる時間がないからである．しかも，工学の応用に触れる時間が取れたとしても，そこでは数学の授業におけるような簡単な計算ではない場合が多い．計算自体が複雑のみならず，その結果も複雑な式となり，学生にはそこで現れる関数のグラフさえ容易にはかけない場合が多い．工学における実際の解析では微積分を学習中の学生が自力で解けそうな問題がそう多くはないことも，応用にあまり触れることができない原因の一つと思われる．それゆえ,「数学教育 $\fallingdotseq$ 計算練習」を承知しつつも,「数学教育 $=$ 計算練習」と学生に誤解されてもやむをえないような授業であったといえば言い過ぎであろうか.

4.2　教師中心の授業

従来の教授スタイルは，教壇で教師が説明し，それを学生がノートに取って覚える，というスタイルである．授業が分からないとき学生は質問すればよいわけであるが，実際に授業中に質問する学生は少ない．また，分からないからといって後で復習するわけでもない．学生からの反応が少ないと，授業は教師中心で進行せざるをえなくなる．また，最近の学生は説明を聞

きながらノートを取ることができない．教師の説明はそっちのけで，ひたすら板書に熱中している場合がある．その場合は，教師が幾ら「分かりやすさ」を心掛けた説明をしても意味がない．学生は，後で教科書やノートを見ながら独学で理解を試みることになるが，それでは理解できないのも当然である．分からない箇所が積もり重なってくると，結局は机につっぷして眠るしかないことになる．

5　グラフ電卓が可能にする数学教育

グラフ電卓は，単なる OHP への表示ツールとして利用されるべきものではない．表示ツールであるならば，数式処理ソフトを組み込んだノートパソコンの方がより高速に多くの情報を表示できるであろう．この電卓は，学生一人一人に所持させてこそ最高の効果が期待される．以下で見るように，学生がこの電卓を使いこなす状況になったとき，そこには数学教育のかってない新世界が広がっているのではないかと思われる．

5.1　グラフ電卓を利用した授業例

この電卓を個々の学生が利用できる状態になったとき，具体的にどのような授業が可能になるかを概観したい．

なお，本校では，数式処理機能を持つグラフ電卓 (TI–89) を 1 クラスの人数分用意できたばかりであり，この電卓を利用した教育実践は平成 12 年度に予定されている．以下は，効果的な利用法としての想定例として述べる．

例 1　方程式の解法

連立方程式 $2x+y=3, x^2+y^2=5$ を考える．通常は，第 1 式を $y=3-2x$ と変形して第 2 式に代入し，それを解いて x を求める．この方法は解法のアルゴリズムと計算方法とを混在して教えることになるが，学生は計算方法にばかり目を奪われアルゴリズムに対する理解は疎かになりがちである．第 1 式を変形して係数が複雑になると，途中計算のミスが生じて正答率は低下する．このようなミスを避けるため，問題演習などでは解が簡単な整数や分数になるものが多い．しかし，工学などで現れる現実の応用場面では解が簡単な形になるとは限らない．数学の授業で解が簡単な問題ばかりやっていると，実際の問題に応用できない場合がある．

一方，数式処理機能を持つ電卓を利用すると，図 8 の 1 行目のように解くべき方程式と変数の組を指定して solve($2x+y=3$ and $x^2+y^2=5, \{x,y\}$) と打ち込むだけで即座に 2 組の解が表示される．このような「解け (solve)」という指示だけで解が表示されるのでは，従来のような方程式を解く問題は意味がなくなるのだろうか．

方程式の解法をまだ学習していないとき，solve コマンドを使用して方程式を解かせるべきでないことは言うまでもないことである．この電卓は，方程式の解法のアルゴリズムを理解させる場合に有効である．図 8 の 2 行目以降がそれである．この過程では，第 1 式を y について解き，それを第 2 式に代入した式を x について解き，その解を y について解いた式に代入して y の値を求めている．図 9 では，第 2 式に代入した式を展開し，両辺から 5 を引いて因数分解し

ている過程が示されている.「何をどうするか」を電卓に明確に指示しながら解いており，学生は指示した計算を自分で行う必要はない．アルゴリズムに焦点を絞った解法といえる．その理解を得た後に筆算による計算練習を行えば，従来のような筆算だけの計算より解法のアルゴリズムに対する理解は増すのではないかと思われる．また，筆算で解いた結果と一致しないときは，どの過程で誤ったのかも容易に発見できる．

そして，解法の仕方について十分な理解が得られた後では，solve コマンドを利用して直接問題を解くことには何の問題もないであろう．方程式の学習では，その解法の計算練習を多数行わさせることよりも，むしろ問題内容を解釈して適切な方程式を立てることの方がより重要ではないだろうか．従来は，どちらかというと，この前半の計算練習に比重が置かれていたように思われる．解法の仕方を理解させた後は，この電卓の機能を積極的に活用して，様々な応用問題を解かせることに多くの時間を費す方が数学本来の姿ではないかと思われる．

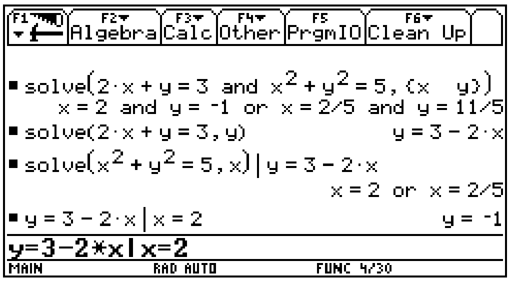


図 8: 連立方程式の解法

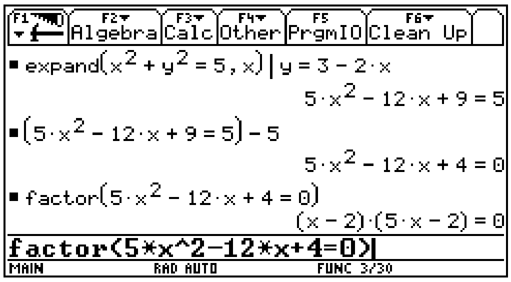


図 9: 2 次方程式の解法

例 2　関数のグラフ

2 次関数の授業では，初めに $y = ax^2$ のグラフを x, y の値を表を作らせて確認させ，次に $y = a(x-p)^2, y = ax^2 + q$ についても同様の形でグラフを描かせる．そして，数値的に平行移動であることを理解させ，その後に一般的な説明を行って「$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを平行移動したものである」ことを定理の形で提示することになる．

学生に表を作成させてグラフを描かせることは，新しい関数の導入段階では必要である．しかし，その作業を多数の関数や少し複雑な関数について課すのはあまり教育的とは思われない．この作業は，数例の簡単な関数についてだけ行われることが多い．その後，学生は定理として提示された内容を覚えようとするが，それは時間が経つにつれ忘れ去られることになる．

グラフ電卓を利用すれば，この平行移動に関する性質を学生に発見的に見い出させることができる．$y = ax^2, y = a(x-p)^2, y = ax^2 + q$ のグラフを a, p, q の値を適当に変えながら数多く電卓の画面に表示させれば，式の形によりグラフがどう変わるかを学生は容易に見い出すであろう．その発見は，グラフの座標データを表データに変換して数値的に確認することもできる．このような発見をさせた上で一般的な説明を行えば，視覚的な理解と自ら発見した事実であることとが相まって，理解の定着度は格段に向上することが期待される．

同様のことは，他の関数の平行移動，グラフの座標軸や原点に関する対称変換，あるいは $y = kf(ax)$ や $y = |f(x)|$ などのグラフでもいえる．3 次関数の係数をいろいろ変えながらグラフを表示させ，この関数のグラフの特徴を学生に分類させることも可能であろう．いろいろな

整関数 $f(x)$ に対して $y=f(x)$ と $y=1/f(x)$ のグラフとを同時に表示させれば，分母が 0 になる点での関数の挙動についての理解も深まる．

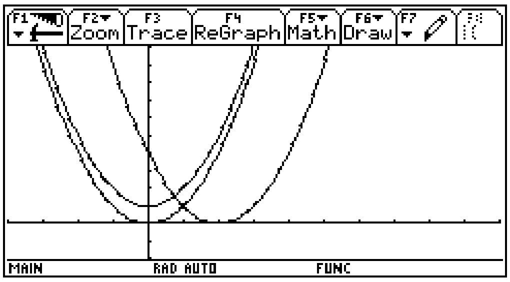
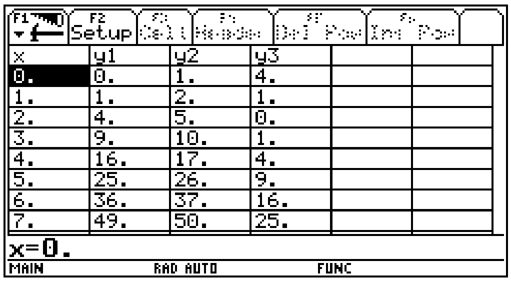


図 10: 2 次関数のグラフ



x	y1	y2	y3
0.	0.	1.	4.
1.	1.	2.	1.
2.	4.	5.	0.
3.	9.	10.	1.
4.	16.	17.	4.
5.	25.	26.	9.
6.	36.	37.	16.
7.	49.	50.	25.

x=0.

図 11: 座標のデータ

例 3　媒介変数で表された関数

媒介変数で表された関数 $x=f(t), y=g(t)$ の授業では，最初に t, x, y の表を作成させ，それを元にこの関数のグラフを描かせるのが普通である．それにより，このような関係が与えられると，x, y の間に関数関係があることを学生に理解させようとする．あるいは，媒介変数を消去した x, y の関係を導くことにより理解させようとする．しかし，すべての関数についてこのような表を作成するわけにはいかず，すべての関数について x, y の直接的な関係が導けるわけでもない．学生は，最初の簡単な例をもとに，このような場合も x, y の関数であることを「覚える」ことになる．

グラフ電卓は，媒介変数表示された関数のグラフも表示する．シミュレーション機能を利用して曲線上をクロス状のカーソルが移動するようにもできる．この機能を利用すれば，曲線上の点の動きを実際に見ることができる．媒介変数の箇所では，x, y に関して同じ関数でも，媒介変数による表示の仕方を変えると点の動き方が変わることを理解させることが最も重要と思われる．従来の方法では教師が黒板に図を書きながら言葉で説明し，それを学生が自分の頭の中にイメージ構成することを期待するしかなかった．しかし，グラフ電卓を利用すれば，このことを成績下位の学生にも体験的・視覚的に理解させることができる．

例えば，図 12 は，ある高さからボールを真上に投げ上げたときの軌跡 (右側) と時間を横軸に取ったときの軌跡 (左側) とを同時に表示させたものである．軌跡をドット表示させてある．キーを押すと，これらのグラフ上を 2 つのクロス状のカーソルが同時に動くようにでき，媒介変数 t の刻み幅を変えるとボールが向きを変える点でカーソルが一瞬停止するようにできる．そこでは速度が 0 であることを学生は簡単に「見る」ことができる．このような動きのある画面を学生に見せるには，従来は教師が自分でプログラムを書いて行っていた．グラフ電卓では，この程度のことでプログラムを組む必要はなく，関数やグ

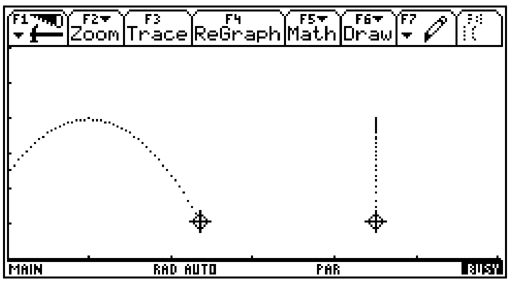


図 12: 数直線上を運動する点の軌跡

ラフ表示の仕方を指定するだけですむ．同様の視覚に訴える手法は他の様々な場面で可能であり，学生が数学上の概念を理解する際に劇的な効果を発揮することが期待される．

例 4　不定形の極限値

　不定形の極限値の計算は，ロピタルの定理を学ぶまでは分数式の変形により行われるのが通例である．例題や問題演習を通じて学生は一応は極限値を求めることができるようにはなるが，どの程度の学生が $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = k$ のとき $f(x) \fallingdotseq kg(x)$ $(x \fallingdotseq a)$ であることを理解しているのだろうか．計算結果の意味を正しく理解できなければ，応用場面のどのようなときに極限値の計算を行うべきかが分からないことになる．極限値を教える際は，$x = a$ の近くで 2 つの関数 $f(x), g(x)$ の挙動の違いを比較していることを理解させることが必要であろう．

このことを従来の教授法で確認させるには，まず $x = a$ の近くで関数 $f(x), g(x)$ のグラフを描かせる必要がある．しかし，この作業を課しただけで学生は「難しい」と感じてしまうであろう．グラフがうまく描けない学生の場合には，極限値の計算自体まで身につかなくなる恐れがある．

数式処理機能を持つグラフ電卓は，このような不定形の極限値も計算できる．∞ への極限値でもかまわない．関数のグラフ描画を即座に行い，その座標データを表データとして表示する．

図 13,14 は，$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)/x^2 = 1/2$ の場合の $f(x) = 1 - \cos x, g(x) = x^2$ のグラフと表を示したものである．図 14 では $y1 = 1 - \cos x, y2 = x^2, y3 = y1/y2$ である．ただし，y3 では $x \neq 0$ という条件をつけている．表の数値データからも，$x \fallingdotseq 0$ のとき $1 - \cos x \fallingdotseq x^2/2$ であることが予見できる．数値の刻み幅は任意に設定できるので，表だけからでも，かなりの精度で極限値の値を求めることができる．あるいは，直接 $f(x)/g(x)$ のグラフを表示し，トレース機能を利用して y 軸との交点の座標を表示させてもよい．この機能では，カーソルがその点の x, y の座標値を表示しながらグラフ上を移動する．

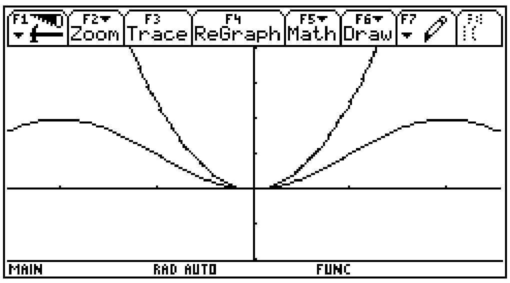
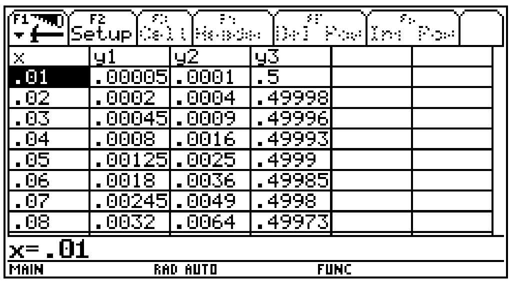


図 13: 曲線の表示



x	y1	y2	y3
.01	.00005	.0001	.5
.02	.0002	.0004	.49998
.03	.00045	.0009	.49996
.04	.0008	.0016	.49993
.05	.00125	.0025	.4999
.06	.0018	.0036	.49985
.07	.00245	.0049	.4998
.08	.0032	.0064	.49973

図 14: 表データ

これらの機能を利用すれば，学生は自分の計算した極限値の意味をグラフと数値データの両面から確認できる．逆に，極限値を数式の計算から求めることができなくとも，グラフや数値データを調べてかなりの精度でその値を数値的に予想することができる．これまでは，計算方法が分からないと，学生は「分かりません」の一言を免罪符としていた．この電卓を利用すれば，計算ができない学生でもそれなりに納得できる形で極限値を求めることが可能となる．

5.2　グラフ電卓を利用した数学教育

グラフ電卓の利用により，数学教育はどのような変貌を遂げるのだろうか．次節で述べられるように，グラフ電卓を利用した数学教育は海外 (特に欧米諸国) ではもはや常識化しており，長年にわたる実践から，その効果等について数多くの研究結果が報告されている [4]．以下では，それらの報告をもとに，グラフ電卓を利用した数学教育の姿を概観してみたい．

「計算中心」から「思考中心」の授業

数学教育で数式処理電卓を利用することについては，おそらく幾つかの懸念が出されるであろう．最大の懸念は,「このような電卓の使用は，基礎的計算力や数学的思考力の低下につながるのではないか」というものだと思われる．

確かに，現状の教育体系のまま，安易にこの電卓を利用させることは多少の問題があるかもしれない．学生は数式処理電卓を単なる「解答表示機能付き電卓」と理解し，自らの計算意欲を停止させる可能性は十分に考えられる．特に，数学の演習問題の多くは計算問題で占められる．米国で電卓を利用した数学教育の改革を押し進めてきたオハイオ州立大学の Franklin Demana 教授と Bert K. Waits 教授は,「数学カリキュラムの 85%は紙と鉛筆による計算からなる」と述べている [5]．それらの問題の多くは，この電卓を利用すれば単なるキーの押し方の問題になりかねない．

しかし，いくら単純計算はキー一発で求められるとはいっても，自分で基本的な計算ができなくてもよいということにはならない．それを自力で行うことのできる能力は当然必要である．したがって，授業の中で実際に利用させるには，どのようなときに電卓を使い，どのようなときに手計算で求めさせる必要があるかを十分検討することが必要となる．

Demana 教授と Waits 教授は，従来の数学教育で行われてきた計算を

(1) Mental computation
(2) Paper-and-pencil computation
(3) Computation done with technology

の 3 つに分類する．そして，これらは，いずれもテクノロジーが利用可能な現在でも必要な能力であり，各場面でどのような計算方法によるべきかという判断が重要であると述べる [5]．つまり，数式処理電卓は，単に教育内容をそのままにして漠然と使用させるのではなく，その教育内容の理解を深めさせるためにはどのような使用のさせ方をすべきかという検討が不可欠である．その使用のさせ方について，Demana 教授と Waits 教授は次の 3 点のバランスが重要であることを強調する [6]．

(1) 筆算で問題を解かせ，その結果をグラフ電卓で確認させること．
(2) グラフ電卓で問題を解かせ，その結果を筆算で確認させること．
(3) 筆算，グラフ電卓，あるいはこれらの併用のいずれによるのが適切かを学生に判断させて問題を解かせること．

そして，数学教育に電卓を使用することには根強い批判がありながらも，グラフ電卓を活用

した海外での長年の教育実践は，計算のアルゴリズムに対する理解や数学的思考力が逆に大きく向上することを報告している [7].

- 電卓を使用した授業を受けた学生は，電卓を使用しないで授業を受けた生徒と比較して，(電卓を使用しないテストにおいても) 基礎的計算力の向上が見られる．
- グラフ電卓の使用は，学生の数学概念や問題解決能力を向上させる．難しい問題を恐れなくなり，数学に対して自信を持つようになる．また，問題解決に対する持続力が高まり，数学に対する態度が改善される．
- グラフ電卓の使用は，関数とグラフに対する理解を著しく向上させ，関数の大域的な性質やグラフ全体の特徴などのグラフ全般に関する学生の理解を深めさせる．

これを前節の例で考えてみる．学生は式の変形を何の方針もなく行っている場合がある．例 1 のように一つ一つ計算手順を指示する形で電卓を利用させれば，計算のアルゴリズムに対する理解は逆に向上することが十分予想できる．その理解をさせた後に電卓を使わせない計算をさせれば，従来よりは手際よく計算できるであろう．そして，そのような理解を得た後は，電卓を利用して直接解を表示させることには何の問題もないであろう．グラフ電卓のこのような使い分けは，オーストリアの Bruno Buchberger 教授により「White-Box/Black-Box の原理」と呼ばれた [5]．手順を一つ一つ指示しながら利用するのが White-Box であり，直接解を表示させるのが Black-Box である．

しかも，グラフ電卓は，例 1 の 2 つの方程式のグラフを容易に表示する．従来，方程式の個所では，グラフ上での意味について説明はなされたとしても，実際には数式変形による解法練習に力点が置かれていた．2 つのグラフの交点の座標を求めているという意識は学生には希薄だったといえよう．それゆえ，いざ後の章でグラフの交点を求める場面になっても，何をすればよいのか分からない学生も出てくることになる．

学生にとっては，グラフを描くという作業自体が大変な作業である．グラフを用いた理解をさせたくとも，式が複雑になると現実にはそのような作業を学生に課す授業は難しいという事情もあった．しかし，この電卓のグラフ機能を利用すれば，方程式の解についてグラフと一体化した理解をさせることができ，方程式の解に対する意味理解が視覚的に強化されることが期待される．しかも，学生自身の計算力では解けないような方程式でも，そのグラフや数値的側面を調べることにより，学生自身が納得できる形で解を求めることができるのである．

このような形で「計算の仕方と意味」を理解させ，その理解の確認のため (電卓を利用しない) 計算練習をある程度経た後は，もはや従来のような問題演習を延々と行う必要はないであろう．そのような問題演習の節約で生じた時間は，方程式を自分て立てる応用のために利用することができる．

この電卓のグラフ機能を積極的に活用すれば，数学の本質的な概念を学生にストレートに理解させることも可能になる．例えば「微分可能性」が「線形近似可能性」に他ならないことを，どの程度の学生が理解しているだろうか．グラフ電卓を利用すれば，これはグラフ上のある点の近くを拡大表示させるだけですむ．何度か拡大していくと，そのグラフは直線で表示される．

学生に幾つかの関数のグラフに対してこの作業を行わさせれば，成績下位の学生でも「微分可能」の意味を容易に理解できるであろう．Demana 教授と Waits 教授は，グラフ電卓のこのような機能を「Power of Visualization」と呼んでいる．接線のグラフを同時に表示させて表データに変換すれば,「数値」の上からの確認もできる．このように，数学を「数式」「グラフ」「数値」の 3 つの側面から多角的に理解させることができるので，数学的な概念への理解は大きく向上すると思われる [8].

数学の問題の多くは,「計算せよ」「解け」「描け」という問題で占められている．しかし，単に与えられた数式，方程式，そして関数に対してこのような問題ができたとしても，それは現実の問題ではどの程度役に立つのだろうか．現実の問題では，問題内容を解釈して「何を計算すればよいのか」,「どのような方程式を解けばよいのか」，あるいは「どのような関数を考えればよいのか」を見出すことがまず必要であり，その部分こそが最も重要な個所のはずである．電卓の利用で節約される単純計算時間は，このような数学本来の「考える問題」にあてることができる．

「教師中心」から「学生中心」の授業

これまでの授業のスタイルは，教師が教壇に立って教えを垂れ，それを学生が板書して覚えるというスタイルであった．グラフ電卓のグラフ機能や数式処理機能を積極的に活用すれば，学生に数学的な探究活動を行わさせることができる．

例 2 では，グラフ機能を利用して平行移動の概念を学生に体験的に発見させようとしている．同様の手法によれば，$y = \sin nx$ のグラフから，この関数の周期について考えさせることもできる．いろいろな関数に対して $y = f(x)$ のグラフと $y' = f'(x)$ のグラフとの関係を考えさせれば，導関数の符号が関数 $f(x)$ の増減と関わっていることを学生に発見させることもできるだろう．極座標によるグラフも表示できるので，様々な関数 $r = f(\theta)$ についてそのグラフを表示させるなどすれば，極座標に対する理解が劇的に向上することが見込まれる．

グラフに関することばかりではなく，この手法は他の様々な個所で適用できる．

例えば，幾つかの具体的な係数について $(ax + b)(cx + d)$ の展開を電卓で行わせ，その展開式の一般形を学生が発見するように仕向けることができる．この展開式は，初等的ではあるがなかなか学生に定着しない式である．展開や因数分解の個所の学習が終わると，この公式によらずに一つ一つ展開しようとする学生が多い．展開前後の係数間の関係を自分で発見できれば，その後の定着率は向上することが見込まれる．逆に $x^n - 1$ の因数分解をいろいろな n について電卓で行わせ，n の値による因数分解の一般的な形を予想させてその証明を考えさせるという授業も可能である [9].

また，$\log a, \log b, \log a + \log b, \log(a + b), (\log a)(\log b), \log ab$ の値をいろいろな a, b について電卓で計算させ，数値の上から $\log a + \log b = \log ab$ であることを学生が発見するように仕向けることができる．いろいろな関数について $\{f(x)g(x)\}'$ を電卓に計算させれば，関数の積の微分公式を発見させることができるだろう．幾つかの連立一次方程式を solve 機能を用いて解かせて，その解の一般的規則 (クラメールの公式) を発見させることも可能と思われる．

定積分を和の極限値として

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

と定義するとき，この極限値を具体的に求めるのは $f(x) = x, x^2$ 等の簡単な関数についてしか行うことはできなかった．しかし，この電卓の数式処理機能を利用すれば，それ以外の関数についても部分和の収束する様子や x_k の取り方の違いによる収束の違いまで，新なプログラムを組むことなくグラフ化することができる．数列の和や極限値を求める機能もあるので，微積分の基本定理を学生が発見するように導くことも可能である．

このように，数式処理電卓を利用すれば，教師が教壇で学生に教えていた主要な公式や定理を，学生自身が発見するよう導くことが可能となる．それは，教師による演繹的な授業から，学生による帰納的な発見への変化である．授業の進め方が「教師中心」から「学生中心」に大きく転換することになる [10]．これは，まさに「数学教育の革命」である．

しかし，この変化はあまりに大きすぎる．それを最初に行う教師にとってはかなりの負担となるであろう．Linda K. Griffith は，(意訳すると) 次のように言う [11].

> この変化は，教師にとっては非常に困ったことかもしれない．しかし，中学・高校の生徒達は，これまで椅子に真っすぐ座ってノートに目をやり，呼ばれた時だけ答える「スクールゲーム」を何如に演じるかを学んできた．このゲームは，生徒達にはあまり居心地のよいものではなかったかもしれない．ゲームのルールが変われば，彼らはこのゲームに参加しなくてよいかもしれない．

教師にとって負担となる授業でも，それは「学生中心」の授業である．そして，海外の多くの実践結果は，それにより教室の雰囲気が大きく変わることを示している．学生が非常に活動的になり，グラフ電卓を相談相手に問題解決や探究活動を共同で行うようになるという [7]．難しい問題を恐れなくなる，数学に対して自信を持つようになる，問題に長時間取り組もうとすることなども報告されている [12].

グラフ電卓を学生に使わせる最初の時間は，この「電卓の機能」に対して学生の歓声がうずまくであろう．そして，この電卓を有効に活用すれば，電卓の機能ではなく「数学そのもの」に対する感動を起こさせることができるだろう．そのことを目前に予見できる以上，数学教師たる者，自らの負担増を恐れるべきではないと思われる．

6　グラフ電卓の利用に関する海外の状況

グラフ電卓を使用した数学教育は，欧米各国を中心に急速に普及しつつあり，アジア各国でも電卓を活用した数学教育に取り組みつつある．

この運動の発祥の地は米国である．オハイオ州立大学の Bert K. Waits 教授と Franklin Demana 教授を中心とするグループは，1980 年代初頭から数学教育にコンピューターを活用する研究を行っていた．しかし，コンピューターは教室で手軽に利用できるわけではない．すべての学生にそのよ

うな環境を提供できる学校も限られていた．このような中で，1986 年にカシオが世界で初めてグラフ電卓 fx-7000G を開発し，続いてシャープ，ヒューレットパッカード，テキサスインスツルメントもグラフ電卓を発売した．1985 年に始まった C^2CP プロジェクト (Calculator and Computer Precalculus Project) はグラフ電卓の数学教育における革新性に着目する．NSF(National Science Foundation) による多額の資金援助も得て，微積分の改革運動に火がついた．そして，1989 年には米国数学教師協議会 (NTCM) による数学カリキュラムの基準に「適切な電卓がすべての児童・生徒にいつでも利用可能であるべきである」ことが盛り込まれるに至る [13]．テキサスインスツルメントは，これらの運動の中から出されてきた多くの要望に応える形でグラフ電卓の改良を重ね，1996 年には数式処理機能と幾何機能 (カブリジオメトリ) を備えた TI-92 を発売した．また，このような改革では現場教師の啓蒙やトレーニングが必要であることから，1988 年には T^3(Teachers Teaching with Technology) と呼ばれる組織も設立された．T^3 への参加者は年々増加し，1999 年の第 11 回大会 (シカゴ) では，25 ケ国から 65 名の招待者を含め 2,700 名以上の参加者で盛況だったという [5, 8, 14].

このような運動の結果，米国では数学教育へのグラフ電卓の導入が加速する．そして，幾つかの州では，家計の高低で教育に差が生じてはならないという観点から，州予算で州内全生徒のグラフ電卓購入を決める州まで現れた．今や数学の授業でグラフ電卓の使用は常識化していると言われる [15]．米国高校数学の最上位レベルにあり大学数学の単位を高校在学中に取得できる AP Calculus の講座では，数式処理電卓の浸透率が 90%にも及び日常的に電卓を活用した教育が行われている．高校でグラフ電卓を使いこなして進学してきた学生に押される形で，大学の側もそれに対応せざるを得なくなっているという [16]．電卓を利用した教育は小学校低学年にまで及んでいるが，それには種々の批判も出されて論争は現在も継続している．

このような米国の数学教育の改革に押される形で，フランス，オーストリア，デンマーク，北欧三国，スペイン，ポルトガル，カナダなど多くの国が，グラフ電卓の活用に取り組んでいる．デンマーク，ノルウエー，ポルトガルなどでは，国のカリキュラムでグラフ電卓の使用を義務化している．特に，スウェーデン，デンマーク，ポルトガル，そしてフランスでは，国家試験でグラフ電卓の使用が認められている [6].

オーストリアでは 1991 年の段階でパソコン用の数式処理ソフト Derive を利用した数学教育を全高校生に対して行っている [17]．このソフトは TI–92 に組み込まれているソフトである．このような数学教育へのテクノロジーの利用にはアジアのシンガポール，マレーシア，そしてタイでも関心を高め，一部の学校では電卓を活用した教育実践が始まった．韓国や中国でも，数学教育へのテクノロジーの活用に向け真剣な検討が行われつつあるという [15].

これに対して日本では，1997 年に T^3Japan が設立されたが，この電卓の意義を理解した教育現場や教育センター，あるいは教育系大学の一部の人々によって情熱的な実践や研究が行われているにすぎない．筑波大学では，1990 年代前半から数学教育へのテクノロジーの活用に向けた継続的な研究が行われている．グラフ電卓の数学教育への活用に関する本も出版されているが [18]，一般には数式処理可能な電卓が存在することさえあまり知られていない．このような日本での関心の薄さからか，カシオやヒューレットパッカードの数式処理電卓は日本では発

売されていない．高校や大学への「受験」に向けた教育を行わざるをえない日本の教育現場は，この数式処理電卓がいかに画期的なものであったとしても，受験のあり様が変わらない限り電卓を活用した教育には躊躇があるであろう．

世界におけるグラフ電卓の普及状況は，今や指数関数の急勾配部分にさしかかっていると言われている [6]．その一方，日本では，逆に数学の時間数を減少させようとしており，大学受験においても数学が受験科目から敬遠される傾向にある．その結果は「分数ができない大学生」として問題になっている [19]．現在社会では理工系のみならず様々な分野で数学の必要性が求められており，世界各国が急速にグラフ電卓を取り入れた数学教育の改革を押し進めつつあるのと比較すると，日本の現状には肌寒いものがある．

関数電卓の出現で，我々はもはや数表や計算尺を必要とはしなくなった．文字式の計算や 2 変数関数のグラフ描画が可能で微分方程式の解析解まで求めてくれる電卓があるのであれば，それを利用しない手はない．世界におけるグラフ電卓の浸透状況を見ると，この電卓の活用法に関する研究は，もはや一時の猶予もならない状況にあるのではないだろうか．

7　数学教育への電卓導入に関わる問題点

これまで見てきたように，数式処理電卓は数学教育にとっては画期的な機能を持つ．この電卓を単なる「電卓」と捉えて見すごすことは大きな誤りである．この電卓を利用した数学教育は従来の数学教育のあり方を革命的に変える．海外では，その革命が現在急速に進行中であることを忘れてはならない．

この電卓を数学教育に利用するにあたっては色々な懸念が出されるであろうが，その多くは現状の教育内容をそのままにして，その中でこの電卓を使用させた場合のものではないだろうか．数式処理電卓を学生に利用させるということは，授業のあり方を「計算中心」から「思考中心」に，そして「教師中心」から「学生中心」に大きく転換するということである．それは従来の教育内容を抜本的に変えるということではない．教えるべき項目自体には殆ど変化はないと思われるが，教え方の重点が「思考中心」に，そして授業の進め方が「学生中心」に転換することになる．そこでは単純計算の占める割合は大きく低下することになろう．

我々は，学生に「数学」を教えるべきである．これまでは，そのために必要となる「計算の仕方」を教えてきたといえば言い過ぎであろうか．この電卓を有効に活用すれば，我々は学生に「数学」を味あわせることができる．そのためには，どのような場面でどのように利用させるべきかの研究が不可欠である．この電卓は,「学生に教授しなければならない数学とは何か？」を我々に根本から問い直すことを求めていると言えよう．

米国では，数学力の向上が国力向上に繋がるという明確な目的のもとに，すでに 10 年以上前からグラフ電卓を利用した数学教育が積極的に行われてきた．数式処理可能なグラフ電卓まで開発され，それを利用した教育実践のノウハウはすでに十分すぎるほど蓄積されている．グラフ電卓の使用を前提とした数学の教科書も数多く出版されている．この改革運動を主導してきた Demana 教授と Waits 教授達は，その共著の教科書 (第 3 版) の序文で「第 2 版の出版以来,

我々は 20,000 名の教師を含む 400 以上のワークショップに参加してきた」と述べている [20]．これだけ多くの数学教師の実践と研究会の中から生み出された蓄積が米国にはある．日本では数式処理可能な電卓の存在すらあまり知られていないことを考えると，暗澹たる思いにならざるを得ない．技術立国を唱える日本にとって，数学的思考力を強化することは不可欠である．米国との差がこのまま拡大すれば，両国の数学力の差は，ひいては国力の差はとんでもないことになるのではないかという危機感が感じられてならない．

数式処理機能を持つグラフ電卓の数学教育への導入は早急に押し進められるべきであり，決して一部の教師だけの関心事とすべきことではない．しかし，この電卓の普及を考えるにあたっては，幾つかの問題がある．

第一に，指導する教師側の問題である．関心を持った一部の教師が，特定の学年や特定のクラスで電卓を利用した授業を一時的に行ったとしても，あまり大きな効果は期待できないであろう．少くとも，通年で継続的に使用する体制が必要である．そのためには，その学校の数学教師が一丸となって取り組むことが必要と思われるが，そのような意志統一を図れるかどうかである．特に，この電卓を授業で利用するには教え方を抜本的に変えることが必要であり，それは手探りで見出していくしかないであろう．慣れ親しんだ従来の教授法を捨て，事前に相当の準備を必要とする新しい教授法を探り当てなければならない．そのような新規の授業を行うことには教師側に相当の覚悟が必要である．ある意味では，電卓利用に対して，学校の数学科内の体制を整え得るかどうかが最大の問題となるかもしれない．

第二に，予算上な問題である．この電卓は，学生一人一人に所持させて家庭でも自由に使える状態にあることが望ましいが，そのような状態を取り得るかどうかである．数式処理のできる電卓としては安価であるが，電卓そのものの価格としては高価な部類に属するこの電卓を学生全員に購入させるには，学校側としてもその教育効果についてある程度の見通しが必要であろう．少くとも，通年で継続使用できる体制を取り得なければ，学生個々に負担させることには問題があるかもしれない．とりあえずは 1 クラス分 (できれば 1 学年分) の電卓を学校側で用意し，そのつど学生に利用させるのが現実的であろう．パソコン数台分の投資 (約 100 万) があれば，1 クラス分の台数をそろえることは可能と思われる．そして，そのような予算処置を行うには，学校管理者や行政管理者の理解を得ることが必要となる．場合によっては，この管理者側の理解を得ることが問題になることも考えられる．

第三に，この電卓の利用法に関する教材研究の問題である．この電卓を有効利用するには，どのような題材のときにどのような使用のさせ方をすべきかという，事前の教材研究が不可欠である．そのための教材研究が決定的に不足している．日本にはグラフ電卓の利用を前提とした教科書は存在しないので，教師はすべてを一から行わなければならない．それを個々の教師がすべての分野に渡って行なうのでは負担が大きすぎる．共同で教材研究を行うこと，そして電卓の利用を前提とした教科書を早急に作成することが必要であろう．

第四に，この電卓の普及促進の主体者の問題である．世界におけるこの電卓の普及状況を考えると，関心を抱いた一部の教師が個人的に電卓を用いた授業を行ったり普及に努めるレベルの問題ではない．その普及には国 (文部省)，教育委員会，あるいは学会などが，組織として強

い決意で取り組むことが必要である．数学教師に長年親しんだ教授法を変えてもらうには，この電卓の威力を実感してもらうのが一番であろう．それには，これらの組織が中心となった強力な啓蒙活動や講習会が必要になってくると思われる．

第五に，中学や高校で導入する場合は，さらに指導要領や受験対策との兼ね合いが問題となる．この電卓の使用が指導要領で述べられていることの達成に有効であること，あるいは受験指導に有効であることを明らかにすることが必要となろう．この電卓の革新性を理解できたとしても，指導要領や受験対策との関連に不安を持たれる限り学校現場への普及は望み薄と思われる．中高の学校現場はやり直しが効かない．何らかの不安がある限り，この電卓の積極的活用には躊躇があるであろう．これらの不安を，具体的な事例で一つ一つ払拭する作業が必要になると思われる．

以上の問題はそれぞれが複雑に絡み合っており，いずれもそう簡単に解決できそうには思われない．かといって問題を放置することは，世界との格差を一層拡大させるだけである．今まさに，日本の数学教育をどうするかが問われていると言えるのではないだろうか．

8　おわりに

高専創設時の学生は，三角関数や対数関数の値を計算尺や数表を用いて求めていた．しかし，関数電卓の出現で，そのような計算は不要になった．そして，現代のテクノロジーは，数式処理ソフトをハンドヘルドの電卓に詰め込むことを可能にした．今や，いろいろな式の計算や微積分の計算のみならず，微分方程式の解析解ですらキー操作だけで解法可能な時代にすでに突入しているのである．

金沢高専では，1996 年度よりグラフ電卓 TI–83 を新入生に購入させ，CBL の活用による数学・物理を総合した先駆的な授業が行われている．石川高専では，1999 年度に 2 クラス分の数式処理電卓 TI–89 を購入し，授業で利用し始めた．福井高専では，2000 年度の新入生全員に TI–89 を購入させることが決定されている．一関高専でも，1 クラス分の TI–89 を購入して 2000 年度より使い始める予定である．

数式処理可能なグラフ電卓の出現は画期的であり，それは従来の「電卓」の範疇を越えるものである．この電卓の機能を有効活用した数学教育は「数学教育の革命」を引き起こす．世界ではその革命が急速に進行中であり，日本だけが取り残されることは許されない．グラフ電卓の普及と，それを活用した数学教育の研究は急務である．

参考文献

[1] 各電卓の詳細は，以下の URL を参照されたい．
http://www.casio.com/calculators/
http://www.naoco.com/
http://www.hp.com/calculators/

[2] カブリジオメトリの中学校数学での利用法としては，例えば以下の URL を参照されたい．
http://www.ies.co.jp/chugaku/menu.html

[3] TI-92 Wins System Challenge at Math Software Conference,
http://www.ti.com/calc/docs/swh/ti92wins.htm

[4] Edward D. Laughbaum (ed): *Hand-Held Technolgy in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers*, The Ohio State University, 2000

[5] Franklin Demana and Bert K.Waits: The Evolution of Instructional Use of Hand Held Technology. What we wanted? What we got., 1997
http://www.math.ohio-state.edu/˜waitsb/papers.html

[6] Bert K.Waits and Franklin Demana: Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present, and Future, in [4], pp.2–11

[7] Penelope H. Dunham: Hand-Held Calculators in Mathematics Education: A Research Perspective, in [4], pp.39–47

[8] Bert K.Waits and Franklin Demana: The Calculator and Computer Precalculus Project(C^2PC): What have We Learned in Ten Year?, in [4], pp.12–32

[9] 公庄庸三：M.T.T.(Mathematical Thinking with Technology) の実践報告, T^3Japan 第 3 会年会冊子, pp.98–104, 1999　http://seifu.ac.jp/Math/

[10] Vlasta Kokol-Voljc: Exam Questions When Using CAS for School Mathematics Teaching, in [4], pp.192–200

[11] Linda K. Griffith: Impact of Technology on Pedagogy, in [4], pp.76–77

[12] Heidi Pomerantz (ed.): The Role of Calculators in Math Education, 1997
http://www.ti.com/calc/docs/therole.htm

[13] 能田伸彦, 清水静海, 吉川成夫監修: 「21 世紀への学校数学の創造〜米国 NCTM による『学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード』〜」, 丸善 (筑波大学出版会), 1997

[14] Bert K.Waits and Franklin Demana: The Role of Hand-Held Computer Symbolic Algebra in Mathematics Education in the Twenty-First Century: A Call for Action!, 1998
http://www.math.ohio-state.edu/˜waitsb/papers.html

[15] 「いま，世界のくにぐにでは･･･」，T.I.M.E，vol. 14，テキサスインスツルメント社，1999
http://www.naoco.com/calc/time.htm

[16] 渡邊信：「米国大学教育界の苦悩」，T.I.M.E，vol. 13，テキ サスインスツルメント社，1999
http://www.naoco.com/calc/time.htm

[17] Bernhard Kutzler: The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, 1999　http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html

[18] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦偏：テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997

[19] 岡部恒治，戸瀬信之，西村和雄：分数ができない大学生，東洋経済新報社，1999

[20] F. Demana, B. K. Waits, S. R. Clements, and G. D. Foley: *Precalculus, Functions and Graphs, Third Edition*, Adison-Wesley, 1999