

# (総説) 球面調和関数による展開とその利用例

梅野 善雄\*

## Spherical Harmonics Expansion and Its Applications

Yoshio UMENO\*

Abstract: Spherical harmonics is originated by solving Laplace's equation in the spherical domains. It forms a complete set of orthogonal functions, thus an orthogonal basis on the surface of a sphere, therefore, the function is used in various fields. Since it contains mathematically difficult content, it is hard to lecture in class. However, this function is considered to be used in a wide range of fields, we need to have an overview of the function.

Keywords: spherical harmonics, Laplacian, associated Legendre function

### 1 はじめに

いろいろな現象の解析において、関数を正規直交性をもつ関数系で展開することはよく行われる手法である。中でもフーリエ解析は、高専や大学工学部の学生にとっては応用範囲の広い必須の学習事項である。

物理・工学では、重要な場面でラプラシアンを含む方程式が現れることがある。また、物体の形状や物体表面上の現象は、原点を適切に定めて球座標  $(r, \theta, \phi)$  で考えると、 $(\theta, \phi)$  方向の関数として捉えられる場合がある。たとえば、重力や地磁気、物体表面の陰影、あるいは人体臓器の形状など多数のものがあげられる。そのような場合の解析手法として、正規直交性を持つ球面調和関数を用いた展開が利用されている。この関数は高専や大学初年次の学習内容には含まれないが、応用上はフーリエ解析と同レベルの重要性がある。

球面調和関数は、ラプラスの方程式  $\Delta\psi = 0$  を球座標に変換するとき、角度成分  $(\theta, \phi)$  が満たす関数であり、ルジャンドル陪関数  $P_l^m(x)$  を用いて次の式で表される。  $l, m$  は  $|m| \leq l$  を満たす整数であり、  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  である。

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

本論では、この球面調和関数の概要と幾つかの利用例を紹介する。この関数を高専や大学初年次の講義で扱うことはないと思われるが、この関数は広範囲な分野で利用されている。大学や高専の数学教員は、ある程度の概要は把握していた方が良いと思われる。

\*一関工業高等専門学校 名誉教授 E-mail: umenoy@yunavi.lsv.jp  
National Institute of Technology, Ichinoseki College, Professor Emeritus

## 2 ラプラスの方程式

### 2.1 ラプラスの方程式と球座標

直交座標において  $\psi$  を  $x, y, z$  の関数とすると、ラプラスの方程式  $\Delta\psi = 0$  は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0 \quad (1)$$

であり、この方程式を満たす関数は調和関数と呼ばれる。また、この演算子はラプラシアンと呼ばれ、波動方程式、熱伝導方程式、シュレディンガー方程式など、多くの重要な方程式がラプラシアンを含む式で記述されている。

ここで、直交座標  $(x, y, z)$  を

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

として球座標に変換すると、ラプラスの方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi = 0 \quad (2)$$

### 2.2 ラプラスの方程式を変数分離する

以下では、(2) を変数分離法で解く場合の概略を述べる [1].

最初に、 $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$  と変数分離すると、(2) は

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) = -\frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi)$$

と変形できる。左辺は  $r$  の関数、右辺は  $(\theta, \phi)$  の関数であるから、これらの式は定数  $\lambda$  であり、次の2つの方程式に分離される。(4) の解  $Y(\theta, \phi)$  が球面調和関数である。

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) = \lambda R(r) \quad (3)$$

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi) = -\lambda Y(\theta, \phi) \quad (4)$$

(3) はオイラー型の微分方程式である。 $r^l$  を解に持つと予測すると、 $\lambda = l(l+1)$  のときに  $R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-l-1}$  ( $l$  は非負整数) の形の解を持つことが容易に分かる。

次に、 $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$  として  $Y(\theta, \phi)$  を変数分離すると、(4) は

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta(\theta) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(\phi)$$

と変形できる。左辺は  $\theta$  の関数、右辺は  $\phi$  の関数であるので、これらの式も定数  $\nu$  である。これにより、 $\theta, \phi$  に関する2つの微分方程式が得られる。

$$\left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta \right] \Theta(\theta) = \nu \Theta(\theta) \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) = -\nu \Phi(\phi) \quad (6)$$

### 2.3 $\Phi(\phi)$ を求める

最初に (6) を解く. 球座標での  $\phi$  の周期性から,  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$  が成り立つので,  $\nu = m^2 > 0$  であり  $m$  は整数であることが分かる. そこで, 解を  $\Phi(\phi) = Ae^{im\phi}$  で考え,  $\int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 d\phi = 1$  として規格化することで, (6) の解  $\Phi_m(\phi)$  は次式で表される.

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (m \text{ は整数}) \quad (7)$$

係数の定め方から, この関数には次のような正規直交性がある. なお,  $\Phi_m^*$  は  $\Phi_m$  の複素共役であり,  $\delta$  はクロネッカーのデルタである.

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m(\phi) \Phi_{m'}^*(\phi) d\phi = \delta_{mm'}$$

### 2.4 $\Theta(\theta)$ を求める

次に, (5) を  $w = \cos \theta$  とおいて変数変換する. これまでのことから  $\lambda = l(l+1)$ ,  $\nu = m^2$  であるので, 変換した方程式は

$$(1-w^2) \frac{d^2\Theta}{dw^2} - 2w \frac{d\Theta}{dw} + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-w^2} \right) \Theta = 0$$

となる. この方程式は,  $m = 0$  のときはルジャンドル方程式,  $m \neq 0$  のときはルジャンドル培方程式と呼ばれる. ルジャンドル培方程式の解を級数解で検討すると,  $l, m$  が  $|m| \leq l$  を満たす整数のときに  $[-1, 1]$  での解を持つことが導かれ, 次のような関数で表される.

$$P_l^m(w) = (1-w^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{dw^{m+l}} (w^2-1)^l \quad (8)$$

$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2-1)^l$  はルジャンドル多項式である. 関数  $P_l^m(w)$  はルジャンドル培関数と呼ばれ, 次のような性質を持つ.

$$P_l^{-m}(w) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(w) \quad (9)$$

さらに,  $l$  に関して次の関係も成り立つ.

$$\int_{-1}^1 P_l^m(w) P_l^m(w) dw = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll} \quad (10)$$

ここで,  $P_l^m(w)$  に  $\sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$  を掛けた関数を考えると, (10) により  $l$  に関して正規直交性を持つ. そこで, 変数変換を元に戻して (5) の解を次の式で考える.

$$\Theta_l^m(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \quad (11)$$

## 2.5 球座標でのラプラスの方程式の解

以上のことから, (2) の解は次の式で表される. 角度成分  $(\theta, \phi)$  に関する  $Y_l^m(\theta, \phi) = \Theta_l^m(\theta)\Phi_m(\phi)$  が球面調和関数である. それは, (2) を球面上で考えたときの解でもある.

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= R_l(r)\Theta_l^m(\theta)\Phi_m(\phi) \\ &= (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}\end{aligned}$$

## 3 球面調和関数とその性質

### 3.1 球面調和関数の定義

ルジャンドル培関数の性質 (9) を利用すると,  $Y_l^m(\theta, \phi)$  に関して

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{-im\phi}$$

が成り立ち,  $(-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi) = Y_l^{m*}(\theta, \phi)$  となる. この性質を偶奇性という.  $Y_l^{m*}$  は  $Y_l^m$  の複素共役である.  $m$  の符号により  $Y_l^m$  の表現が微妙に異なるので, 符号によらない統一的な表現として, 球面調和関数を次のように定める.

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (12)$$

### 3.2 球面調和関数の性質

球面調和関数には次のような性質がある. 下記では,  $Y_l^m$  を  $Y_{lm}$  と表す.

(1) 正規直交性がある.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

(2) 球面上の任意の 2 乗可積分な関数  $f(\theta, \phi)$  を,  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  で展開することができる.

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

ここで,  $a_{lm}$  は次式により定められる.

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

(3) 2つの単位ベクトル  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  のなす角を  $\theta'$  とし,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  の単位球面上の座標をそれぞれ  $(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2)$  とすると, 次の式が成り立つ. 球面調和関数の加法定理という.

$$P_l(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = P_l(\cos\theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2)$$

(4)  $m$  に関する和に関して次の式が成り立つ. ウンゼルトの定理という.

$$\sum_{m=-l}^l |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

### 3.3 実球面調和関数

球面調和関数の符号は,  $m \leq 0$  のときは 1,  $m > 0$  のときは  $(-1)^m$  である. そこで, 球面調和関数を次のような実関数で定義することもできる.

$$y_l^m(\theta, \phi) = \begin{cases} \frac{(-1)^m Y_l^m + Y_l^{-m}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \operatorname{Re}((-1)^m Y_l^m) & (m > 0) \\ \frac{(-1)^{|m|} Y_l^{|m|} - Y_l^{-|m|}}{\sqrt{2}i} = \sqrt{2} \operatorname{Im}((-1)^{|m|} Y_l^{|m|}) & (m < 0) \\ Y_l^m & (m = 0) \end{cases} \quad (13)$$

下図は,  $0 \leq l \leq 4$  の場合について, 実球面調和関数の絶対値  $|y_l^m|$  のグラフである.  $l$  の値が増えるにつれ突起の数が増え,  $m$  の値に応じて突起の方向が変化することが分かる. 右上の球は,  $y_l^m$  の値を球面上の濃淡として表した場合である.

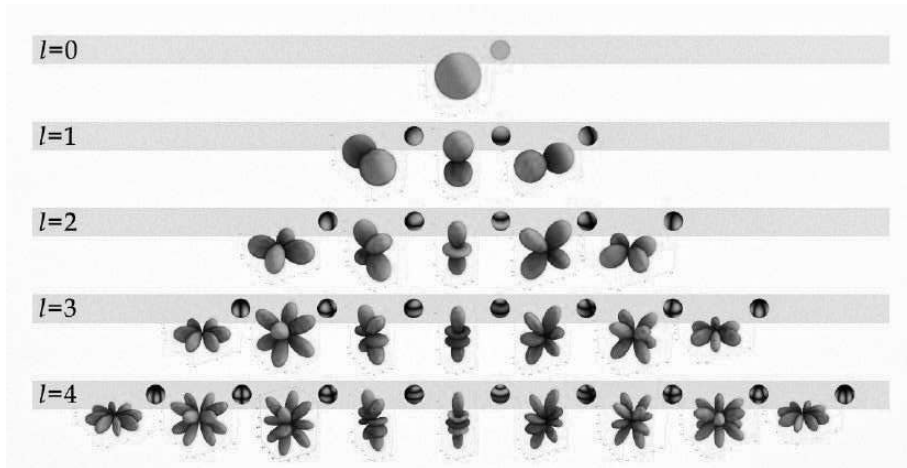


図 1: 実球面調和関数の絶対値  $|y_l^m|$  のグラフ ([2] からの転載)

(13) の右辺は,  $m \geq 0$  に対して  $P_l(\cos \theta)$ ,  $P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi$ ,  $P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi$  からなる. これらは互いに直交するので, 球面上の関数  $f(\theta, \phi)$  を次のように展開する場合もある.

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (a_{lm} \cos m\phi + b_{lm} \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta) \quad (14)$$

$$\begin{cases} a_{lm} = \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi \sin \theta d\theta d\phi \\ b_{lm} = \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi \sin \theta d\theta d\phi \end{cases}$$

ただし,  $a_{l0}$  の分母の  $2\pi$  は  $4\pi$  で置き換えるものとする.

### 3.4 幾つかの具体例

以下に,  $l, m$  が具体的な値を取る場合の  $Y_l^m(\theta, \phi)$  の式を示す.  $|m| \leq l$  であるので, 同じ  $l$  に対して  $m$  は  $2l + 1$  個の異なる値を取る.

表 1: 球面調和関数の具体例

$Y_l^m$	$Y_0^m$	$Y_1^m$	$Y_2^m$
$m = -2$			$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{-2i\phi} \sin^2 \theta$
$m = -1$		$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-i\phi} \sin \theta$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{-i\phi} \sin \theta \cos \theta$
$m = 0$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$m = 1$		$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\phi} \sin \theta$	$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta$
$m = 2$			$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta$

### 3.5 体球調和関数と球面調和関数

直交座標において, ラプラスの方程式 (1) を満たす同次多項式を  $\psi(x, y, z)$  とし, 定数  $k$  に対して  $\psi(kx, ky, kz) = k^n \psi(x, y, z)$  であるとする. このような多項式を,  $n$  次の体球調和関数という.  $n$  次の体球調和関数  $\psi$  を球座標に変換すると,  $\psi(r, \theta, \phi) = r^n f(\theta, \phi)$  の形になる. これを (2) に代入すると, 第 1 項は

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi = 2n\psi + n(n-1)\psi = n(n+1)\psi$$

となるから,  $f(\theta, \phi)$  は

$$\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f(\theta, \phi) = -n(n+1)f(\theta, \phi)$$

を満たす. つまり,  $f(\theta, \phi)$  は固有値が  $-n(n+1)$  の球面調和関数である.

逆に, 球面調和関数  $Y_n^m(\theta, \phi)$  に  $r^n$  を掛けて  $\psi(r, \theta, \phi) = r^n Y_n^m(\theta, \phi)$  を考えると,  $\psi$  は (2) を満たすので  $n$  次の体球調和関数である.

したがって, 球面調和関数  $Y_n^m(\theta, \phi)$  は, 直交座標ではラプラスの方程式を満たす  $n$  次の同次多項式である. たとえば,  $Y_2^2$  に  $r^2$  を掛けると, 次のように  $x, y$  の同次式になる.

$$\begin{aligned} r^2 Y_2^2 &= r^2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\cos 2\phi + i \sin 2\phi) \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (x^2 - y^2 + 2ixy) \end{aligned}$$

## 4 球面調和関数の利用例

球面調和関数による展開は、球面上の関数に対するフーリエ級数展開ともいえるものであり多くの分野で利用されている。大きく分けると、ラプラシアンを含む方程式の解として、球面上の関数の展開式として、いろいろな方向からくる情報の表現手段として、そして物体の形状表現や情報の圧縮手段として利用されているように思われる。

### 4.1 ラプラシアンを含む方程式の解としての利用

ラプラシアンを含む方程式では必然的に球面調和関数が現れてくる。今、水素原子の原子核を原点として回っている電子の質量を  $m$ 、全エネルギーを  $E$ 、ポテンシャルエネルギーを  $V$ 、そして波動関数を  $\psi$  とする。 $|\psi|^2$  は電子の存在確率を表す確率密度関数である。この  $\psi$  は、次のようなシュレディンガー方程式を満たしている [1]。 $\hbar$  はディラック定数である。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + V\psi = E\psi$$

シュレディンガー方程式を球座標に変換すると、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi + V\psi = E\psi$$

となる。  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$  として変数分離すると、 $\lambda, \nu$  を定数として次の3つの方程式に分離される。

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] R(r) &= \lambda R(r) \\ \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta \right] \Theta(\theta) &= \nu \Theta(\theta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi(\phi) &= -\nu \Phi(\phi) \end{aligned}$$

このうち、 $\theta, \phi$  に関する方程式は (5), (6) と同一であるので、シュレディンガー方程式の解は球面調和関数を含む形で記述され、

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

となる。  $R_{nl}(r)$  はラゲール培関数を含む式で表される。  $n, l, m$  は物理的な量と対応しており、  $n$  は主量子数、  $l$  は軌道角運動量子数、そして  $m$  は磁気量子数である。

シュレディンガー方程式に限らず、ラプラシアンを含む方程式を球座標で扱う必要のある分野では、球面調和関数は必須の関数になっている。

### 4.2 球面上の関数の展開式としての利用

地球内部の物質の密度分布は一様ではなく形状も完全球ではないため、地球の重力場は複雑である。地心からの距離を  $r$ 、緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$  における重力ポテンシャル  $U$  は、球面調和関数を用いて

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda)$$

の形で表せる [3]. ここでは,  $P_{nm}(\sin \phi)$  による展開になる.  $G, M, R$  は, それぞれ万有引力定数, 地球の質量, そして赤道半径である. 地球潮汐や海洋潮汐などは重力場係数の変動として現れる. 特に, 係数  $C_{20}, C_{30}$  の摂動は人工衛星の軌道にも影響を与えるようである. 気温・気圧等のいろいろな気象要素も, 球面調和関数による展開式で表されている [4].

### 4.3 あらゆる方向からの情報を表現するための利用

球面調和関数は, 3次元CGや音響の分野など, いろいろな方向からの情報処理が必要な分野でも利用されている.

図2は, 左端の物体に関する情報を球面調和関数で展開して,  $l$  の値 (図2の  $n$ ) を増やすことで突起部分が再現されていく様子が示されている [2]. 左端の物体を表示するには相当の情報量が必要と思われるが, その情報をもとに球面調和関数で展開すると,  $l = 10$  までの展開で右端の図が表示される. この場合は,  $11^2 = 121$  個の係数ですむ.

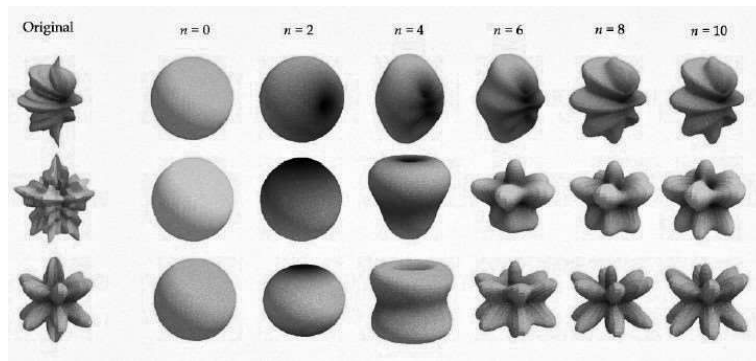


図2: CGでの利用例 ([2]からの転載)

また, スピーカーが配置された空間において, 点  $(x, y, z)$  で時刻  $t$  での音圧を  $p(x, y, z, t)$  とすると,  $p(x, y, z, t)$  は  $c$  を音速として次の波動方程式を満たす [5].

$$\Delta p(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, y, z, t)$$

球座標で考えて,  $p(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)e^{i\omega t}$  として変数分離すると, 音源が半径  $r$  より外側にある場合と内側にある場合の解を球面調和関数を用いて表すことができる.

音源が半径  $r$  の外側にある場合に, 内部の音場を表す解は,

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm}(\omega) j_n(k_r r) Y_n^m(\theta, \phi)$$

である. 一方, 音源が半径  $r$  の内側にある場合に, 外側の音場を表現する解は

$$p(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}(\omega) h_n^{(2)}(k_r r) Y_n^m(\theta, \phi)$$



である。  $C_{nm}(\omega), A_{nm}(\omega)$  は展開係数で、  $j_n(k_r r)$  は球ベッセル関数、  $h_n^{(2)}(k_r r)$  は第二種球ハンケル関数である。

宇宙論の宇宙マイクロ波背景輻射でも、球面調和関数による展開が利用されている [6]。

#### 4.4 物体の形状表現や情報の圧縮手段としての利用

人体内部の臓器形状は CT により知ることができる。コンピュータ上での再現のために、臓器表面を 3 角メッシュに分割して座標データを収集すると膨大なデータ量が必要となる。データを収集しても、患者相互の比較を行う対応点を設置しにくいという問題がある [7]。

そこで、臓器の表面を臓器の重心からの距離と角度で表現すると、重心の位置合わせと回転だけで相互比較が可能となる。いま、  $(\theta, \phi)$  での距離を  $R_{\theta, \phi}$  として、角  $\theta, \phi$  の分割数をそれぞれ  $n, m$  とすると、臓器 (実際には脾臓) の形状データは  $R_{\theta, \phi}$  を成分とする  $n \times m$  型の行列で表現される。5 度間隔では  $36 \times 72 = 2522$  個の点のデータを取っていることになる。

臓器が球形状でないときに  $(\theta, \phi)$  方向に複数点に対応する場合は、CALD(Control of Area and Length Distortions) パラメトリゼーション法という手法でデータ補正を行う。そして、その補正データを  $R_{\theta, \phi}$  として

$$R_{\theta, \phi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}$$

により球面調和関数により展開する。係数  $a_{lm}$  は、

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_{\theta, \phi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

を計算することで得られる。  $l$  の最大数を  $L$  とすると、

$$\hat{R}_{\theta, \phi} = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}$$

により形状を近似的に再現することができる。図 3 では、  $l$  を増やすごとの形状復元の様子が示されている。  $L = 15$  の場合の復元率は 97.0% であったようである。

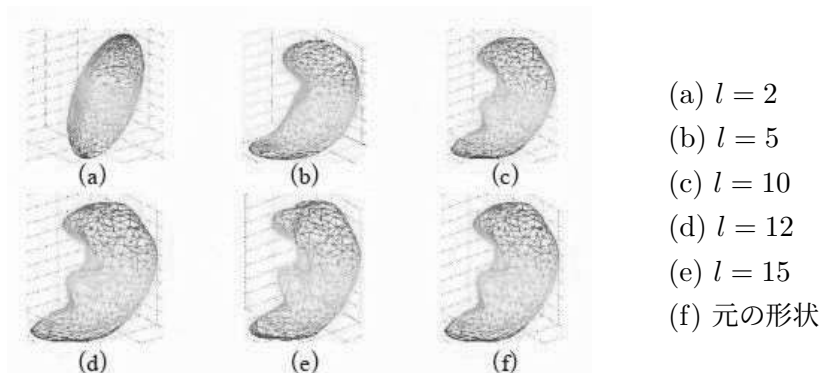


図 3: 球面調和関数による臓器形状の復元 ([7] からの転載)

復元に必要なデータは係数の  $\{a_{lm}\}$  だけである。その個数は  $\sum_{l=0}^L (2l+1) = (L+1)^2$  ですみ、3角メッシュで分割した座標データよりも少なくすむ。  $L = 15$  のときのパラメータ数は  $16^2 = 256$  個である。球座標の場合のデータ数は 2522 個であるので、圧縮率は  $256/2522 = 0.102$  であり、形状復元のために必要なデータを大幅に圧縮することができる。

臓器の形状表現ばかりではなく、3次元 CAD における各種部品の投影画像についても、それを球面調和関数を利用して展開することで、画像表示に必要とする情報や計算量を大幅に削減することができるようである [8]。また、球状の物体の形状評価で利用される場合もある。たとえば、小さくは綱球の形状 [9]、大きくは惑星や恒星の摂動に関する研究でも利用されている [10]。

## 5 おわりに

球面調和関数は高専や大学初年次の数学で扱うには難度が高すぎるが、量子力学ばかりではなくラプラシアンを含む方程式を扱ういろいろな分野で広く利用されている。球面調和関数で展開することで、あらゆる方向からくる情報を近似的に表現することができ、そのために必要となるデータ量を展開の係数値に圧縮することができる。このことが、この関数が広く利用されている理由のように思われる。

球面調和関数が、球面上の関数に対するフーリエ解析として広範囲な分野で利用されていることは、数学教員としては認識しておく必要がある。CG などに関心を持つ学生には、この関数の概要やそれを理解するための数学の重要性を伝えておくことも必要と思われる。

## 参考文献

- [1] 原康夫：岩波基礎物理学シリーズ 5 量子力学，岩波書店，1994
- [2] Robin Green: Spherical Harmonics Lighting: The Gritty Details  
[URL] <https://theory.cpe.ku.ac.th/~pramook/files/>
- [3] 久保岡俊宏：やさしい軌道力学—人工衛星に作用する摂動—，研究集会「地球の「流れ」を見る衛星重力ミッション」，東京大学地震研究所，2004.11
- [4] 田中博・朴泰祐・佐藤正樹：大気大循環モデル力学コアの変遷について，ながれ，第 29 巻，2010
- [5] 羽田陽一：音の端数領域信号処理，IEICE Fundamentals Review 11(4)，2018
- [6] 白石希典：初期宇宙への新たな窓— CMB スカラー，ベクトル，テンソルバイスペクトル，天文月報，第 106 巻，第 3 号，2013
- [7] 健山智子・陳延偉：球面調和関数による三次元臓器モデリングと可視化への応用，Med Imag Tech 33(2)，2015
- [8] 長山大輔・片山薫：球面調和関数を用いた部品配置の異なる 3 次元アセンブリモデルの検索，DEIM Forum 2019 G6-1
- [9] 糸魚川文広・中村隆・船橋鉦一：球面調和関数を用いた綱球の三次元幾何形状評価，日本機械学会論文集 (C 編)，58 巻，551 号，1992
- [10] 柴橋博資：日震学・太陽振動と太陽内部構造，日本物理学会誌，Vol.43，No.9，1998