

フーリエ級数を目で見るよろこび

梅野 善雄*

一関工業高等専門学校

1 はじめに

工業高等専門学校では、将来の工業技術者をめざす中学卒業生を対象に5年間の一貫教育が行われている。3年では微分方程式や2変数関数の微積分までもが教授され、4年ではフーリエ解析、ラプラス変換、ベクトル解析、複素関数論などの応用数学が教授される。

フーリエ解析の授業でフーリエ級数の収束の様子を理解させるには、黒板に収束の様子を示す図を書きながら説明するか、あるいはあらかじめプリントを用意して配布する等の方法をとるしかなかった。パソコンを教室に持ち込んで画面を見せながら説明することもできるが、それにはプロジェクター等の大がかりな準備が必要となる。パソコン機器の操作に教師が熟達していることも必要であり、容易に誰でもできることではない。

今年度、学生一人一人に数式処理電卓 TI-89 を持たせてフーリエ解析の授業を行うことができた。学生は、自分の求めたフーリエ級数の収束の様子を、即座にグラフで確認することができる。以下では、数式処理電卓をフーリエ解析の授業でどのように利用したかを報告する。

2 授業したクラスの概況

フーリエ解析の授業を行ったのは、高専第4学年の某クラスである。このクラスの所属学科の専門科目は、在学中に必要とされる数学のレベルが他学科の専門科目と比べて比較的軽いといえる。フーリエ解析自体が在学中の専門科目で必要とされることはなく、専門科目(応用物理を除く)で三角関数が現れることすら皆無に近い。三角関数の使用頻度が少ない学科であることもあり、1年で学んだ「三角関数」の理解自体に支障を生じている学生が少なくない。

このような状況にある学生にフーリエ解析を教えるのは、専門科目での使用の有無によらず応用数学として一通りのことは教えておいて欲しいという学科の方針によるものである。

なお、数学の使用頻度の高い他学科では、4年の応用数学の単位は4単位であるが、この学科では4年と5年に2単位ずつに分割して5年の応用数学は選択科目にしている。

*021-8511 一関市萩荘字高梨 一関工業高等専門学校, E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp

3 フーリエ解析の内容

この学科の4年の応用数学(2単位)では、前期にフーリエ解析、後期にはラプラス変換が教授される。授業で使用したのは、以下の教科書(高専用)である。

「応用数学」(大日本図書, 田河成長他著) ISBN4-477-00266-1

第4章 フーリエ級数とフーリエ変換

§1 フーリエ級数

周期 2π のフーリエ級数, 一般の周期関数のフーリエ級数,
フーリエ級数の収束, 複素形フーリエ級数, 偏微分方程式への応用

§2 フーリエ変換

フーリエ変換とフーリエ積分定理, フーリエ変換の性質と公式,
偏微分方程式への応用, いろいろな応用

他学科では、この内容が半期で教授される。この学科ではフーリエ解析の内容が専門科目で使用されることはほとんどないので、あえてフーリエ変換まで進むより三角関数やフーリエ級数の理解を確実なものにすることに力点を置くことにした。

なお、周知のように、周期 $2l$ の関数のフーリエ級数は

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 1)$$

とするとき、次式で定義される。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

4 フーリエ級数の授業

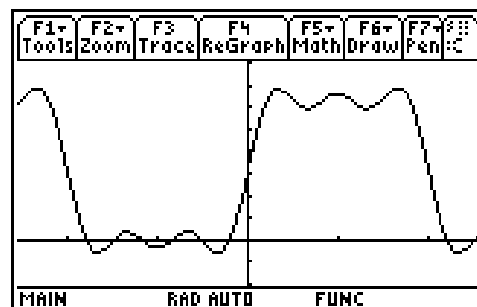
授業は、2時間連続(50分×2)である。最初の時間では数式処理電卓の使い方について説明した。新しい電卓を使った授業ということもあって、計算のさせ方の最初の説明で、 $2 + 3$ ENTER で5が表示されただけで「すごい」とクラスがどよめいたのはご愛嬌であった。

4.1 いろいろな関数

電卓のグラフ機能の練習をかねて、1年で学んだ基本的な関数のグラフを電卓に表示させて、それを描き写す作業をさせた。描き写しやすいようにと思って格子状の座標をかけたプリントを用意したが、格子があるため学生はTRACE機能で正確な座標を求めながら描こうとし、かえって時間がかかってしまう。単に目盛なしの座標軸を描いておくだけでよかったようである。

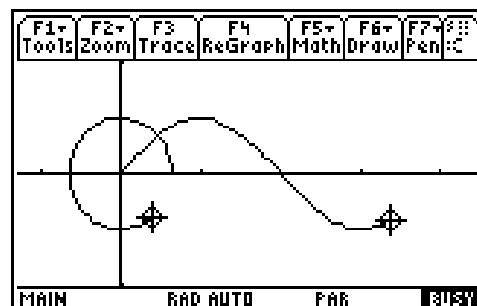
4.2 べき級数

フーリエ級数を理解するには、まず関数を級数で表すことの意義について理解していることが必要である。テイラー展開については高専の3年で学んでいるが、テイラーの定理は学生にとって最も理解しにくい内容の一つである。そこで、まず関数をべき級数で表すことの意義について復習した。特に、TI-89のグラフ機能により収束の様子をグラフ表示したり、具体的な数値計算に有効であることを強調した。そして、これから学ぶフーリエ級数がどのようなものかを具体例で説明し、そのグラフを描かせて収束の様子を観察させた。項数を増やすと時間がかかるのであまり大きくしないように言っても、4年生にもなると中々こちらの言う通りには動かない。数百、数千の項数を指定して「何も表示されません」と言ってくる者もあったが、これから学ぶフーリエ級数の意味をあらかじめ理解させる作業として有効だったと思われる。



4.3 三角関数

フーリエ級数を学ぶには、まず三角関数のいろいろな性質を知っていることが必要である。しかし、このクラスでは、数学・物理以外に三角関数が必要となる場面はほとんどない。そこで、まず単位円を運動する点の x 座標の変化が $\cos x$ であり、 y 座標の変化が $\sin x$ であることをTI-89を利用して確認させようとした。 $\boxed{\text{MODE}}$ で graph を parametric にして $\boxed{\blacklozenge} \boxed{\text{I}}$ で Leading Cursor を ON, Graph Order を SIMUL にして $x1 = \cos(t), y1 = \sin(t), x2 = t, y2 = \sin(t)$ とし、2つのグラフを同時表示させた。動きのあるものなので、クラスにはどよめきがあった。その画面を見ると、 $\sin x$ が単位円を運動する点の y 座標の変化であることは明白である。後で確かめると、成績下位の学生でも $\sin nx$ と $n \sin x$ との違いを理解していた。



次に、3,4番目の関数には t を $2t$ にかえた式を定義させ、 $\sin x$ と $\sin 2x$ の動きの違いを理解させようとした。また、係数を変えさせてそれによるグラフの違いを比較させようとしたが、4個のクロス印が原点を同時に出発するのは、それほど分かりやすい画面ではなかったかもしれない。

4.4 部分積分

フーリエ係数を求めるには、三角関数を含む部分積分の計算ができることが必要である。部分積分については2年で学習済みであるが、4年ではもはや忘却の彼方にある。部分積分の計算の仕方についても復習が必要となる。計算練習のプリントをつくり、数式処

理機能で答の確認をさせた。ただし、整数 n を含む積分の場合は、 $\sin n\pi, \cos n\pi$ などの値は学生が自分で読み替えることが必要となる。

4.5 場合分けされた関数のグラフ

関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考えるとき、 $f(x)$ は定義域により場合分けされた関数であることが多い。しかし、学生はそのような場合分けされた関数について慣れていない。特に何も説明もせずにいると、簡単な関数であっても意外なほど学生はグラフをかけない。そのグラフを電卓で描かせるには、when コマンドを入れ子にしてかなり長い式を打ち込むことが必要になるが、括弧の対応関係等による混乱が予想されたので電卓で描かせることはしていない。

4.6 フーリエ級数

以上の準備を経て、やっとフーリエ級数を求めるさせることになる。計算結果は電卓でグラフを表示させ、収束の様子を観察させた。積分の計算が複雑になるものはやっていないが、フーリエ級数自体への理解は十分得られたのではないかと思われる。中間試験(電卓は不使用)の結果も、極めて良好なものであった。

今後の予定は、関数の連続性や微分可能性とフーリエ級数の収束の仕方の違いに気づかせ、関数が連続であること、あるいは微分可能であることの意味や重要性について触れる予定である。できればギブスの現象についても触れ、不連続点での盛り上がりがある一定値 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \doteq 1.8519$ と関連していることにも気づかせたい。

5 学生の反応

高専の4年生になると授業中に毎時間のように寝ている者もいるが、電卓を操作させた場合には、そのような者は極めて少なかった(残念ながら皆無とは言い難い)。学生はこの電卓を利用した授業を楽しみにしており、授業への参加度は極めて高かったといえる。しかし、電卓の操作から黒板での説明に変わると、途端に机に伏してしまう者もいる。理論面への関心をいかにして持続させるかは、今後の課題である。

6 おわりに

TI-89 は教室の中だけで使用した。グラフ機能と積分機能しか利用していない。積分の計算力が十分ではない者にもフーリエ級数を理解させることができ、ギブスの現象にまで触れることが可能なことは、数式処理電卓の威力を十分に示すものである。この電卓の使用を前提にすると、応用数学の内容は変更が必要になってくるとと思われる。