スマホで利用可能な数式処理ツールを活用した数学教育

梅野　善雄 *

Mathematical Education Utilizing CAS Available in a Smartphone

UMENO Yoshio*

Abstract: Recently, as smartphone has become popular in these days, most students have their own one. As a free application of the smartphone has been common, we can install the application that has an ability of CAS. In this paper, we assume that how students could use their smartphones installed CAS application then we shall consider the educational affects utilizing its application referring the effects of utilizing graphing calculators.

Keywords: smartphone, CAS, mathematical education

1．はじめに

パソコンで利用可能な数式処理ソフトとしては，Mathemathica や Maple などが定番のソフトといえるが，高機能で本格的な数式処理システムであるため，教育機関向けの製品でもかなりの出費を覚悟する必要がある．

一方，近年，パソコンはタブレット端末にまで小型化されて高機能化している．さらに，パソコンと携帯電話を合体させたようなスマートフォン (以下,「スマホ」という) は，家庭によっては小学生や幼児にまで持たせており，中学生や高校生以上では個人所有が当たり前になりつつある．しかし，彼らの利用状況をみると，その多くはゲームや SNS(ソーシャル・ネットワーキング・サービス) としての利用であることが多い．スマホを手放せなくなるスマホ依存症も問題になってきている．

しかし，その機能は年々向上して使用できるアプリの数も増加の一途を辿っており，学習に有用なアプリも多数登録されている．そのようなアプリの一つに数式処理システムがある．その機能は本格的であり，Mathmatica や Maple と遜色がないレベルのものもある．

廉価な数式処理システムとしてはグラフ電卓があるが，それを必要とする場合は新規に購入する必要がある．スマホを所持している場合は，単にそのアプリをダウンロードするだけでよい．無料または廉価でダウンロードすることができる．学校教育現場でのスマホ利用は種々の問題があって敬遠されがちであるが，個人で簡単に数式処理を利用できる環境を構築できるのであれば，数学教育の観点では，むしろ積極的にそのアプリを活用することを考えるべきであると考える．

そこで，ここでは，スマホで利用可能な数式処理システムとして，長い歴史のある「Maxima」を取り上げる．そして，その概要を紹介するとともに，数学教育における活用の仕方や想定される教育効果について，グラフ電卓の活用例をもとに考察する．

*一関工業高等専門学校・名誉教授　National Institute of Technology, Ichinoseki College

2. 数式処理システム「Maxima」の概要

2.1 Maxima の歴史

Maxima は，米国のエネルギー省 (DOE) や航空宇宙局 (NASA) 等の資金協力のもとで，マサチューセッツ工科大学 (MIT) で 1968 年から 1982 年にかけて開発された Macsyma がもとになっている．非常に高性能な数式処理システムとして高名であったが，次第に後発の Mathematica や Maple に市場を奪われるようになった．

そのソースコードは，1982 年に MIT より米国のエネルギー省に引き渡され，1998 年には GNU Public License の下でオープンソースとして公開された．そして，Texas 大学の William Shelter 教授により GNU Common Lisp に移植されて公開されたのが Maxima である．複数の OS 上で動き，Linux, Windows, MacOS 版がある．2012 年には，日本人により Android 版もリリースされた．iOS 版はまだ出ていない[†]．

Android 版は Google play に登録されている．他の OS 版は下記のサイトからダウンロードすることができ，いずれも無料で利用できる．

[URL]　`http://sourceforge.net/projects/maxima/files/`

2.2 機能の概要

Maxima は，Mathematica や Maple と同等の機能を持つ数式処理システムである．Maxima の機能を説明することは「数式処理」全般を説明することと同義であるので，ここでは幾つかの主要なコマンドを提示するに留める．

(1) 文：

文字への値の代入は，: による．a に 5 を代入するには，$a:5$ とする。

関数の定義は，:= による．$f(x) = \sin x$ の定義は，$f(x) := \sin(x)$ とする．

変数の消去は，remvalue( ) とする．a の消去は，remvalue(a) とする。

関数の消去は，remfunction( ) とする．$f(x)$ の消去は，remfunction(f) とする．

仮定をおくには，assume( ) とする．$a > 0$ を仮定するには，assume($a > 0$) とする．

(2) 定数：

定数	π	e	i	黄金比	∞
コマンド	%pi	%e	%i	%phi	inf

(3) 関数：

関数	$\sqrt{\ }$	exp( )	$\log_e($)	sin( )	arcsin( )
コマンド	sqrt( )	exp( )	log( )	sin( )	asin( )

(4) 式の計算：

計算	展開	因数分解	簡約化	通分
コマンド	expand( )	factor( )	ratsimp( )	xthru( )

方程式 $f(x) = 0$ を解くには，solve($f(x) = 0, x$) とする．連立方程式 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ は，solve($[f(x, y) = 0, g(x, y) = 0], [x, y]$) とする．

[†]iOS で利用できる CAS としては，PocketCAS，Mathstudio がある．

(5) 微分積分：

$f(x)$ の $x \to a+0$ のときの極限値は，limit$(f(x), x, a, \mathrm{plus})$ とする．

$f(x, y)$ を x で n 回微分するには，diff$(f(x, y), x, n)$ とする．

$f(x)$ の x に関する原始関数は，integrate$(f(x), x)$ とする．

$f(x)$ の x に関する a から b までの定積分は，integrate$(f(x), x, a, b)$ とする．

$f(x)$ を $x = a$ の箇所で n 次までテイラー展開するには，taylor$(f(x), x, a, n)$ とする．

(6) グラフ描画：

$y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ のグラフを描画するには，plot2d$(f(x), [x, a, b])$ とする．

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは，plot3d$(f(x, y), [x, a, b], [y, c, d])$ などとする．

媒介変数も利用できる．球座標や円柱座標を利用することもできる．

以上，教育現場の通常の諸計算で利用しそうなコマンドを挙げた．線形代数，微分方程式，ラプラス変換，フーリエ解析に関するコマンドもある．もともと数学や工学の諸研究のために開発されたものであるので，数論や群論などの専門研究に関する機能もある．特定分野に関する機能はパッケージとして用意され，それを読み込む (load) ことで利用可能になる．グラフ理論や金融関係の計算など，多数のパッケージがある．

2.3 スマホへのインストールと画面例

Android 系のスマホにインストールするには，アプリの登録サイト「Google play」で「MaximaOnAndroid」を検索してインストールするだけである．インストールすると同名のアイコンが表示されるので，それをタップすれば Maxima が起動する．最下行で必要なコマンドを打ち込んで「Enter」をタップすれば結果が表示される．

次頁に，起動時の初期画面と微分方程式の解法例 (図 1)，そしてグラフの描画例 (図 2) を挙げる．実際の画面を貼り付けるとフォントがつぶれて明瞭には読み取れないので，ここでは同じ画面を TEX で再現した．

起動した初期画面では，最初にバージョンと Android 版の開発者の氏名があり，MathJax や Gnuplot が利用されることなどが述べられている．スマホ画面での数式出力は MathJax を利用した出力になる．MathJax は，TEX の数式表示を Javascript を利用して Web 上に表示するためのライブラリーである．

PC 版の Maxima では主要なコマンドをメニューから選択指定できるが，スマホ版ではそのような仕様にはなっていない．おそらくは，画面サイズの制約のためと思われる．そのため個々のコマンドを自分で打ち込む必要があり，若干の煩わしさがある．初めて利用する場合は，主要なコマンド名のリストを見ながら打ち込むことになると思われる．Maxima の使い方を解説する Web サイトは多数あるので，あらかじめ PC を利用して印刷しておいた方がよい．以下に，幾つかの参考サイトを記す．(1) は Maxima の公式マニュアルであり，(2) は Android 版開発者のサイト，そして (3) は 1 千頁以上の解説書である．

(1)	Maxima 5.36.1 Manual：	http://maxima.osdn.jp/maxima.html
(2)	Maxima で綴る数学の旅：	http://maxima.hatenablog.jp/
(3)	はじめての Maxima：	http://fe.math.kobe-u.ac.jp/MathLibre-doc/ponpoko/MaximaBook.pdf

Maxima on Android2.8 June 13th, 2015
(before JB MRI)
written by Yasuaki Honda,
powered by MathJax2.1 for math rendering
powered by Gnuplot4.6for graph drawing

Use menu for about MoA/quit/man/redraw graph
You can touch previous commands for reuse, like input history.
You can touch manual examples to execute them in Maxima.

Maxima5.36.1
http://maxima.souceforge.net
using Lisp ECL 12.12.1
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING
Dedicated to th memory of William Scheleter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) eq:m*diff(x(t),t,2)=-k*x(t);

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)=-kx(t)$$

(%i2) ode2(eq,x(t),t);

$$\text{IS } km \text{ positive, negative or zero?}$$

positive;

$$x(t)=\%k_1\sin\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)+\%k_2\cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}\right)$$

(%i3) ENTER

図 1：起動時の画面と微分方程式の解法

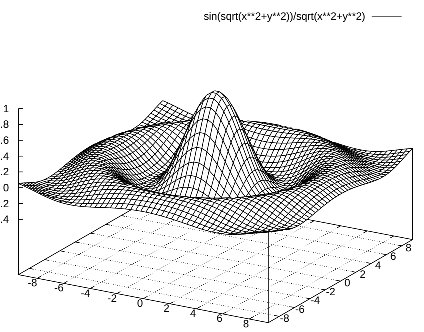

図 2：グラフ描画 (メキシカンハット)

コマンドの入力は画面の最下行の下線の部分で行い，ENTER をタップすると結果が表示される．PC 版では，最初の結果は左端に (%o1) が表示された後に出力されるが，Android 版では結果出力の際に (%o1) は表示されない．しかし，入力や出力の内容は，k を通し番号として%ik, %ok などにより事後に参照することができる．

図 1 では，初期画面の後で 2 階線形微分方程式を解かせている．最初に (%i1) で微分方程式を eq として定義する．(%i2) で ode2(eq,x(t),t) により解を求めるが，途中で km の符号を問われる．正であることを伝えると解が表示される．

図 2 は，3 次元空間の図形を表示させる plot3d を利用して，メキシカンハットを描いたものである．具体的には，$f(x,y)$ に式を定義しておいて

plot3d(f(x,y), [x, –3*%pi, 3*%pi], [y, –3*%pi, 3*%pi], [grid, 50, 50]);

とすると，画面が切り替わり図 2 のグラフが表示される．

3. 数式処理を活用することに対する学生の意識

数式処理機能を利用すると，途中の計算過程は表示されないが，計算結果やいろいろな関数のグラフは即座に出力される．このような数式処理機能を学生に利用させると,「学生が考えなくなるのではないか？」という意見が必ず寄せられる．それは，種々の計算問題を自分で考えることをせずに，数式処理ツールの出力結果をそのまま書き写してしまうのではないか，という危惧によるもののようである．

著者は，数学の授業で長年にわたり数式処理機能を持つグラフ電卓を活用してきた．価格等の理由から個人購入させることはできなかったので，1 学年分のグラフ電卓を数年かけて校費で購入し，それを学生に 1 年間無償貸与することで授業を行った．それにより，学生は授業のときのみならず，授業外の時間でも自由に使用することができる．学生の使用状況を見ていると，各種の計算問題においてグラフ電卓の表示する結果を丸写しするような学生は皆無であった．どの学生も，自分の計算結果やグラフを確認するために利用していた.「数式処理機能を使わせると学生が考えなくなる」というのは，全くの杞憂である．

グラフ電卓を貸与した著者の高専 1・2 年生に対する授業実践では，グラフ電卓を利用することにより,「復習するとき便利だ」「数学の理解がさらに深められる」「数学が前より分かるようになった」「グラフを理解する上で役に立つ」等の回答が得られている [1, 2, 3]．

この回答を数学の成績別にみると，成績の上下によらず「(グラフ電卓を使う) 授業はおもしろい」と感じている．さらに，成績上位の学生は理論的なことへの関心が増しているのに対し，成績下位の学生は「難しそうな計算も自分でやってみようという気持ちになる」としており，数学の成績の上位と下位で異なる効果がみられる [1]．さらには，数学の成績が下位にある学生ほど「数学が分かるようになった」「数学上の疑問をすぐに解決してくれる」などとしてグラフ電卓の使用頻度が高いという結果も得られている [2]．以下に，これら成績下位にある学生達の具体的な感想を紹介する．

- 数ナビ [‡] があると，自分で答え合わせができるので便利．
- 数ナビを使って，分からないところが分かるようになってきた．
- 数ナビを使うことで，普通の授業のときよりもよく理解できました．
- 数ナビは使いこなすまでに少し時間がかかるが，使いこなせるようになれば数学の能力が上がるので，もっと授業で取り入れるようにして欲しい．

いずれも，成績が最下層に区分される学生達の感想である．一般に，分からないときに質問に来る学生は極めて少数である．特に，成績が下位にあれば，疑問に思う箇所を自分で考えて分かるはずもなく，かといって教師に質問するわけでもない．結局は，そのまま放置して「分からない」部分を増大させてしまう場合が多いと考えられる．しかし，手元に数式処理のできるツールがあると，教師に質問しなくても計算結果がすぐに分かり，自分では描けない関数のグラフを表示させることもできる．上記の学生達は，数ナビの出力結果を見ることで，理解に向けた自分なりの気づきを得ることができたのではないかと考えられる．

以上のことは，数式処理機能を持つグラフ電卓を，最大でも 1 年間貸与した場合の結果で

[‡] 数式処理のできるグラフ電卓は数学上の「思考のツール」として使用できることから，このような機器を「数学ナビゲータ」(略して「数ナビ」) と呼ぶことが石川高専の阿蘇和寿教授により提唱された．著者もその呼称に賛同し，学生にはグラフ電卓のことを「数ナビ」と呼ばせた．

ある．個人所有して継続使用した場合は，さらに大きな効果が期待される．そして，グラフ電卓が無くてもスマホを所持していれば，無料の数式処理アプリ Maxima On Android をインストールすることで，Mathematica や Maple と同等の数式処理機能を得ることができる．自分の自由な時間での継続使用が可能になり，その使い方を上手く導いていけば，数学教育において大きな教育効果が得られるのではないかと期待される．

4. スマホにおける数式処理機能の利用

この節では，スマホに数式処理ツールをインストールさせて実際に使用する場合，どのような使用のさせ方があるかを考察する．著者のこれまでの実践経験から考えると，数学教育における数式処理機能の利用の仕方には，次の 4 つの場面があるのではないかと考える．

(1) 問題の答え合わせとしての利用
(2) 数学的性質を理解させるための利用
(3) 数学的性質を発見させるための利用
(4) 数学的思考を援助するための利用

4.1 問題の答え合わせとしての利用

数式処理を利用すると，いろいろな計算問題は該当するコマンドに式を入力するだけで結果が出力される．文字係数であってもかまわない．結果出力の容易さが,「学生が考えなくなる」という誤解を招く元になっていると思われるが，試験の時に使用できないことに気づけば，学生は自ずと安易な使い方はしなくなる．

「答え合わせ」という単純な使い方ではあっても，この利用の仕方は学生にとっては非常に貴重なものである．たとえば，式の計算や方程式の解法で正解が提示されていない問題を解くときに，数式処理を利用すると学生は自分の結果が正しいかどうかを自分で確認することができる．間違っているときは，途中計算がどこまで正しいかを確認することもできる．逆に，正解の式の形をみることで，どのように計算すべきかのヒントが得られる場合もある．

関数のグラフは苦手意識を持つ学生が多いが，数式処理ツールはグラフ描画機能も持つ．関数の式を入力すれば即座にグラフが表示されるので，学生は自分の考えたグラフと一致するかどうかを簡単に確認できる．関数の式を何度も入力して多数のグラフを見ることで，関数の式とグラフの形との対応関係に自然に気づいていく効果も期待される．

以上は単なる答え合わせとしての利用であるが，学生に対する効果は非常に大きいものがある．学生は，何を計算するとどのようになるかを，多少複雑な計算であっても，教師に質問しなくても自分で確認することができるのである．関数のグラフも，どのようなグラフになるかを自分で簡単に確認できる．前節で紹介した学生の感想にも見られるように，特に成績が下位にある学生や数学を苦手とする学生達にとって，これらの機能は数学が分かるためのツールとして「天の救い」ともいえるほどの効果があるのではないかと考える．

通常の数学の授業では，その時間に解かせる問題の種類は限られるので，使用する数式処理のコマンドも限られる．したがって，数式処理機能の利用を認める場合は，教師はその時間で必要なコマンドの使い方だけを説明すれば良い．学生はそのコマンドをいちいち入力する必要があるが，限られた幾つかのコマンドだけであるので，使い方に関して混乱することは少ないと考える．

4.2 数学的性質を理解させるための利用

新しい定理や公式を説明するとき，最初は黒板を利用した式の変形やグラフによる直感的な理解を含めながらの説明をして，教師は定理や公式の妥当性を学生に納得させようとする．そして，その後は，多数の問題演習により理解の定着を図り，ある程度の問題が解けるようになれば，次の項目に進むことになる．

しかし,「問題が解ける」ことと,「内容を理解している」ということとは，必ずしも一致するわけではない．たとえば，微分の計算ができても，単なる公式を利用した機械的な計算である場合が多く，微分して得られた関数が元の関数に対してどのような意味を持つものなのかは理解しないまま計算している場合が多いのではないだろうか．かといって，計算の都度その意味を説明していては，授業進度の上で大きな支障が生じる．

そのような場合には，数式処理を利用させて意味を確認しながら計算を行うように仕向けてもよい．たとえば，何らかの計算を行わさせて数式処理ツールを利用して答え合わせをさせた後に，今度はその計算の意味を確認させるために逆の計算をさせることが考えられる．たとえば，次のような場面がある．

- 方程式の解を求めた後に，その方程式に代入して解であることを確認させる．
  あるいは，その解がグラフと x 軸との交点の座標であることを確認させる．
- 導関数を求めた後に，元の関数と導関数のグラフを描いて相互の関連性を確認させる．
- 近似式を求めた後に，元の関数と近似式のグラフを描いて近似の状況を確認させる．
- 不定積分を求めた後に，それを微分すると元に戻ることを確認させる．
- 行列を対角化した後に，$P^{-1}AP$ を計算して実際に対角行列になることを確認させる．

このような確認を通常の問題演習の中で行おうとすると，逆の計算が簡単ではない場合がある．また，関数の形がこみ入ってくると自分でグラフを描くにも困難を伴う．しかし，数式処理機能を利用すると，即座に結果が表示される．すべての問題で確認する必要はないと思われるが，教師が幾つかの問題について確認するよう指示しておけば，学生は数式処理のコマンドを打ち込むだけで確認できる．それにより，その計算の意味について学生の理解が向上するのではないかと考えられる．

また，関数のグラフに関しては苦手意識をもつ学生が多いが，グラフ描画機能の利用により，その苦手意識を払拭できる可能性がある．たとえば，次のような場面が考えられる．

- $f(x)$ に具体的な式を定義して $f(x), f(x-p), f(x)+q$ のグラフを同時に描画させることで，グラフの平行移動に関する理解の向上を図る．対称移動についても同様。
- いろいろな媒介変数表示された関数のグラフを，式を変更しながら描画させていく中で「媒介変数表示」に対する理解の向上を図る．極座標でも同様のことが考えられる．

ただし，教師側が望むような理解を学生に得させるためには，試してみる関数の式，定義域，そして試してみる順番等について事前に資料を用意しておく必要があると考える．

4.3 数学的性質を発見させるための利用

数式処理機能を積極活用すると，教師が説明しようとする定理や公式を学生自らが発見するように仕向けることも可能である．たとえば，著者の数式処理機能を持つグラフ電卓

を利用した実践では，合成関数の微分公式や微積分の基本定理に気づかせることができた．Maxima などの数式処理ツールを利用しても同様のことが可能と考える．

たとえば，合成関数の微分公式 (連鎖律) の場合は，導関数の定義に基づいた計算により x^n や $\sqrt{x}$ の導関数については学習済みとし，合成関数の微分法を学ぶ直前に行ったものである．具体的には，次のような流れになる [1)]．

① 与えられた合成関数を，$y = f(u), u = g(x)$ という 2 つの関数に分解させる．
② $y = f(u), u = g(x)$ の導関数を自分で計算させる．
③ 合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数を，数式処理機能を利用して求めさせる．
④ 3 つの導関数 $\dfrac{dy}{du}, \dfrac{du}{dx}, \dfrac{dy}{dx}$ の間にどのような関係があるかを考えさせる．

$y = (3x-5)^4, y = \sqrt{3x+4}$ など，幾つかの合成関数を与えて①〜③を求めさせ，その後で④について考えさせた．約半数の学生が $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ という関係があることに気づいた．3 つに分解する場合も同様であることに気づいて，自分の発見にほくそ笑んでいる学生もいた．

なお，この後では普通の証明を行った．この方法は後付け的な形ではあるが，多くの学生が連鎖律に自分で気づくことができたことが重要と考える．他にも，いろいろな場面で，定理や公式に学生自らが自分で気づくように仕向けることが可能と思われる．自分で気づいた公式であれば，その後も忘れることはないと考えられる．

4.4 数学的思考を援助するための利用

数式処理ツールは，これまでに述べたように様々な場面での利用が可能である．答え合わせとしての利用は，学生が自分で答えの確認をするために利用する．しかし，数学的性質の理解や発見のための利用は，学生がその理解や発見が得られるように問題の配列を工夫したり，数式処理の操作手順を指示するなどして，教師が学生を導く必要がある．したがって，そのような利用の仕方をさせるためには，学生の理解度などを考慮しながら，問題配置や操作手順等をシミュレーションして，教師は事前に新たな教材を用意する必要がある．

一方，学生の立場で考えると，数学を学んでいく中では種々の疑問が生じてくる．この式の係数を変えるとどうなるのか，同じことを別な方程式で考えるとどうなるのか，この係数を変えるとグラフはどのように変わるのか等々の疑問が生じたとする．授業で扱う数学の問題の多くは，その結果が簡潔な式になるように設定されている場合が多いので，式や関数の係数を少し変えると結果が煩雑な式になったり，計算量が倍増するような場合がある．そのようなとき，学生はその計算を自分では追い切れずに次の思考に進むことができない．その場合，生じた疑問は放置されて忘れ去られてしまうことになるのではないかと考えられる．

しかし，このようなときに数式処理機能を利用すれば，解の形が煩雑であったり途中の計算量が倍増するような場合であっても，コマンドを打ち込むだけで即座に結果が表示される．それにより学生は,「ここを変えるとこうなるのか，ではこうするとどうなるのだろう？」と，次の思考に進むことができる．基本的な計算力が身についている場合には，この数式処理機能を積極活用させることにより，いろいろな数学上の問題解決ツールとして使用させることができると思われる．それにより，学生は自分の自由な発想により数学の世界を散策して，数学上のいろいろな気づきを得ることができるのではないかと考えられる．

著者は，数式処理機能を持つグラフ電卓を利用して，以上のことを「自由研究」と称して長期休業の課題とした．そこでは，数学に関する幾つかのテーマを提示して学生に選択させる．そして，自分の選択したテーマについて，その数学的性質について考察してレポートに取りまとめることを求めた．著者が行ったのは，グラフ電卓の使い方を説明して単に問題を提示しただけであるが，学生は自分の選択したテーマについて数式処理機能を利用して様々な試行錯誤を行い，その中からいろいろな気づきを得ている．

以下に，高専１年生に課した課題から，学生の幾つかの気づきを紹介する [4)]．

(1) 三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ を成立させる自然数に関する考察：

ある学生は，b, c が連続する自然数になる場合について，次のことに気づいた．

「$A^2+x^2=(x+1)^2$ を満たすのは，x の１の位が $0, 2, 4$ のときに限られる.」

この結果は，正しい．この学生は，事後の感想で,「久しぶりに頭がフル回転し，全く苦になりませんでした．とても楽しかったです.」と書いている．

(2) 二項定理 $(1+x)^n$ に関する考察：

指数 n と係数との関係について考察することを求めたところ，ある学生は次のことに気づいた．二項定理はまだ学んでいない．

「左から数えて k 番目の項の係数と指数を掛けて k で割ると，次の項の係数になる.」

この指摘は正しい．実際，$(x+1)^4$ の展開式において，たとえば２番目の項 $4x^3$ の係数４と指数３を掛けて２で割ると，$4\times3\div2=6$ となり，これは３番目の項の係数である．この学生は，一般の n 乗の場合の展開式の仕組みを自分で見いだしたことになる．

(3) ３次関数 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフに関する考察：

ある学生は，２次関数の標準形に相当する式がないかを考察し，自分で式の変形を行ったり種々のグラフを描画させたりすることで，次のことを見いだした．

「この関数のグラフは，

$$y=x^3-\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}x$$

のグラフを，x 軸方向には $\dfrac{a+b+c}{3}$，y 軸方向には

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{9}-abc$$

だけ平行移動したものである.」

この指摘も正しい．この学生は，年度末の感想で,「自由研究は，やっているうちにどんどんおもしろくなってきて，めちゃくちゃ頑張りました.」と書いている．

自由研究では，数式処理機能やグラフ描画機能を利用することにより，自分で何かに気づくことを求めている．教師が設定した特定の性質を発見することを求めているわけではない．以上の例で使用されている数式処理機能は，式の展開とグラフ描画の機能である．それらを駆使していろいろな試行錯誤を行いながら，学生自らが自分で数学的性質を発見したことになる．学生の頭の中では，数学的な性質の発見に向けていろいろな思いが渦巻いていたと考えられ，まさに数学的思考の援助ツールとして数式処理機能を利用したことになる．

5. 数学教育における「自由研究」

数式処理機能は，数学の通常の学習場面では計算の答え合わせやグラフの確認などに利用されることが多いと考えられるが，その機能を積極活用させると **4.4** で紹介したような数学に関する「自由研究」を課すことが可能になる．それは，何らかのテーマを与えて,「その数学的性質について考察せよ」という課題である．

数学の通常の授業体系では，成績上位の学生に対してならともかく，このような内容の課題を全員に課すことは難しいものがある．しかし，数式処理機能を利用すると，成績が下位の学生や数学を苦手とする学生でも，式を打ち込めばその結果が瞬時に出力される.「この式を計算すると，こうなるのか！」「この関数のグラフは，こうなるのか！」ということを，数学の成績によらず機械的操作だけで知ることができる．その場合，学生がなすべきことは，どんな式を計算させ，どんな関数のグラフを描画させるかを考えることである．表示される結果を見て,「この場合はどうなるのだろうか？」と思ったときは，同じようにしてすぐにその結果を知ることができる．つまり，自分の頭に浮かんだ数学的な事柄について，自分で計算しなくてもその結果をどんどん表示させていくことができる．これこそ，まさに数学的思考を行っているといえるのではないだろうか.

単純な計算でも多数の表示結果を眺めているうちに，一般的な性質に気がついてくるだろう．その「気づき」を得たときの思いは，普通の数学の問題を解けたときの喜びとは異なるものがあると考えられる．与えられた問題を解いたのではなく，試行錯誤して自分で数学的性質に気がついたのである．気がついた瞬間は，数学者が新たな気づきを得たときの思いと全く同一のものがあるのではないかと考えられる．その気づきを一般的な形で書き出して証明をすることができれば，それは立派な数学をやったことになる．証明まで至らなくても，一般性のある数学的性質に気づくだけで大きな成果といえるのではないだろうか.

著者は，グラフ電卓を利用した自由研究を，長期休業期間などを利用して平成 16 年度の 1 年生に 3 回実施した．年度末にその感想を自由記述させると，168 名中 142 名から何らかの記述が得られた．その記述内容を大きく分けると，次のように分類される [4, 5]．

(1) 楽しかった・おもしろかった・良かった	35.9%
(2) 勉強になった・理解が深まった	15.5%
(3) 大変だった・面倒だったが，おもしろかった・勉強になった・良かった	23.2%
(4) 分からなかった・難しかった	19.0%
(5) その他の感想	6.3%

「分からなかった・難しかった」とするのは全体の 19.0%である．他の学生はいずれも，数学的性質を発見できた喜びを語り，数学のおもしろさを実感したことを述べている．以下に，上記の各項目から典型的な記述を紹介する．

(1) 今まで規則性がないと思っていたものでも，考えてみると色々な規則性があり，その規則性を発見したときはうれしかった.
(2) 自由研究をやって，数学を前よりも深く考えられるようになった.
(3) 自由研究は出されると嫌だったけど，やってみると，とても頭を使うし，解けた時やひらめいた時の喜びがとても印象に残った.
(4) 自分なりに考えて取り組んだが，内容が濃くて難しかった.

(5) 数学的な規則性を見つけることはもちろん，何に対しても観察し，何かを発見することができるようになったと思う.

以上の感想と成績との関連性を調べると，自由研究に対する感想は数学の成績とはほとんど関連していない.「(4) 分からなかった・難しかった」とする者はどの成績区分にも存在し，成績下位の層に集中しているわけではない.「(1) 楽しかった・おもしろかった」とする者も同様であり，どの成績区分にも満遍なく存在している [4, 5].

このような感想が得られているのは，数式処理機能を利用させたことが大きいと考えられる．その機能を利用することで，成績が下位の学生であっても式の計算やグラフを描画することができ，さらには何らかの数学的性質にも気づくことができた．スマホに数式処理機能をインストールすると，このような数学に関する自由研究をいつでも学生に課せる環境が整うことになる．いったん取り組ませれば，学生は自分から進んで数学の世界に入り込んでいくのではないかと思われる．さらには，その世界を成績下位の者にも感じ取らせることが可能になる．数式処理機能を積極活用すると，単なる答え合わせとしての利用にとどまらず，新たな数学教育の世界が構築可能なのではないかと考えられる.

6. スマホ利用に関する幾つかの問題点

スマホに数式処理ツールをインストールすると，どのようなことが可能になるのかについて述べてきた．しかし，教室でのスマホ利用にはいろいろな問題点が考えられる.

第一に，学校内におけるスマホ規制との関係である．一般には，学校内でのスマホ利用は規制されていることが多いと思われる．スマホに数式処理ツールをインストールさせて授業で利用した場合は，利用するふりをしてゲームやメールをしたり，数学以外の科目の授業で操作する学生が出てくることも想定される．授業の中で自由に利用させることは，実際には問題が大きすぎるのかもしれない.

しかし，数学教育における数式処理機能の利用効果は非常に大きいものがある．上記の問題点を避けるには，授業外に利用させるのが良いのかもしれない．予習・復習における答え合わせとしての利用や，数学的な性質の理解や発見をさせるための教材を配布して，それは授業外で行うように指示することが考えられる．自由研究のような数学的思考を援助するための利用は，長期休業の課題とするのがよいであろう．授業中に使用しなくても，使用する数式処理ツールの使い方は，その都度プリントを用意するなどして十分に説明しておくことが必要と考える.

第二に，スマホの OS の種類により，利用できる数式処理ツールが異なることである．Android 上では無料のアプリとして Maxima On Android があるが，iOS 上のアプリとしてはまだ提供されていない．iOS 上の数式処理ツールとしては PocketCAS と Mathstudio がある．機能としては Maxima と同等と思われるが，いずれも有料である．学生全員がスマホを持っていたとしても，全員が Android 系のスマホとは限らない．iPhone を所有している学生に上記のアプリを紹介することはできても，有料であるアプリのインストールを強制することはできないと思われる.

ただし，インターネット接続ができる環境にあれば，Mathematica を利用した数式処理の結果を無料で提供してくれるサイトがある．WolframAlpha である.

[URL] http://www.wolframalpha.com/

このサイトを利用すると，非常に強力な結果が返されてくる．Android 系のスマホを所持していない学生には，このサイトを利用させることが考えられる．WolfmanAlpha の入力フォームに，たとえば $x^2 - 2x$ を打ち込むと，それに対する出力としては，以下の内容がすべて返ってくる．

入力された式，$[-0.5, 2.5]$ と $[-11, 13]$ を定義域とするグラフ，
放物線であること，因数分解した式，標準形，実数解，判別式の値，
実関数としての定義域と値域，導関数，不定積分，最小値，等々

iOS に対するもう一つの対応方法としては，Android 系のタブレット端末を学校側で用意して，それを学生に貸与することが考えられる．

あるいは，スマホで利用できる数式処理ツールがあることを紹介して，それを利用するとどのようなことが可能になるかを教室でやってみせて，その後の利用は学生の自由に任せることも考えられる．ただし，その場合は数式処理を前提とした課題は出せないことになる．

スマホに数式処理ツールをインストールさせても，それを教室で利用させるには以上のような問題点が考えられる．この問題点を解決するのは容易ではないと思われるが，授業での利用が難しかったとしても，少なくともスマホのアプリとして数式処理ができるものがあること，それを利用すると学習効率が格段に上がるだろうことは，全ての学生に周知しておく必要があるのではないかと考える．

7. おわりに

著者がグラフ電卓に初めて出会ったのは平成 10 年である．それ以降，グラフ電卓を活用した数学教育に取り組んできたが，残念ながら大きな広がりを見せることはなかった．

しかし，近年，スマホの普及が著しく，Maxima という本格的な数式処理ツールを無料でインストールできるようになった．学生が，その数式処理機能の有用性を実感すれば，数学学習における必需品として一気に普及することも考えられる．また，電卓の感覚で同様の機能を持つグラフ電卓が改めて見直されるかもしれない．数式処理機能を活用した数学教育について，その意義をもう一度考え直す時期に来ているのではないかと考えられる．

参考文献

[1] 梅野善雄：数式処理電卓を用いた微積分教育の改善，日本数学教育学会高専部会論文誌，Vol.8, No.1，pp.13–30，2001

[2] 梅野善雄：関数教育における数式処理電卓の短期利用とその効果，日本数学教育学会高専部会論文誌，Vol.10, No.1，pp.27–36，2003

[3] 梅野善雄：グラフ電卓を利用したグラフ・アートと関数理解，論文集「高専教育」，第 27 号，pp.191–196，2004

[4] 梅野善雄：高専における「試行錯誤」を伴う数学教材の開発・評価に関する実践的研究，平成 16・17 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (C)(2)，課題番号 16500566，研究代表者: 梅野善雄) 研究報告書，2006
[URL] `http://yunavi.la.coocan.jp/mathnavi/file/kaken_H17.pdf`

[5] 梅野善雄:数学教育における創造力を育む試み，論文集「高専教育」，第 29 号，pp.135–140，2006