

全国の数学教育、工学教育に携わる先生方へ

## グラフ電卓を活用した教育の推進について

数学教育や工学教育に携わっておられる先生方に、数式処理可能なグラフ電卓の機能や教育上の意義について、是非とも知っていただきたく思います。

今、海外では、グラフ電卓を活用して「数学教育の革命」と呼ばれるような大きな変革がおきています。それは、従来は教師が黒板で説明していたことを学生が発見するよう仕向けるなど、思考力を中心に据えた教育です。欧米では、その利用はもはや常識化していると言われます。例えば、国立教育研究所の調査では、欧米の高校3年生の家庭や学校における電卓非利用率は僅かに数%未満です。

しかし、先進国の中では、なぜか日本だけがグラフ電卓の活用に大きな遅れをとっています。日本の教育現場では、グラフ電卓の機能自体がそれほど知られておらず、あまつさえ、数式処理の可能なグラフ電卓が存在するすらあまり知られていません。その数式処理能力は極めて高度であり、数式処理ソフトの国際コンペにおいて、本格的な数式処理ソフトである Mathematica と並び、首位タイになったことがあるほどです。数式処理可能なグラフ電卓は、もはや従来のイメージの「電卓」ではありません。むしろ、Mathematica の小型版と理解した方が、この電卓の機能や教育上の意義を正しく表現しています。

グラフ電卓は、中学から大学までの数学教育や工学教育で活用できます。この電卓の有効活用は、数学教育や工学教育にとって革命的な教育効果をもたらすでしょう。特に、数式処理可能なグラフ電卓は、高専や大学の工学部では必需品というべきです。

世界中(特に欧米)でグラフ電卓を利用した教育革命が起きている中で、先進国では日本だけがその流れから取り残されています。この現状を放置することは、技術立国を目指す我が国にとって極めて危機的です。この電卓を長期間有効活用した場合、その教育効果は計り知れません。数学教育や工学教育に関係する各位におかれましては、授業での活用を早急かつ真剣に検討されま

すよう希望するものです。

平成 13 年 3 月

数ナビ活用研究会  
gtext@ishikawa-nct.ac.jp

# グラフ電卓の採用・活用に関するQ & A

—平成13年3月—

数ナビ活用研究会

[gtext@ishikawa-nct.ac.jp](mailto:gtext@ishikawa-nct.ac.jp)

## —目次—

Q.1	グラフ電卓としては、どのような機種があるか？	1
Q.2	グラフ電卓と関数電卓との違いは何か？	1
Q.3	数式処理電卓 ALGEBRA fx2.0 の機能の概要を知りたい。	1
Q.4	数式処理電卓 TI-89 の機能の概要を知りたい。	2
Q.5	数式処理電卓 TI-89 と TI-92Plus との違いは何か？	2
Q.6	数式処理電卓の数式処理機能は、Mathematica と比較するとどの程度のレベルか？	2
Q.7	グラフ電卓を使った授業の具体的なイメージが湧いてこない。	2
Q.8	数式処理電卓を利用させると、式変形をさせるし試験問題が出せなくなるのではないのか？	5
Q.9	数式処理電卓の利用による具体的な教育効果を知りたい。	6
Q.10	数式処理電卓を使わせたら、学生が計算をしなくなるのではないのか？	7
Q.11	電卓のメモリーに式を書き込まれて、試験のときにカンニングされるのではないのか？	7
Q.12	関数電卓と同じような計算はできるのか？	8
Q.13	試験や授業のやり方を変えることが必要になるのではないのか？	8
Q.14	学生に購入させるには、価格が高すぎるのではないのか？	8
Q.15	パソコンとのデータ通信はできるか？	9
Q.16	液晶画面のプリントアウトはできるか？	9
Q.17	実データの収集はできるか？	9
Q.18	液晶画面を OHP で投影できるか？	9
Q.19	プログラム機能はあるか？	10
Q.20	表計算で、エクセルと同様のことができるか？	11
Q.21	購入させるのは、まだ時期尚早ではないのか？	12
Q.22	世界では、どの程度普及しているのか？	12
Q.23	海外では、どのようなことが報告されているのか？	13
Q.24	日本では、どの程度普及しているのか？	14
Q.25	良いことづくめだが、批判的な意見は出ていないのか？	15
Q.26	おわりに	15
	参考文献・URL	17

## グラフ電卓の採用・活用に関するQ & A

以下では、グラフ電卓の採用・活用を考える場合に出されるとと思われる疑問へのQ&Aを作成しました。この電卓を授業に活用した場合の教育効果について、思いを巡らして頂ければ幸いです。

### Q.1 グラフ電卓としては、どのような機種があるか？

和文マニュアルのあるグラフ電卓は、カシオとテキサスインスツルメント (TI) が販売しています。それらの電卓の詳細は、以下のサイトをご覧ください。いずれも、1ヶ月程度は無料で借り出して試用することが可能です。詳しくは、HP で問い合わせてください。

カシオは、<http://www.casio.co.jp/edu/index.html>

TI は、<http://www.naoco.com/>

グラフ電卓を世界で始めて開発したのは日本のカシオです。テキサスインスツルメントの電卓では、米国の数学教育の現場から出された多くの要望ができるだけ取り入れられています。いずれの製品にも、数式処理が可能なものと、そうでないものがあります。各社の代表的な機種は、以下のものです。

数式処理機能	カシオ	テキサスインスツルメント
あり	ALGEBRA fx2.0、	TI-89, TI-92Plus
なし	CFX-9850GB Plus	TI-83Plus

### Q.2 グラフ電卓と関数電卓との違いは何か？

グラフ電卓は、単に関数のグラフを描画するだけの関数電卓ではありません。数式処理機能を持たないグラフ電卓であっても、その機能は多岐にわたります。CFX-9850GB Plus や TI-83Plus の場合は、関数電卓の機能やグラフ描画機能 (媒介変数や極座標の場合も含む) の他に、以下のような機能を持ちます。これらの機能の他に、さらに数式処理機能を持たせたものが数式処理電卓です。

各種の計算機能 複素数の計算、行列の計算、高度の統計計算 (回帰、推定、確率分布など)

グラフ機能 関数のグラフが表示されている状態で、次のものを求めることができます。

$x$  軸との交点の座標 / 最大値・最小値 / 指定されて点における微分係数の値 / 指定されて点における接線の方程式 / 指定された範囲の定積分の値等々

リスト機能 表データをもとに対数回帰・指数回帰などの主要な統計回帰を行うことができます。

プログラム IF 文、WHILE 文、FOR 文などのコマンドを用いてプログラムを組むことができます。

外部機器との接続 オプションのデータ収集器を接続すれば、いろいろなセンサーを通して実データが収集でき、それを即座にグラフ表示したり統計回帰することが可能です。

### Q.3 数式処理電卓 ALGEBRA fx2.0 の機能の概要を知りたい。

この電卓の機能の詳細については、以下の HP をご覧ください。

機能の概要は、<http://www.casio.co.jp/edu/product/fx20/>

FAQ については、<http://www.casio.co.jp/edu/product/fx20/faq.html>

### Q.4 数式処理電卓 TI-89 の機能の概要を知りたい。

この電卓の詳細については、以下の HP をご覧ください。

機能の概要は、<http://www.naoco.com/calc/ti-89.htm>

具体的な操作例は、<http://www.naoco.com/calc/CAS/cas.htm>

### Q.5 数式処理電卓 TI-89 と TI-92Plus との違いは何か？

TI-92Plus は TI-89 よりも液晶画面が大きく、TI-89 の機能の他に、幾何機能 (カブリジオメトリ) が含まれています。<http://www.naoco.com/calc/ti-92plus.htm>

その幾何機能は、初等幾何の教育で活用すれば画期的な教育効果が期待されます。パソコン用のソフトとしても販売されています。<http://www.ti.com/calc/cabri.htm>

このソフトを利用例としては、以下が参考になるでしょう。

<http://www.mowmowmow.com/math/cabri/>

### Q.6 数式処理電卓の数式処理機能は、Mathematica と比較するとどの程度のレベルか？

数式処理電卓 TI-89 や TI-92 の数式処理機能は、極めて高度です。数式処理ソフトの国際コンペで、TI-92 は本格的な数式処理ソフトである Mathematica と並んで首位タイになったことがあります。そのコンペの問題とは、たとえば以下のようなものです。

[1]  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\pi} + n^2 + \sqrt{n} + 1)^{-1/3}$  の値を求める。

[2]  $(x+1)^{2000}(x^2+x+1)^{1000}(x^4+x^3+x^2+x+1)^{500}$  で  $x^{3000}$  の係数を求める。

[3] 1000 次のラゲール多項式の最大の零点を求める。

なお、ラゲール多項式は、次の漸化式で定義される。

$$L_n(x) = \frac{2n-1-x}{n}L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}L_{n-2}(x), \quad L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1-x$$

[4]  $Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$  のとき、 $\int_0^1 x^2 Li_3\left(\frac{1}{x+1}\right)$  を求める。

[5]  $\int_0^1 \exp(x+y+x^2+xy+y^2+x^2y^2)f(y)dy = \lambda f(x)$  を満たす最大の固有値を求める。

なお、カシオの数式処理電卓 ALGEBRA fx2.0 の数式処理機能は、現状では、残念ながら TI-89 や TI-92 ほどのものではありません。

## Q.7 グラフ電卓を使った授業の具体的なイメージが湧いてこない。

数式処理電卓を授業の中で使うということは、それを単なる計算のためだけに利用するわけではありません。この電卓を有効に活用すれば、いろいろな数学的概念を、従来よりもストレートに理解させることが可能になります。参考までに、TI-89 の場合の利用例を以下に示します。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ の説明}$$

この極限値の説明は、従来は不等式  $\cos x < \sin x/x < 1$  をもとにして、挟み撃ちの原理で教師が証明をしていました。グラフ電卓を利用して  $y = \sin x$ ,  $y = x$  のグラフを同時表示させ (図1)、原点付近をどんどん拡大させると2つのグラフはほとんど1直線で表示されてきます (図2)。これを見れば、比は1であることは一目瞭然です。しかも、これらの座標データや  $\sin x/x$  の値を表で表示させれば  $x \rightarrow 0$  につれ  $\sin x/x \rightarrow 1$  となる様子が、数値的にも明白です (図3)。また、 $\cos x$ ,  $\sin x/x$ ,  $1$  のグラフを同時表示させれば、挟み撃ちの原理がいかなることかも一目瞭然でしょう。数式処理機能をもたないグラフ電卓でも、同様のことが可能です。

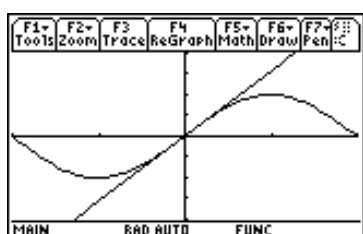


図1

$$-\pi < x < \pi$$

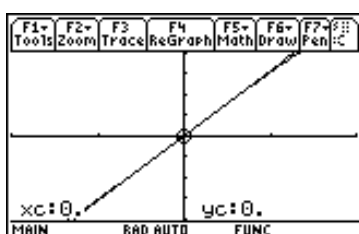


図2

$$-\pi/4 < x < \pi/4$$

F1 Tools	F2 Setup	F3 Header	F4	F5	F6	F7	F8
x	y1	y2	y3				
0.	0.	0.	undef				
.01	.01	.01	.99998				
.02	.02	.02	.99993				
.03	.03	.03	.99985				
.04	.03999	.04	.99973				
y1(x) = .029995500202496							

図3

$$y1 = \sin x, y2 = x, y3 = \sin x/x$$

以上のことを教師が説明するのではなく、電卓を操作させて、学生がそのことに気づくように仕向けるわけです。数式処理機能を利用すると、この極限値を直接計算させることもできます。

つまり、式の計算上の理解、グラフ上の理解、そして数値的な理解。これら三者が一体となった理解をさせることが可能になるということです。あらゆる場面で、この手法が使えます。グラフや数値と合わせて理解させることができるので、理解の程度が深化することが期待されます。特に、グラフを用いた視覚的な効果は、単なる式変形だけの説明と比べて、数学的な概念をストレートに学生に伝えるのに極めて有効です。

### 放物運動

点が水平角  $\theta$ 、初速度  $v_0$  で投げ上げられたとき、投げた点を原点にとり水平方向を  $x$  軸、垂直方向を  $y$  軸にとると、 $t$  秒後の変位は  $x = (v_0 \cos \theta)t$ ,  $y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$  です。グラフ電卓は、このような媒介変数表示された関数のグラフも容易に表示することができます。

図4では、この関数の式が定義されます。図5は、画面を左右に分割して右側では値の代入、左側ではそのグラフが描画されています。このように、具体的な軌道を容易に見ることができるので、たとえば、 $v_0$  や  $\theta$  の値を変えさせて、水平飛行物体と衝突させるには初速度や投げ上げる角度をどのように定めればよいかを実験的に確かめさせることが可能になります。(図6)。自分の定めた初速度や投げ上げる角度により、軌道がどう変わるかをその場で直接確かめることが可能になり、関数や式の意味を理解させるときに極めて有効です。同様のことは数式処理機能を持たないグラフ電卓でも可能ですが、この例のような画面分割ができるかどうかは機種により異なります。

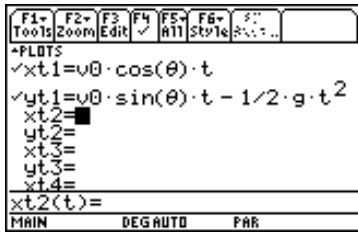


図 4

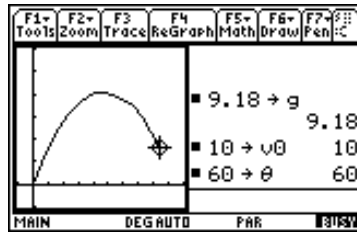


図 5

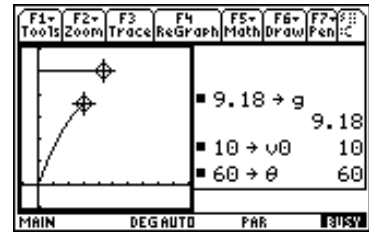


図 6

### 定積分の定義

数式処理機能とグラフ機能を複合的に利用すると、定積分を和の極限としてダイレクトに理解させることができます。たとえば、関数  $f(x) = x^2$  を区間  $[0, 1]$  で考え、その区間を  $n$  等分して分点  $x_k = k/n$  の場合を考えます。小長方形の面積の和を  $s(n)$  として

$$s(n) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

とすれば、 $n$  に具体的な値を代入するだけで  $n$  等分したときの小長方形の面積の和が表示されます (図 7)。それをグラフ表示すれば、 $n \rightarrow \infty$  につれて収束する様子も見るすることができます (図 8)。同じことを区間  $[0, x]$  で考えて、

$$s(n, x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kx}{n}\right) \frac{x}{n}, \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n, x)$$

とおき、 $f(x)$  をいろいろな関数に変えて  $g(x)$  を求め、 $f(x)$  と  $g(x)$  の間の関係について考えさせれば、微積分の基本定理に気づかせることも可能になります (図 9)。

なお、この例は、数式処理機能を持たないグラフ電卓では実現できません。TI-89 の例を示しましたが、TI-92Plus でも同様です。ALGEBRA fx2.0 で同じことが可能かどうかは、まだ確認できていません。

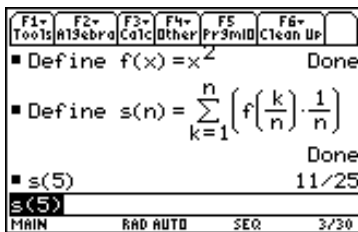


図 7

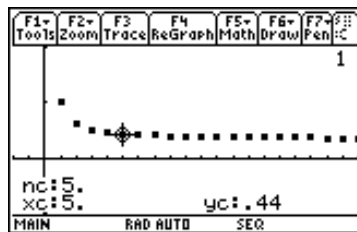


図 8

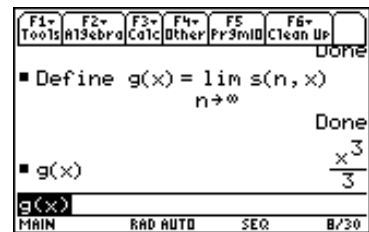


図 9

数式処理電卓は、そのグラフ機能や数式処理機能を活用すれば、数学教育にとって非常の多くの可能性を持った電卓であることが、これらの例を見ただけでもお分かりいただけるのではないのでしょうか。福井高専の実践では、入学直後の新生に TI-89 を利用させて  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフについて考察させたところ、2 次関数について教師が教えるべき内容の大部分を学生から指摘されてしまったことが報告されています [4]。

このような手法で、いろいろなことを自分で気づかせるように仕向ければ、教師から一方的に説明されたことを覚えることよりは、以後の定着度には格段の違いがあるでしょう。教師中心から学生中心に転換した授業が可能になるわけで、まさに、世界中で「数学教育の革命」と呼ばれる所以です。

これは、グラフのみならず、式の計算などにおいても同様です。ちょっと係数を変えただけで計算量が倍増するような式では、従来は「この場合はどうなるのだろう」と思っても、実際にそれを確認する(あるいは、させる)ことはできませんでした。しかし、この電卓の数式処理機能を利用すれば、それが可能となり、数学的な部分について学生に試行錯誤させることができることとなります。この電卓を有効に活用すれば、複雑な計算に追われることなく、グラフと併わせて問題を考察させることができます。必要に応じて、いろいろなシミュレーションを簡単に行うことができ、まさに問題の本質に思考を集中させることができます。「思考のツールとしての利用」、これこそが数式処理電卓の真価です。

具体例としては、以下も参考にしてください。

<http://seifu.ac.jp/Math/mtt.html>

<http://www.casio.co.jp/edu/classroom/>

<http://www.naoco.com/calc/material/material.htm>

グラフ電卓を活用することの教育上の意義については、

<http://www.casio.co.jp/edu/classroom/>

<http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html>

が参考になると思います。

## Q.8 数式処理電卓を利用させると、式変形をさせるし試験問題が出せなくなるのではないのか？

数式処理電卓を試験で利用させる場合には、単なる式変形や数値計算をさせるためだけの問題は、あまり意味がなくなります。出題する問題内容には変更が必要になるでしょう。式変形できるかどうかを見たい場合、あるいは、公式などを覚えているかどうかをみたい場合、数式処理電卓の持込みは不可とすべきでしょう。

ただし、数式処理電卓を式変形に使うことを容認すれば、従来は学生には(計算が難しすぎて、あるいは時間がかかりすぎて)課すことのできなかつたような問題でも、課すことが可能になるでしょう。単なる公式を知っているかどうかを見るための問題や、計算能力を見るためだけの問題から、複雑な計算部分は電卓に任せて、応用力や思考力を見る問題が出題可能になると思われます。ただし、その場合には、思考の流れや、どのような場面で電卓をどのように利用するかを、あらかじめ授業の中で、説明しておくことが必要になります。

複雑な計算は電卓に任せるとはいつても、それは基本的な計算をすべて電卓に任せるということではありません。従来のような紙と鉛筆による計算ができることは、数学を理解する上においては絶対的に必要です。そのための練習は電卓を所持させても必要であり、基本的な計算練習をおろそかすべきではありません。数学的な思考を進める上では、そのような計算力は不可欠のものです。

この電卓の意義を考えるには、むしろ、家でも通学途上の電車の中でも、どこでも利用できる Mathematica を持たせた場合を想像いただいた方がいいと思います。Mathematica を操作するにはパソコンが目の前に必要ですが、この電卓であれば、思いついたときに、いつでも、どこでも利用できるわけです。数学の問題を考えるときに、数式処理機能を、いつでも、どこでも利用できることの意義をお考えいただきたいと思います。

その意味で、この電卓を関数電卓の代替品と理解されるのは誤解のもとです。この電卓の数式



処理機能を利用すれば、従来の紙と鉛筆だけでは学生にとって計算困難な問題でも、学生は思考を進めることができるようになります。単なる計算ツールではなく、思考のツールとして考えるべきです。

したがって、従来と同じやり方の授業や試験ができないということではなく、この電卓を利用させた場合に期待できるであろう新たな教育効果の方に重点を置いていただきたいと思います。

## Q.9 数式処理電卓の利用による具体的な教育効果を知りたい。

大阪の私立清風高校では、TI-92 を理数科の生徒に長期貸与した授業を試行してきました。生徒達が2~3年間、その電卓を使用した感想文が清風高校のHPで公開されています。数式処理電卓を長期間、有効活用させた場合の教育効果の大きさを垣間見ることができるでしょう。

<http://seifu.ac.jp/math/>

一関高専の2年生に対するアンケート結果も紹介しておきます。一関高専では、平成12年度の2年の微積分の授業で数式処理電卓 TI-89 を学生に長期貸与して使用してきました。以下の各問で、上段は平成12年の7月(74名)、中段は平成12年の10月(71名)、そして下段は平成13年2月(73名)の授業で調査したものです。

一関高専2年生の数式処理電卓(TI-89)に関するアンケート調査結果  
(%)

数ナビの使用状況と意識	はい	中間	いいえ
数ナビを使う授業はおもしろい	39.2%	48.6%	12.2%
	46.5%	47.9%	5.6%
	49.3%	42.5%	8.2%
数ナビを使うと数学がよけいに分からなくなる	9.5%	44.6%	45.9%
	8.5%	35.2%	56.3%
	6.8%	32.9%	60.3%
数ナビのおかげで数学が前よりおもしろくなった	40.5%	48.6%	10.8%
	31.0%	60.6%	8.5%
	30.1%	64.4%	5.5%
数ナビを使わないで普通の授業をしてほしかった	8.1%	45.9%	45.9%
	7.0%	47.9%	45.1%
	11.0%	31.5%	57.5%
数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる	45.6%	50.0%	4.1%
	49.3%	49.3%	1.4%
	63.0%	35.6%	1.4%
数ナビを使って、数学が前より分かるようになった	40.5%	46.6%	10.8%
	42.3%	52.1%	5.6%
	35.6%	58.9%	5.5%

(注1) 「どちらともいえない」は「中間」とした。

(注2) 学生には、数式処理電卓 TI-89 を「数ナビ」と呼ばせています。

(注3) この電卓に否定的な意見が少ないのは、世界共通の傾向のようです。

否定的な意見が、2回目以降の調査では大きく減少していることが分かります。最後の調査(平

成 13 年 2 月) では「数学が前よりも分かるようになった」に「はい」と回答する者が減少していますが、この時期の授業内容は、媒介変数や極座標による面積や長さを扱っていることも念頭において下さい。

以下は、平成 13 年 2 月の最後の調査で新に設けた設問です。

平成 13 年 2 月下旬調査。有効回答 73 名。(%)

数ナビの使用状況と意識	はい	中間	いいえ
数ナビのおかげで、いろいろな計算が楽になった	27.4%	67.1%	5.5%
数ナビに頼って、自分であまり計算しなくなった	19.2%	39.7%	41.1%
数ナビのおかげで、理論的なことへの関心が高まった	31.5%	54.8%	13.7%
数ナビがあると難しい計算も自分でやってみる気になる	35.6%	38.4%	26.0%
数ナビを使って数学について前より考えるようになった	32.9%	53.4%	13.7%

### Q.10 数式処理電卓を使わせたら、学生が計算をしなくなるのではないか？

このことをよく聞かれますが、大きな誤解があります。この電卓を数学教育で使うということは、この電卓を通していろいろな計算させるためではありません。数学上の概念、定理・公式、あるいは計算の仕方などを正しく理解させるためのツールとして利用することになります。この電卓のグラフ機能や数式処理機能を有効に利用すると、それらのことを従来よりもストレートに、かつ効果的に理解させることが可能になります。

学生も「自分で計算ができるようにならなければならない」ことは十分にわきまえており、計算で利用するとしても、それは答え合わせとしての利用です。要は、学生への使わせ方の問題であり、電卓自体の問題ではありません。その意味では、関数電卓のように、この電卓を学生に与えてそのまま放置することは問題があるかもしれません。どのように利用するかについて、教師側の指導が必要になります。教師側が「自分で計算できる力は必要である」という認識を持ち、学生にもそのような認識で指導・対応している限り、特に問題は生じないでしょう。この電卓を利用して学生が計算しなくなるのは、教師側が積極的にそのような方向に導いた場合に限られると思われれます。

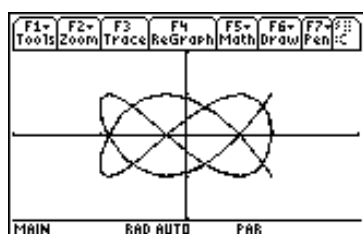
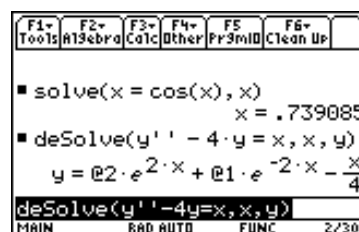
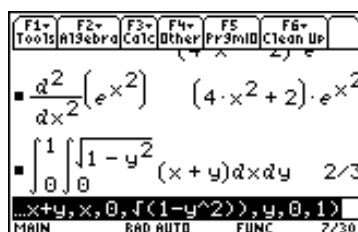
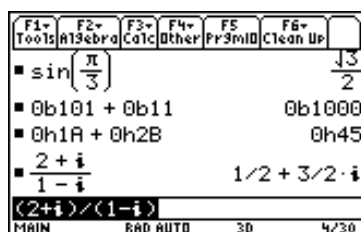
### Q.11 電卓のメモリーに式を書き込まれて、試験のときにカンニングされるのではないか？

英数字でかなりのプログラムが可能なので、試験でこの電卓の使用を認めた場合、いろいろな公式を書き込んでくる学生も出てくるでしょう。したがって、試験のときは、それでも構わないような問題とするか、あるいは書き込みを禁止するかのいずれかになるでしょう。しかし、口頭で注意しただけでは、書き込みを禁止させるのは実際には不可能です。グラフ電卓は、簡単な操作ですべてを工場出荷状態に戻すことができます。この操作を試験開始前に行わさせれば、ある程度のことは防げると思われれます。

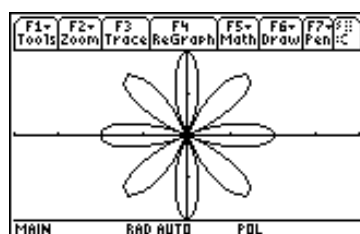
というより、そのような操作が必要な場合は、この電卓の持ち込みは不許可とすべきでしょう。反対に、それを許可した場合は、単なる公式にあてはめるだけの問題ではなく、むしろ学生の思考過程をみる問題を中心に出题すべきでしょう。そのような問題は、従来はなかなか出題することができませんでした。この電卓の使用を認めれば、出題できる問題の範囲が大きく拡大することになります。

## Q.12 関数電卓と同じような計算はできるのか？

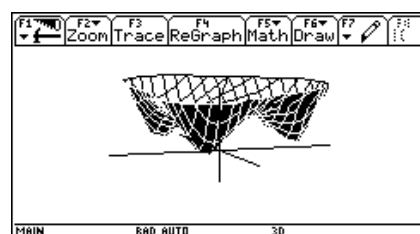
可能です。数式処理電卓が関数電卓と違うのは、たとえば  $\sin(\pi/3)$  では、小数ではなく、 $\sqrt{3}/2$  が表示されることです。むしろ、小数で表示させることも簡単にできます。2進数や16進数の計算、複素数(関数)の計算も可能です。数式処理可能ですから文字を含む繁分数や微分・積分の計算も可能、単位つきの計算もできます。(連立)方程式や微分方程式も解きます。媒介変数や極座標で表示された関数のグラフのみならず、複素関数の絶対値関数のグラフ(曲面)まで、難なく描画します。以下は、TI-89 の場合の表示例です。



$$x = \cos 4t, y = \sin 7t$$



$$r = 2 \cos 4\theta$$



$$z = |(x + iy)^3|$$

## Q.13 試験や授業のやり方を変えることが必要になるのではないのか？

数式処理電卓を積極活用した授業を行なおうとすると、授業や試験のあり方等を変更することが必要になるかもしれません。その場合には、どのような使い方をさせるかを、あらかじめ教師側が考えることが必要になり、そのための教材も自分で用意することになります。新しい授業を試みるための準備は、実際にはなかなか大変です。

しかし、それを使った新しい授業を試みなくとも、単なる計算の答え合せや関数のグラフ表示のためだけの利用であっても、学生には相当画期的な効果を与えることができるでしょう。即座に答えが確認でき、しかも自分では描けないような関数のグラフまですぐに描画されることは、学生の理解を深めるために極めて有効です。単なる式の変形だけで説明するのと比べてグラフを併用しながら説明すれば、学生の理解の仕方が深まることが期待されます。

つまり、これまでと同じ授業の中で単純な利用のさせ方をするだけでも、数学のみならず工学系専門科目の授業でも、教育上は極めて有効と思われる。

## Q.14 学生に購入させるには、価格が高すぎるのではないのか？

数式処理電卓は、従来の関数電卓と比較すると確かに高いといえます。しかし、その機能は、もはや電卓の範疇に納まるものではありません。数式処理電卓は、数式処理ソフト Mathematica の小型版と理解した方が、その能力を正しく伝えていきます。高専や大学理工系学部の学生であれば、数学上の問題を考えるときに、数式処理機能を学校でも家でも、あるいは通学途上の列車内でも

利用できることの意義は明らかでしょう。価格も、昨今の学生にとっては決して高くはないと思います。例えば、TI-89 の定価は 29,800 円です。

ただ、数式処理電卓を中学生や高校生に個人購入させるのはちょっと難しいのかもしれません。その場合は、学校側で購入して貸与することが望まれます。我々の実践経験では、授業の時だけ使用して、その度に電卓の配布と回収を繰り返すようなやり方では十分な効果は上げられません。この電卓は、学生に購入させるにしろ、貸与するにしろ、学校でも家でも、どこでも利用できる状況に置くことが極めて重要です。数式処理機能を持たなければ、価格はもう少し安くなります。高校の文系志向の学生に使用する場合は、数式処理機能がなくとも十分かもしれません。

### Q.15 パソコンとのデータ通信はできるか？

パソコンとデータをやりとりするには、オプションの接続機器が必要です。カシオであれば PC リンクソフトウェア FA-123、テキサスインスツルメントであれば、Graph-Link が必要です。それぞれ、以下の HP を参照してください。

<http://www.casio.co.jp/edu/product/graph.html>

<http://www.naoco.com/calc/graphlink.htm>

### Q.16 液晶画面のプリントアウトはできるか？

液晶画面をプリントアウトするには、そのデータを一旦パソコンに送り、パソコン側からプリントすることになります。それには、パソコンとの通信ソフトが必要です。ただし、その画面は液晶画面そのままの画像であり、研究発表等の画像として堪えるかどうかは分かりません。

### Q.17 実データの収集はできるか？

オプションのデータ収集器を利用すると、センサーを通して、実データをリアルタイムで収集でき、即座に統計回帰可能です。たとえば、ボールを床に落としてその跳ね返る様子を距離センサーでデータ収集すれば、その軌跡が放物線であることをその場で容易に確認することができます。教育用ですからデータ収集力には限界がありますが、理工系科目の導入部分で利用すれば極めて有用と思われます。金沢高専では、この機能を利用して、数学と物理を融合した総合科目「数物ハンズオン」の授業が平成 8 年より実践されています。

<http://eagle.kanazawa-tc.ac.jp/~ujiie/souzou/hands-on/index-f.htm>

各社のデータ収集器については、下記の HP を参照してください。

<http://www.casio.co.jp/edu/product/graph.html>

<http://www.naoco.com/calc/cbl.htm>

具体的な教材などについては、下記を参照してください。

<http://www.casio.co.jp/edu/classroom/>

<http://www.naoco.com/calc/cbl-workbook.htm>

### Q.18 液晶画面を OHP で投影できるか？

OHP への投影装置が別売されています。その投影装置は、パソコン画面を投影するのと比べて、はるかに安価・軽量です。ただ、電卓によっては、それらの接続機器とのコネクタの有無により

型番が違う場合があるので、購入時には注意が必要です。詳細は、以下にあります。

<http://www.casio.co.jp/edu/product/>

<http://www.naoco.com/calc/viewscrn.htm>

テキサスインスツルメントの場合は、プロジェクターを通して直接スクリーンに投影させることもできます。こちらの方が、鮮明に投影されます。この機器を使うと、液晶画面をテレビ画面に写し出すことができるので、ビデオ録画も可能になります。詳細については、以下を参照して下さい。 <http://www.naoco.com/calc/presenter.htm>

## Q.19 プログラム機能はあるか？

あります。通常の構造化言語とほとんど同じです。そして、電卓のすべての機能をコマンドとしてプログラムの中で利用できます。たとえば、TI-89 の場合であれば、命令語としては以下のものが利用できます。

Cycle Define Exit For...EndFor Goto If...EndIf  
Lbl Local Loop...EndLoop Return While...EndWhile

TI-89 の場合は、そのマニュアルが公開されています。プログラム機能の詳細は、そちらをご覧ください。

<http://www.naoco.com/calc/ti-89-guidebook.htm>

以下は TI-89 のプログラムで、シンプソンの公式で数値積分を行うものです。シンプソンの公式は、周知のように、区間  $[a, b]$  を  $2n$  等分して分点を  $(x_k, y_k)$  ( $0 \leq k \leq 2n$ )、区間の幅を  $h = (b-a)/2n$  とするとき、

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{h}{3} \{y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + y_{2n}\}$$

と表されます。右辺は、 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$  を計算することにより得られるので、以下のようなプログラムになります。ただし、 $f(x)$  はすでに定義済みとします。

: simp(aa,bb)	プログラム名を simp とし、区間 $[aa, bb]$ での積分を考える
: Prgm	プログラムであることを宣言
: local ee, hh, ii, nn, sa, sb	ローカル変数であることを宣言
: local xi, xj, xk, yi, yj, yk	ローカル変数であることを宣言
: 10 ^ (-6) → ee	誤差の限界を $10^{-6}$ にし、ee に代入
: (bb-aa)/2 → hh	区間の midpoint の座標を hh に代入
: aa → xi: (aa+bb)/2 → xj: bb → xk	区間を 2 等分したときの座標を求める
: f(xi)+4f(xj)+f(xk) → sa	sa を計算
: hh*sa/3 → sa	これは、区間を 2 等分した場合の値
: Disp approx(sa)	sa の値を小数表示する。
	approx をつけないと、分数や平方根のまま表示される
: 2 → nn	nn = 2 として 4 等分から繰り返し計算を開始
: Loop	以下の内容を繰り返す
: 0 → sb: aa → xi	初期値の設定
: (bb-aa)/(2*nn) → hh	区間の幅の計算

: For ii, 1, nn, 1	繰り返し変数を $ii$ とし、以下を $nn$ 回繰り返す
: f(xi)→yi	$y_i = f(x_i)$ とする
: xi+hh→xj:f(xj)→yj	$y_j = f(x_j)$ とする
: xi+2*hh→xk:f(xk)→yk	$y_k = f(x_k)$ とする
: sb+(yi+4*yj+yk)/3→sb	$(y_i + 4y_j + y_k)/3$ を $sb$ に加える
: xi+2*hh→xi	計算する小区間の左端を次の計算用に変更する
: EndFor	$ii$ による繰り返しの終了
: hh*sb→sb	$sb$ が、 $2nn$ 等分した場合の面積
: If abs(sa-sb)<ee Then	直前の面積 $sa$ との差が $ee$ 以下なら以下を実行する
: Exit	Loop から脱出する
: Else	$ sa - sb  \geq ee$ のときは以下を実行
: Disp approx(sb)	$sb$ を表示する
: sb→sa:nn+1→nn	$sb$ を直前の値 $sa$ とし、分割数を増やす
: EndIf	If 文を終了する
: EndLoop	Loop 文を終了する
: Disp approx(sb)	最終結果を表示する
: EndPrgm	プログラムの終了

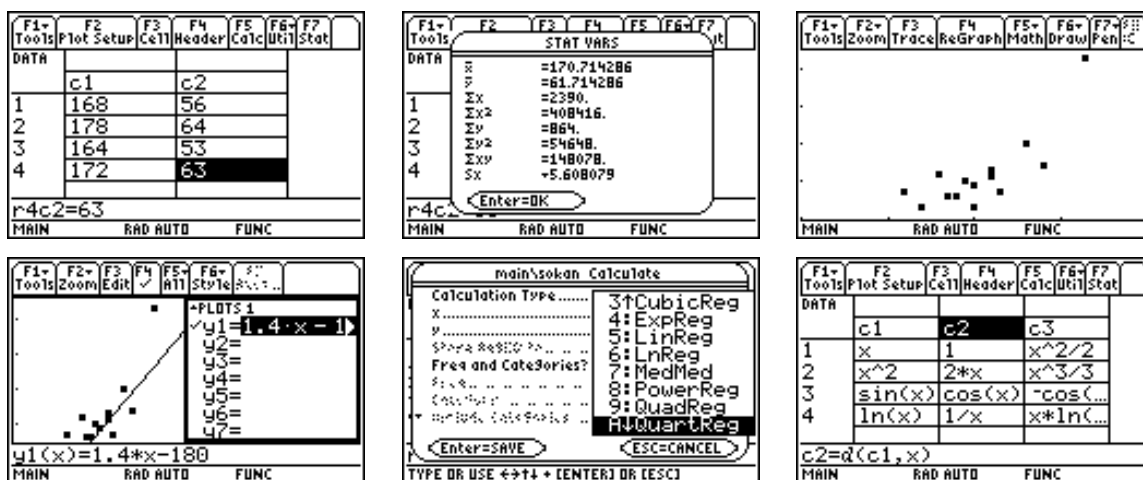
このように、通常の構造化言語によるプログラムと全く同様なので、そのような言語のプログラミング教育に利用することもできるでしょう。パソコンに向かわずとも、いつでもどこでもプログラムを組めることは、このような言語を習得する場合には極めて重要です。

また、この電卓を利用すれば、定積分  $\int_a^b f(x)dx$  の値はこのようなプログラムを組むことなく、単に  $\int(f(x), x, a, b)$  というコマンドを打ち込むだけで済みます。しかも、そのような数式処理のコマンドをプログラムの中でも利用できることで、作成できるプログラムの範囲が大きく広がりになります。TI-89 の場合は、アセンブリプログラムを実行することも可能です。ただし、そのプログラムはパソコン上で作成して、TI-89 に転送することになります。TI-89 の CPU は、Motorola 68000(10Mhz) です。

## Q.20 表計算で、エクセルと同様のことができるか？

数式処理電卓 TI-89/92Plus の表計算機能は、かなり強力です。99 列 999 行までのデータを扱うことができます。それらの基本統計量や散布図はもちろん、いろいろな統計回帰も標準的な 10 種類の中から選択できます。さらに、数式処理が可能なので、文字列や関数をセルデータとして持つことができ、それらに対して数式処理を含む計算をさせることができます。最後の図は、2 列目は 1 列目を微分したもの、3 列目は 1 列目を積分したものです。自動計算も可能です。これらの表データに対して、プログラムで数式処理を含む高度の計算を行わせることもできるので、表計算でシミュレーションできる範囲が大きく広がることになると思われます。

ただし、表計算の中でグラフとして表示できるのは、散布図、折れ線グラフ、ヒストグラフ、箱ひげ図だけです。エクセルのような多様なグラフで表示させることはできませんが、別途プログラムを組めば可能でしょう。



### Q.21 購入させるのは、まだ時期尚早ではないのか？

グラフ電卓や数式処理電卓を積極活用した教育は、日本ではまだ数える程しか行われていません。特に、工学教育での利用は、皆無かもしれません。それは、このような機能を持つ電卓の存在自体が、日本ではあまり知られていないことによります。

しかし、世界（特に欧米）では、グラフ電卓の利用はもはや常識化しつつあると言われます。我々の短い実践でも、この電卓を長期にわたり有効活用した場合の教育効果には計り知れないものがあることが実感されます。日本では時期尚早でも、世界レベルでみると、すでに相当遅れているのです。

数式処理電卓は、日本で最も導入しやすく、また効果の上がりやすいのは、中学校であれば初等幾何の授業（TI-92Plusの幾何機能を利用）、高校であれば進学校の理数科、あるいは高専や大学工学部だと思います。特に、高専において、数学と工学の両面から数式処理電卓を5年間活用させた場合は、相当すごいことが起こりえるでしょう。福井高専では、平成12年度から新入生全員に購入させています。

しかし、すべての生徒に数式処理機能を持つグラフ電卓を利用させる必要もないでしょう。文系志向の生徒の場合は、数式処理機能を持たないグラフ電卓でも十分かと思われれます。昨今は数学離れがマスコミで喧伝されますが、これらの機器は、それを喰い止めるためのツールとして利用することもできるでしょう。グラフを通した視覚による理解は絶大な効果があります。

### Q.22 世界では、どの程度普及しているのか？

グラフ電卓を使用した数学教育の発祥の地は米国であり、それを主導してきたのは、オハイオ州立大学の Bert K. Waits 教授と Franklin Demana 教授を中心とするグループです。両教授は、1980年代初頭から数学教育にコンピューターを活用する研究を行っていました。しかし、コンピューターは教室で手軽に利用できるわけではなく、すべての学生にそのような環境を提供できる学校も限られました。

このような中で、1986年にカシオが世界で初めてグラフ電卓 fx-7000G を開発します。1985年に始まった C<sup>2</sup>CP プロジェクト (Calculator and Computer Precalculus Project) は、このグラフ電卓の数学教育における革新性に着目します。NSF(National Science Foundation) による多額の資金援助も得て微積分の改革運動に火がつけました。そして、1989年には米国数学教師協議会

(NTCM)による数学カリキュラムの基準に「適切な電卓がすべての児童・生徒にいつでも利用可能であるべきである」ことが盛り込まれるに至ります。

このような改革では現場教師の啓蒙やトレーニングが必要であることから、1988年にはT<sup>3</sup>(Teachers Teaching with Technology)と呼ばれる組織も設立されました。T<sup>3</sup>への参加者は年々増加し、1999年の第11回大会(シカゴ)では、25ヶ国から65名の招待者を含め2,700名以上の参加者で盛況だったということです。テキサスインスツルメントは、これらの運動の中から出されてきた多くの要望に応える形でグラフ電卓の改良を重ね、1996年には数式処理機能と幾何機能(カブリジオメトリ)とを備えたTI-92を、そして1998年にはTI-89を発売します。

このような運動の結果、米国では数学教育へのグラフ電卓の導入が加速します。所得の高低で教育に差が生じてはならないという観点から、州予算で州内全生徒のグラフ電卓購入を決める州(バージニア州)まで現れるなど、数学の授業でグラフ電卓の使用は常識化していると言われます。たとえば、米国高校数学の最上位レベルにあり大学数学の単位を高校在学中に取得できるAP Calculusの講座では、グラフ電卓の浸透率が90%にも及び、日常的に電卓を活用した教育が行われています。高校でグラフ電卓を使いこなして進学してきた学生に押される形で、大学の側もそれに対応せざるを得なくなっています。

このような米国の数学教育の改革に押される形で、フランス、オーストリア、デンマーク、北欧三国、スペイン、ポルトガル、カナダなど多くの国が、グラフ電卓の活用に取り組んでいます。デンマーク、ノルウエー、ポルトガルなどでは、カリキュラムでグラフ電卓の使用を義務化しています。スウェーデン、デンマーク、ポルトガル、そしてフランスでは、国家試験でグラフ電卓の使用を認めています。たとえば、フランスでは、大学の入学資格ともいえるべきNational Lyceeの試験で数式処理電卓の使用を認めています。これは、単純な計算問題は出題されないことを意味します。オーストリアでは、1991年の段階で、TI-92に組み込まれている数式処理ソフトDeriveを利用した数学教育を全高校生に対して行っています。かくして、現在、欧米の多くの国々の高校3年生の電卓の非使用率は、僅かに数%未満という状況にあります。

<http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/mathematics/sekai/nagasaki02.html>

なお、グラフ電卓を活用した教育改革に関するアメリカの状況については、以下が参考になるでしょう。 <http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/papers/c2pc10y.pdf>

このような数学教育へのテクノロジーの利用にはアジアのシンガポール、マレーシア、そしてタイでも関心を高め、一部の学校では電卓を活用した教育実践が始まっています。中国でも文部省が中心になり、この電卓の本格導入に向けて現在試行中。韓国も新学習指導要領の中にグラフ電卓を活用すべきことを盛り込み、本格活用を目指しています。

## Q.23 海外では、どのようなことが報告されているのか？

グラフ電卓を活用した数学教育は、欧米ではすでに常識化しつつあるようです。ある程度まとまった報告で入手しやすいものとして、オーストリアのTechnical College(15~19歳)におけるものがあります。30クラス750名の学生にTI-92を使用した場合の報告です(1998年)。

<http://www.ti.com/calc/docs/92teach.htm>

詳細は上記(A4で7頁)をご覧ください。結論部分を以下に転載します。

### 8. Conclusion:

According to this research there will be a tremendous change in teaching mathematics in



the years to come. Caused by the existence of the TI-92 there will be a change in teaching methods, topics and results.

Even teachers who have not used this calculator for various reasons so far, will have to change their teaching methods in the course of time because their students will own this calculator and they will want to use it in classes.

This research shows that teachers who use this calculator in their classes will get better results in general. Students who have been taught with this calculator and who use this calculator on their own will get better grades and they will understand mathematics much better.

#### 8. 結論:

この調査によれば、今後、数学の教え方には極めて大きな変化があり、TI-92 の存在のゆえに、教授法、扱う題材、そしてその成果には変化がおきるだろう。

これまで、いろいろな理由から、この電卓を使ってこなかった教師でさえ、そのうち授業の方法を変えなければならなくなるだろう。なぜならば、生徒たちはこの電卓を所有するようになるだろうし、授業で使いたいと思うだろうからである。

この電卓を授業で使う教師たちは、一般により良い成果を得るだろうことを、この調査は示している。この電卓で教えられ、しかも自分でこの電卓を使う生徒たちは、成績が向上するだろうし、数学をより良く理解するようになるだろう。

## Q.24 日本では、どの程度普及しているのか？

この電卓の数学教育上の意義を理解した幾つかの高専や高校の数学教員の間では、数学教育への活用を図るため「数ナビ活用研究会」を結成しており、平成 11 年の後半からメーリングリストで様々な情報が交換されています。以下では、平成 12 年度時点で、グラフ電卓や数式処理電卓を活用した授業を試みている高専や高校の状況として、その幾つかを紹介します。他にも、多くの学校が、グラフ電卓を活用した授業に取り組みつつあります。

石川高専 平成 11 年度の後期に、数式処理電卓 (TI-89) を 1 クラス分購入して授業で試行。同年の年度末にはさらに 1 クラス分を購入。平成 12 年度からは 2 クラス (1 年と 3 年) に長期貸与して、この電卓を本格利用した授業を実践中。

一関高専 平成 11 年度に数式処理電卓 (TI-89) を 45 台購入し、平成 12 年の 2 年生の微積分の授業と 4 年の応用数学 (フーリエ級数) の授業で使用。同年 6 月からは 2 クラス分の TI-89 の貸与を受け、平成 13 年 3 月まで 2 年の 2 クラスの学生に貸与して実践。

福井高専 平成 12 年度の新入生全員に、数式処理電卓 (TI-89) を購入させた。1 年の全クラスで、この電卓を利用した授業が行われている。

金沢高専 平成 8 年度より、グラフ電卓 (TI-83) を 신입生全員に購入させ、数学と物理を融合した総合科目「数物ハンズオン」で活用されている。

私立清風高校 (大阪) 平成 9 年度に数式処理電卓 (TI-92) を 60 台購入。平成 11 年度から理数科 (現 3 年) の学生に貸与した授業を実践中。この電卓の利用の普及を図るため、外部の教師向けに定期的な講習会も行われている。実際の教材や生徒の感想などが HP で公開されている。詳細は、次の URL を参照されたい。 <http://www.seifu.ac.jp/math/>

大阪府立高津高校 グラフ電卓 TI-82 を活用した授業を実践し、その教材が HP で公開されている。<http://www.asahi-net.or.jp/~jz4k-ktok/index.html>

岡山大学附属中学校 TI-92 と CBL を利用した授業を実践中。その情報はインターネットで公開されている。<http://www.fuzoku.okayama-u.ac.jp/ml/kyouka/math/denta.html>

日本数学教育学会高専・大学部会 平成 12 年度の日数教千葉大会において、研究発表初日の午前中に数式処理電卓の実践報告会を開催。そこでは、上記 4 高専の実践報告が行われると共に、参加者に数式処理電卓 (TI-89) を貸与して、これらの高専教官が中心となった講習が行われた。約 50 名の参加があり盛況であった。

その他 信州大学や鳥取大学の教育学部では、中学校での実験授業が行われている。茨城県や福井県では、教育センターが中心となった講習会が行われ、幾つかの中学校で実験授業が行われているようです。

## Q.25 良いことづくめだが、批判的な意見は出ていないのか？

このような新規の機器を使用し、さらには従来の教育方法を根底から覆すような方式に対しては、必ずしも成功した例ばかりではないでしょう。ある程度の試行錯誤を伴う側面があり、当然多くの批判もなされています。特に、米国では、電卓利用が小学校教育にまで持ち込まれる州もあり、それに対しては多くの批判があるようです。しかし、欧米の大勢がグラフ電卓の積極活用に進んでいることには間違いはないでしょう。どのような批判がなされているかは、以下の URL をご覧下さい。<http://www.mathematicallycorrect.com/>

我々は、主に、高校以上での利用を念頭においてグラフ電卓や数式処理電卓の活用を働きかけるものです。

## Q.26 おわりに

数式処理可能なグラフ電卓は、もはや電卓の範疇を超えるものです。この電卓を活用した数学教育は、従来はやりたくても出来なかったような全く新しい教育のあり方を可能にします。グラフ電卓を利用して世界で起きている「数学教育の革命」について、我々は本物だと考えます。この電卓を活用すると、「数学そのもの」を学生に味合わせることが可能になります。我々の実践でも、具体的には以下のようなことが可能になります。

### 学生の意識の向上

数式処理電卓を利用した授業に対する学生のアンケート結果をみると、数学に対する意識に著しい向上がみられる（一関高専）。

この電卓を利用すると、数学の理解がさらに深められる	60.3%
この電卓を使う授業はおもしろい	49.3%
この電卓を使うと、難しい内容も簡単に見えてくる	37.0%
この電卓があると、難しい計算も自分でやってみる気になる	35.6%
この電卓に出会って、数学について前より考えるようになった	32.9%

教師中心から学生中心の授業への転換

この電卓を利用すると、従来は教師が黒板に板書しながら教えていた内容を、学生自身が発見するよう導くことができ、教師中心から学生中心に大きく転換した授業が可能になった。たとえば、合成関数の微分公式や微積分の基本定理を学生に発見させるような授業が可能になった。

#### グラフ機能による理解力の向上

この電卓のグラフ機能を利用すると、数学的に高度な内容も、グラフから一目瞭然の理解をさせることができ、従来よりもストレートに内容を理解させることが可能になった。たとえば、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  は、 $y = \sin x$  と  $y = x$  のグラフとを同時に表示させて何度か拡大すると、これらのグラフはほぼ一直線で表示される。比が 1 に近づくことは、それを見れば一目瞭然です。

#### 新しい側面からの数学教育の可能性

この電卓を利用すると、数学的な内容について、学生に思考実験や、いろいろな試行錯誤させることができます。その作業は、数学的思考力を著しく進展させる可能性を持つものであり、数学教育にとって全く新しい側面からのアプローチが可能です。たとえば、関数  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  について、係数  $a, b, c$  とグラフの形状との関係について考察させるような課題を出すことが可能になります。

この電卓は、中学から大学までの数学教育で有効であり、数学のみならず大学理工系学部の専門科目でも活用されるべきです。また、昨今叫ばれている「数学離れ」を食い止めるためのツールとして利用することもできるでしょう。各位におかれましては、授業での活用を早急かつ真剣に検討されますよう希望するものです。

(以上)

## 参考文献・URL

- [1] 各社の数式処理電卓の詳細は、以下の URL を参照されたい。  
<http://www.casio.com/calculators/>  
<http://www.naoco.com/>
- [2] カブリジオメトリの中学校数学での利用法としては、例えば以下の URL を参照されたい。  
<http://www.mowmowmow.com/math/cabri/>
- [3] TI-92 は数式処理ソフトの国際コンペでマセマティカと並び首位タイになったことがある。  
TI-92 Wins System Challenge at Math Software Conference,  
<http://www.ti.com/calc/docs/swh/ti92wins.htm>
- [4] 井之上和代：TI-89 を利用した 2 次関数の学習から見る高専の数学教育, 福井工業高等専門学校研究紀要 自然科学・工学, 第 34 巻, pp.95-105, 2000
- [5] グラフ電卓に関する世界の主要論文は、以下の論文集にまとめられています。  
Edward D. Laughbaum (ed): *Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers*, The Ohio State University, 2000
- [6] 世界におけるグラフ電卓を活用した数学教育の改革の主導者である、オハイオ州立大学の Franklin Demana 教授と Bert K. Waits 教授の主要論文は、Waits 教授のホームページでその幾つかが公開されています。 <http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/papers.html>
- [7] グラフ電卓の数学教育上の意義について考えるとき、以下のものも参考になるでしょう。  
Heidi Pomerantz (ed.): *The Role of Calculators in Math Education*, 1997  
<http://www.ti.com/calc/docs/therole.html>  
Bernhard Kutzer: *The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*, 1999 <http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html>  
Anthony Ralston: *Let's Abolish Pencil-and-Paper Arithmetic*, 1999  
<http://www.doc.ic.ac.uk/~ar9/abolpub.htm>
- [8] 世界の状況を知るには、テキサスインスツルメント社の広報紙も参考になります。  
T.I.M.E: テキサスインスツルメント社 <http://www.naoco.com/calc/time.htm>
- [9] 国立教育研究所による、欧米各国の電卓の利用率を調べた調査があります。特に、高校では、もはやあたり前に使われていることが分かります。  
<http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/mathematics/sekai/nagasaki02.html>
- [10] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦編：テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997
- [11] 能田伸彦, 清水静海, 吉川成夫監修：「21 世紀への学校数学の創造～米国 NCTM による『学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード』～」, 丸善 (筑波大学出版会), 1997