T^3-Teachers Teaching with Technology
THE 8th T^3JAPAN ANNUAL MEETING
August 10–11, 2004

3次・4次関数に関する高専1年生の発見

梅野　善雄
(一関工業高等専門学校)

T^3Japan 第8回年会 (東京大会)　別刷
筑波大学附属駒場中学・高等学校

3次・4次関数に関する高専1年生の発見

梅野　善雄*

一関工業高等専門学校

1　はじめに

数学の通常の授業形態では，試行錯誤を伴う問題を課すことはなかなか難しいものがある。ここでグラフ電卓を貸与しておくと，ちょっとした刺激を与えるだけで学生は勝手に数学の世界にはまっていくことがある。

一関高専では，平成15年度の1年生全員にTI–89を貸与して自由に使用させた。この年度の学生 (高専では1年生から「学生」と呼んでいる。) は，主として関数グラフの答え合わせとして使用した。ここでは，3次関数や4次関数のグラフの性質を考察させる課題に対する学生のレポートを紹介したい。学生に課した課題は，以下のようなものである。

> 次のグラフは，a, b, c, d がどのようなときに，どのようなグラフになるか。
> 1つ以上を選択して，各自の考察結果をまとめて提出せよ。
> (1) $y = (x-a)(x-b)(x-c)$　　(2) $y = x(x^2+ax+b)$
> (3) $y = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$　　(4) $y = x^2(x^2+ax+b)$

この課題は平成15年11月下旬に課し，1ヶ月の考察期間を与えた。以下では，提出されたレポートの中から，これらの関数の極値の求め方についてまとめてきた学生のレポートを紹介する。

2　3次関数 $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ の極値

課題の意図は，単純に，a, b, c が x 軸との共有点であることに気づかせ，a, b, c の値の状況によりグラフのタイプを分類させることにあった。その中で，2名の学生が，この関数の極値を求める方法について言及してきた。ただし,「極値」という術語はまだ学習していないので，学生は山・谷の頂点とか最大値・最小値という言葉で表現しているが，内容的には極値に関する考察になっている。

2.1　阿部裕司君のレポート

阿部君は，x 軸との共有点の座標が a, b, c であることや，y 軸との交点は $-abc$ であることに触れた後，a, b, c がすべて異なるときや，$a = b$, $b = c$, $a = b = c$ のときの4つのパ

*021–8511　一関市萩荘字高梨　一関工業高等専門学校
[URL] http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

ターンがあり，$a=b=c$ のときは $y=x^3$ のグラフを x 軸方向に平行移動したものであることをあっさりと見抜く。そして，$b-a=c-b$ のときの極値について考察をすすめる。

まず，$b-a=c-b$ の値 (この値を阿部君は「垣間」と呼んでいる）を少しずつ大きくしながら，極大値をグラフ電卓の機能により求めて表を作成する。そして，3 次関数であることや，垣間が 1 のときの極大値は 0.3849 であることから，他の場合は $0.3849\times$ (垣間)^3 ではないかと予想し，表から正しいことを確認する。$0.3849\times 3^3=10.3923$

垣間	最大値
1	0.3849
2	3.0792
3	10.3923
4	24.6336
5	48.1125

次に，極値の y 座標が分かる以上は x 座標も求まるはずであると考え，同じ条件の関数として $y=(x-j)x(x+j)$ を考え，j の値と極大値を与える x 座標との関係を調べる。そして，同様の表を作成する中で，極値を与える点の x 座標は j に比例していて $x=-0.57735j$ であることに気づいている。

j	頂点の x 座標
1	-0.57735
2	-1.1547
3	-1.73205

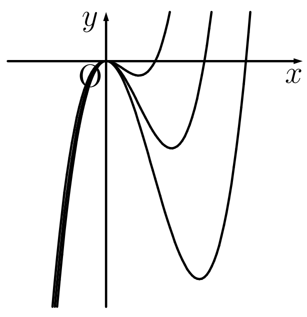
以上を $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の場合について述べて，次の結論を得る。

> $b-a=c-b$ となる式において，
> 山の頂点の座標は $(b-0.57735(b-a), 0.3849(b-a)^3)$ であり，
> 谷の最下点の座標は $(b+0.57735(b-a), -0.3849(b-a)^3)$ である。

この結論は正しい。実際，平行移動すれば $y=x(x^2-a^2)=x^3-a^2x$, $(a>0)$ のタイプを考えることになり，$y'=3x^2-a^2$ であることから極値をとるのは $x=\pm a/\sqrt{3}$ のときである。このときの y 座標は $y=\mp(2\sqrt{3}/9)a^3$ である。この値を小数に直すと，$1/\sqrt{3}=0.57735$, $2\sqrt{3}/9=0.3849$ となる。

阿部君はこの結論で満足することなく，次には $a=b$ のときの谷の頂点について考察する。問題を簡単にするため $a=b=0$ の場合について考え，$y=x^2(x-c)$, $(c>0)$ の谷の頂点の y 座標と c とを対応させた表を作る。そして，容易に x 座標は $0.666667c$ であり，y 座標は $-0.148148c^3$ であることを見抜いている。

c	頂点の x 座標	y の最低値
1	0.666667	-0.148148
2	1.33333	-1.18519
3	2	-4
4	2.66667	-9.48148
5	3.33333	-18.5185
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	$0.666667c$	$-0.148148c^3$



$y=x^2(x-c)$, $c<0$ のときの山の頂点についても同様であることから次の結論を得る。

$y=(x-a)^2(x-b),\ (a<b)$ となる式において
谷の最低値の座標は $(a+0.66667(b-a), -0.148148(b-a)^3)$ であり，
$y=(x-a)(x-b)^2,\ (a<b)$ となる式において
山の最大値の座標は $(a-0.666667(b-a), 0.148148(b-a)^3)$ である。

この結論も正しい。実際，$y=x^2(x-a)=x^3-ax^2$ の場合，$y'=3x^2-2ax$ であるから，極値を取るのは $x=0, 2a/3$ のときである。このときの y 座標は，$y=0, -4a^3/27$ であり，小数に直すと $2/3=0.666667,\ 4/27=0.148148$ である。

2.2 熊谷一生君のレポート

この学生は，文字式の計算で極値を求める式を発見してきた。熊谷君は，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の場合は $y=f(x)=ax^2$ のグラフを適当に平行移動して $y=f(x-p)+q$ の形に表せたことから，この3次関数についても同じような変形ができないだろうか，ということを考える。そして，放物線の場合の変形過程の類似計算を手計算で行うことにより，

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+a\left\{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)x+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^2}\right)\right\}$$

を導き，$(x-a)(x-b)(x-c)$ の展開式にあてはめて

$$(*)\qquad (x-a)(x-b)(x-c)=\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^3+\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

を得る。放物線の場合の類似で考えると，y 軸方向の平行移動が

$$\frac{-(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{3}x+\frac{(a+b+c)^3}{27}-abc$$

となるが，x が含まれているので，この部分は y 軸方向の平行移動を表すとはいえないことに気づく。そして，種々の考察の結果，3次関数の波の打ち方には，この1次式の傾きが大きく関わっており，$y=f(x-p)+q$ の式において，$(*)$ 式の x の項は $f(x)$ の方に含めて考えるべきであるとの結論に至り，以下を得る。

$y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフは，

$$y=x^3-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}x$$

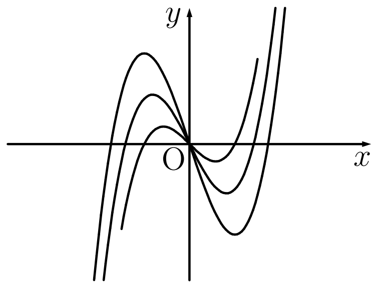
のグラフを，x 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$，y 軸方向には

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9}-abc$$

だけ平行移動したものである。

次に，彼は，$y=x^3+\alpha x$ のグラフを考察する。彼は，すでに，3 次関数のグラフの波の打ち方は，この関数の α の値が関わっていることを知っている。そして，$y=x^3+\alpha x$ のグラフは $\alpha \geqq 0$ のときは波を打たず，$\alpha<0$ のときに波を打つことに気づく。

次に，$y=x^3+\alpha x$ のグラフの極値に関心を寄せ，極小値を与える x 座標をグラフ電卓の機能を利用して求める。そして，$\alpha=-1$ のときの極小値は $x=0.57735$ のとき，$\alpha=-2$ のときの極小値は $x=0.816497$ のとき，$\alpha=-3$ のときの極小値は $x=1$ のときであり，



$$(0.57735)^2=0.33333 \fallingdotseq \frac{1}{3},\quad (0.816497)^2=0.66667 \fallingdotseq \frac{2}{3},\quad 1^2=1 \fallingdotseq \frac{3}{3}$$

であることから，$\alpha<0$ のとき $y=x^3+\alpha x$ の極小値は $x=\sqrt{-\alpha/3}$ のときであるということを発見する。そして，この発見を $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の平行移動に関する事柄と重ね合わせて次の結論を得る。

> $X=\dfrac{a+b+c}{3}$, $\alpha=-\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ とおくと，
> $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ の変曲点の座標は $(X,(X-a)(X-b)(X-c))$ であり，
> 極大値は $\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}, \left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(X-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)\right)$
> 極小値は $\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}, \left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-a\right)\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-b\right)\left(X+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{3}}-c\right)\right)$
> のときである。

変曲点や極大値・極小値という言葉を彼はまだ学習していないが，グラフの山や谷の頂点の座標と点対称となる中心点の座標を上記のような形で明確に表現している。

3　4 次関数 $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ の極値

この課題の意図は，a,b,c,d が x 軸との共有点であることに気づかせ，a,b,c,d の値の状況によりグラフのタイプを分類させることにあった。その分類を行った上で，極値を与える点の座標を求める式を書いてきた学生が 2 名いる。以下に，彼らのレポートの内容を紹介する。

3.1　小岩正秀君のレポート

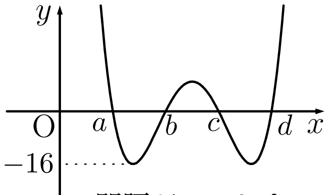
小岩君は，最初に，a,b,c,d のいろいろな場合におけるグラフのパターンを分類し，グラフの特徴として以下のようなことを述べている。

- $a=b=c=d$ のときを除き，グラフはアルファベットの W のような形になる。
- グラフの形は，x 軸との交点の数と，それらの間隔で決まる。
- x 軸との交点の数とそれらの間隔が同じであれば，グラフの形は同じである (x 軸上を平行移動している)。

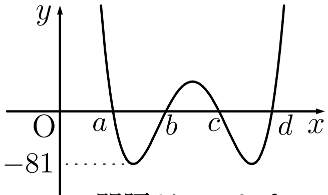
- グラフには，必ず最小値がある。

そして，彼は，グラフが左右対称の場合 ($b-a=d-c$ の場合) に，この最小値の値を求めることを試みる。

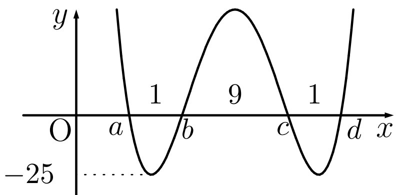
はじめに，$b-a=c-b=d-c$ の場合のグラフから，グラフ電卓の機能を利用して最小値の値を求める。最初の 2 つの例の最小値は $-(b-a)^4$ となるが，$b-c \fallingdotseq b-a$ の場合にはあてはまらないことに気づく。



間隔が 2 のとき



間隔が 3 のとき

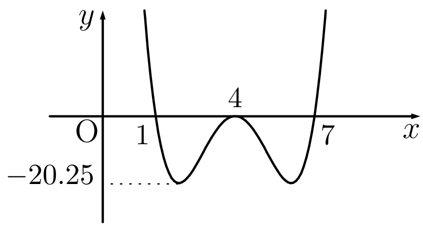


間隔が違うとき

そして，これら両者に共通な規則性がないかを考えた結果，最小値は

$$-\left(\frac{ab\,\text{間}}{2}\times ac\,\text{間}\right)^2 = -\left(\frac{ab\,\text{間}\times ac\,\text{間}}{2}\right)^2$$

であるとする。そして，このことが正しいかどうかを他の場合 ($b=c$ の場合も含む) にも確認している。



$$-\left(\frac{3}{2}\times 3\right)^2 = -20.25$$

この結論は正しい。実際，左右対称の場合なので，

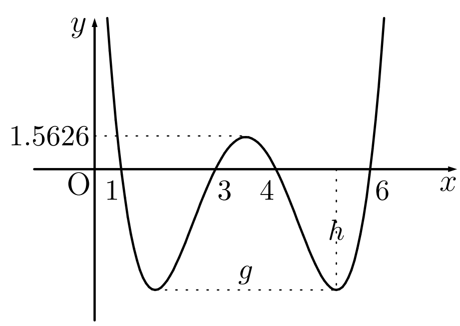
$$y=(x^2-a^2)(x^2-b^2)=x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2, \quad (a \leqq b)$$

について考えると，$y'=2x(2x^2-(a^2+b^2))$ であるので，最小値をとるのは $x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ のときである。この値を y に代入すると

$$y=-\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2=-\left(\frac{(b-a)(b+a)}{2}\right)^2$$

となる。これは，小岩君の結論と同じ内容を意味している。

小岩君は極大値に関しても考察を進める。まず，グラフ電卓の機能を利用して求めた $y=(x-a)^2(x-b)^2$ の極大値と a,b との関係について考える。そして，容易に極大値は $((a-b)/2)^4$ であることに気づく。左右対称で x 軸との共有点が 4 個ある場合は，最小値の分だけグラフを y 軸方向に平行移動して x 軸に接するようにさせたときの極大値から，平行移動した最小値の分を引くことにより，もとの関数の極大値が求められる。



右上の例では，グラフ電卓の機能を利用すると，極値の座標は $(1.69722,-9)$, $(5.30278,-9)$ である。この最小値 -9 は，小岩君の計算方法によれば，$h=-((3-1)(4-1)/2)^2=-9$

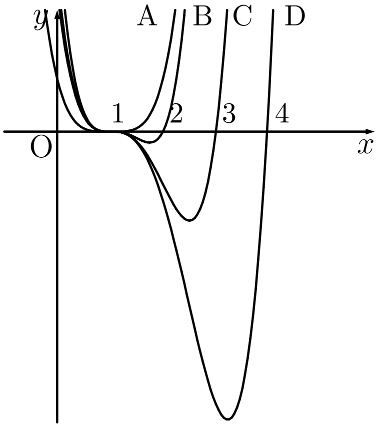
として求められる。そして，極大値は，

$$\left(\frac{g}{2}\right)^4 - 9 = \left(\frac{5.30278 - 1.69722}{2}\right)^4 - 9 = 1.5626$$

として求められる。ただし，この方法では，極値の x 座標の値は求められない。「何時間考えても分からなかった」として，本人も非常に悔しがっている。

3.2 藤根成暢君のレポート

この学生は，$y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ のグラフを非常に丹念に調べていく中で，「$b=c=d$ ならば，a と b の値で最小値の座標 (x,y) を求められる方法を見つけました。」と書いている。



		最小値
A	$y=(x-1)(x-1)^3$	$(1,0)$
B	$y=(x-2)(x-1)^3$	$(1.75,-0.1054)$
C	$y=(x-3)(x-1)^3$	$(2.5,-1.6875)$
D	$y=(x-4)(x-1)^3$	$(3.25,-8.54297)$

x 座標を分数表示すると，それぞれ

$$(A)\ 1=\frac{4}{4}\ ,\quad (B)\ \frac{7}{4}$$
$$(C)\ \frac{5}{2}=\frac{10}{4},\quad (D)\ \frac{13}{4}$$

a,b が他の値のときも同様の分数表示をした上で，結論として最小値を与える点の x 座標は，$x=(3a+b)/4$ であるとする。そして，y 座標については

$$(B)-0.1054 \Leftrightarrow -\frac{3^3\times 2^4}{256},\quad (C)-1.6875 \Leftrightarrow -\frac{3^3\times 3^4}{256},\quad (D)-8.54297 \Leftrightarrow -\frac{3^3\times 4^4}{256}$$

となることなどから，以下の結論を得る。

> $y=(x-a)(x-b)^3$ の最小値を与える点は，$\left(\dfrac{3a+b}{4},\ -\dfrac{3^3\times(a-b)^4}{256}\right)$ である。

この結論は正しい。実際，$y=(x-a)\cdot(x-b)^3$ のとき $y'=(4x-3a-b)(x-b)^2$ であるから，極値を与える可能性のある点は $x=b,\ (3a+b)/4$ のときである。$x=(3a+b)/4$ を y に代入すると，最小値として次式が得られる。

$$y=\left(\frac{3a+b}{4}-a\right)\left(\frac{3a+b}{4}-b\right)^3 = -\frac{3^3\times(a-b)^4}{4^4}$$

4　おわりに

学生に与えた課題自体は，特に新規性のあるものではない。グラフと x 軸との共有点のあり方により，グラフの形状に対する感覚をつかんでもらえればということを意図しただけの課題であったが，提出されたレポートは，それぞれが一般性のある性質を求めて探究を試みており，相当に苦心したことがうかがわれるものばかりであった。自分で問題意識をもち，それを解決しようと試みる行為を，多くの学生が体験した。グラフ電卓なくして，このような体験をさせることはできなかったであろう。既存の単純な課題を与えるだけで，学生の方で勝手に問題を膨らませて数学を楽しんでいる趣がある。年度末の感想で熊谷一生君は,「自由研究は，やっているうちにどんどんおもしろくなってきて，めちゃくちゃ頑張りました。」と書いている。グラフ電卓の利用法の裾野の大きさと教育上の限りない効果を，改めて感じさせられた思いがする。