数式処理電卓の工学系専門科目における利用例

梅野　善雄*

一関工業高等専門学校

1　はじめに

数式処理電卓 TI–89 は数学教育用に開発されたグラフ電卓であるが，その機能はかなり高度である。数式処理ソフトの国際コンペで Mathematica と並んで首位タイになったこともある。この電卓の数式処理機能は工学系専門科目での使用にも十分耐えうるものがあり，数学のみならず高専や工学部の専門科目を学習する上においても有効である。以下では，応用数学や応用物理での利用例について紹介したい。

2　応用数学での利用—ラプラス変換の場合—

関数 $f(x)$ のラプラス変換は，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ により定義される。工学においてラプラス変換は,微分方程式の初期値問題の解法や自動制御等において必要となる。TI–89 は，個々の関数ごとにラプラス変換が存在するための s の範囲を指定すれば，積分機能を利用してラプラス変換を計算することができる (図 1)。そこでは，文字定数を含んでいてもかまわない (図 2)。

通常のラプラス変換の授業では，この無限積分が存在するための関数の条件について説明がなされ，その後，基本的な関数について実際に積分の計算をすることになる。その計算では，基本的な積分計算や極限値の計算ができることが仮定されるが，なかなか全員にそれを期待できないのが現実であろう。

ラプラス変換の計算では，不定積分の計算，計算した不定積分への値の代入，そして $t \to \infty$ のときの極限値の計算が必要になる。最近の学生は，自分の計算が誤っているとき誤りの箇所を発見しようとすることなく全てを消して最初からやり直そうとする。そのときに数式処理電卓を活用させれば，どの段階で誤ったのかを簡単にチェックできる。

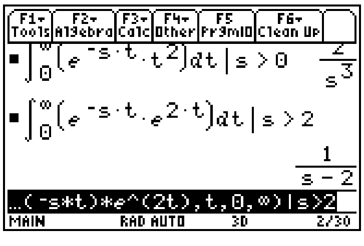

図 1

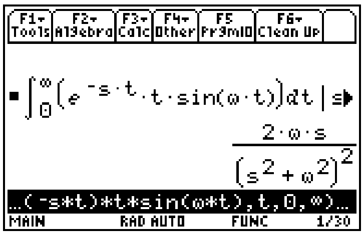

図 2

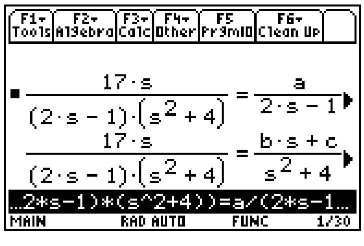

図 3

*021–8511　一関市萩荘字高梨　一関工業高等専門学校，　E–mail: umesan@ichinoseki.ac.jp

TI–89 は，ラプラス変換の計算はできてもラプラス逆変換の計算はできない。しかし，部分分数への分解に利用することができる。たとえば，次式の左辺のラプラス逆変換を計算する場合には，

$$\frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} = \frac{a}{2s-1} + \frac{bs+c}{s^2+4}$$

として (図 3)，両辺に $(2s-1)(s^2+4)$ を掛けて分母を払うと

$$17s = (a+2b)s^2 - (b-2c)s + 4a - c$$

となる (図 4)。両辺の係数を自分で比較すると

$$a+2b=0, \quad -b+2c=17, \quad 4a-c=0$$

を得る。これを，連立方程式として解いて，$a=2,\ b=-1,\ c=8$ が得られる (図 5)。

この計算では，すべてを電卓に任せているわけではない。どのような形の部分分数に分解するかは自分で設定している。分母を払った後の係数比較や，その後のラプラス逆変換も自分で行うことが必要であり，どのような流れでラプラス逆変換を求めるかを理解していることが前提となる。しかも，逆変換を正しく行ったかどうかは，そのラプラス変換を表示させることにより簡単にチェックできる。このような形で数式処理電卓を利用することは，ラプラス逆変換を理解させるときに有効と思われる。

自分である程度の計算ができるようになった後には，数式処理機能を利用して，最初から部分分数に分解させることもできる (図 6)。ラプラス変換や逆変換の理解が得られた後の具体的な応用では，このような形で数式処理機能を積極的に活用させれば，学生の思考を応用部分に集中させることができるだろう。

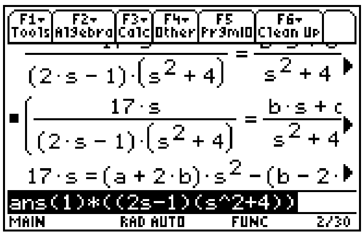

図 4

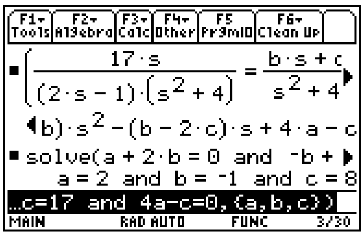

図 5

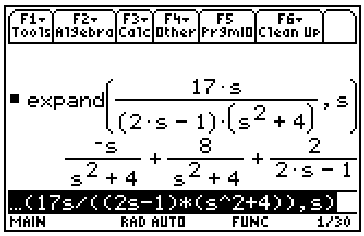

図 6

3　応用物理での利用例—振動の場合—

応用物理では，いろいろな運動が微分方程式で表されるので，それを解くことが求められる。たとえば，一端を固定したばね定数 k のコイルばねに質量 m の物体をつけて振動させると，その運動方程式は

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

と表される。TI–89 の数式処理能力は高度であり，このような文字係数の微分方程式であっても，2 階の定数係数までは解析的な解を求めることができる。図 7 は，この微分方

程式に $k>0, m>0$ という条件をつけて，そのままの形で解いたものである。一般解

$$x=@1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)+@2\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が表示されている。$@1, @2$ は積分定数である。

図 8 は，同じ微分方程式を $x(0)=x_0, x'(0)=v_0$ という初期条件のもとで解いたものである。積分定数が消えて，x_0, v_0 を含む形の解

$$x=x0\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{k}\cdot t}{\sqrt{m}}\right)+\frac{\sqrt{m}\cdot v_0\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{k}\cdot t}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{k}}$$

が表示されている。図 9 は，この解に対して，$k=1, m=4, x_0=0, v_0=1$ の場合の振動の様子をみたものである。垂直方向の動きと，時間軸を横軸にとったときのグラフとを同時に表示させている。右側でバネ定数や初期変位を変えると，振動の様子がどのように変わるかを簡単に確かめることができる。

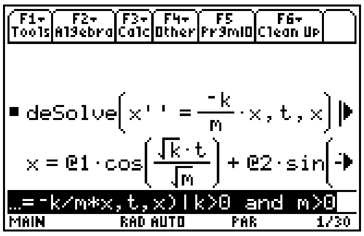

図 7

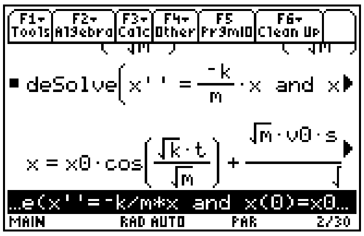

図 8

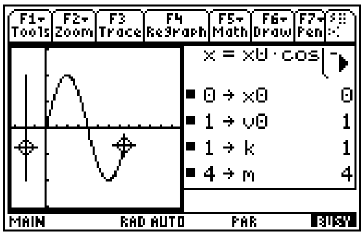

図 9

この運動に強制的な外力 $mF\cos\omega t$ を加えると，運動方程式は

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{k}{m}x=F\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。この微分方程式の特殊解は，$k/m=p^2$ とおくと $x_p=\dfrac{F}{p^2-\omega^2}\cos\omega t$ であるので，これを式①に加えたものが一般解である。$p\fallingdotseq\omega$ のときは「うなり」を生じる。

図 10 は，$F=1, \omega=2.2, p^2=4$ の場合に，式②の一般解を求めようとしたものである。最初は簡約化されない解が表示されるので，三角関数の簡約化 (tCollect) を行って，

$$x=-1.19048\cos(2.2t)+@1\cdot\cos(2t)+@2\cdot\sin(2t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が表示されている。

図 11 は，この微分方程式の初期条件 $x(0)=1, \dfrac{dx}{dt}(0)=1$ を満たす解を求めようとしたものである。図 8 と同じようにしても求められるが，ここでは③の解を $xx(t)$，$xx'(t)=xx1(t)$ とおいて，連立方程式 $xx(0)=0,\ xx1(0)=1$ を $@1, @2$ について解くことにより任意定数を求めている。

図 12 は，求めた任意定数の値を式③に代入したときのグラフである。「うなり」が生じていることが分かる。

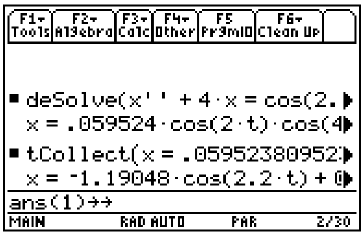

図 10

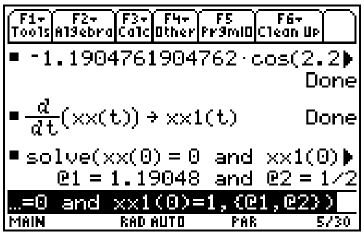

図 11

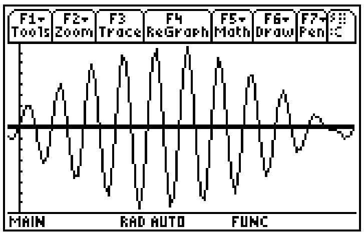

図 12

従来は，このような微分方程式は教師が解き，それをもとに振動の様子も教師が説明していたと思われる。しかし，数式処理電卓を利用すると，そのような微分方程式の解法のみならず，その解をもとにした振動の様子まで学生自身に気づかせることが可能になる。p, ω の値をいろいろ変えさせて実験的に確かめさせ,「うなり」を学生が発見するように仕向けることも可能であろう。

4　おわりに

応用数学と応用物理から一つずつの例を上げた。他にも，応用数学であれば，フーリエ解析，ベクトル解析，複素関数論，微分方程式，確率・統計などでも利用できる。

工学系の専門科目であれば，数学を駆使するさまざまな場面で利用できる。特に，関数のグラフを簡単に確認できるので，工学で現れるいろいろな関数に対する学生の理解が格段に向上することが期待される。工学では，数学の問題にあるような簡単な解ばかりとは限らない。相当繁雑な計算が必要な場合もある。そのような計算部分を数式処理電卓に任せれば，工学の本質部分に思考を集中させることができるだろう。特に，センサーを通して実データを収集でき，その統計的な解析から，数式処理を伴うさらに高度の解析まで行うことができる。これらの機能を駆使すれば，能力の高い学生は自分でどんどん思考を推し進めることが可能になる。反対に，微積の基礎が危ういような学生の場合には，それらの基礎を補うツールとして活用できるであろう。

TI–89 の数式処理能力は，高専や大学工学部での使用にも十分に耐えうるものである。数学教育のみならず，工学教育においても積極的な活用が計られるべきであろう。