

数理モデル教材開発研究会（秋田高専）

三角格子上のパーコレーション

梅野 善雄

（元）一関工業高等専門学校

2025 年 9 月 16～17 日

（注）この発表は，第 24・25 回グラフ電卓研究会（福井高専）
での発表内容をまとめたものである。

- 1 べき乗則とべき分布
 - べき乗則とべき分布
 - 実世界にみられる具体例
 - べき乗則と相転移
- 2 パーコレーション
 - パーコレーション (浸透現象)
 - パーコレーション相転移
 - 臨界指数とスケーリング則
- 3 三角格子上的パーコレーション
 - 三角格子とヘックスゲーム
 - 複素平面の単連結有界集合
 - スミルノフの定理
 - カーディの公式
 - 関数 $h(z)$ の正則性

べき乗則とべき分布

- べき乗則：2変量 x, y が, $y = kx^a$ のようなべき乗の関係にある.
- べき分布：確率密度関数が

$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \quad (a > 0, b > 0, x \geq b)$$

と表わされるような確率分布. パレート分布とも呼ばれる.

- 特徴：

- (1) 両対数グラフは直線になる. ($\log y = \log k + a \log x$)
- (2) スケールを変換しても同じ関係式を満たす.

$y = kx^a$ のとき, $X = cx, Y = c^a y$ と変数変換しても

$$Y = c^a y = c^a \cdot kx^a = k(cx)^a = kX^a$$

べき分布では, $f(cx) = \frac{1}{c^{a+1}} \frac{ab^a}{x^{a+1}} \propto f(x)$ (自己相似性)

「スケールがない」とか「スケールフリー」などと呼ばれる.
この性質を持つ関数は, べき関数に限られる.

実世界にみられる具体例

- 1 天文現象：
月表面のクレータの直径と個数，太陽フレアの規模と頻度等
- 2 自然現象：
降水量と降水回数，地震の規模と回数，火山噴火の規模と回数等
- 3 生物現象：
生物の体重と代謝速度，生物分類の種の数と属の数，魚群の規模と捕獲頻度等
- 4 人間の行動：
戦争による死者数と戦争の数，円ドル為替レートの変動幅と頻度，論文の共著人数と頻度等
- 5 ミクロの世界：
酵素反応を行う化合物の数と頻度，ゾル・ゲル転移点での濃度差と弾性率の関係等

★ミクロからマクロまで，さらには人間のいろいろな行動にいたるまで，いろいろな場面で「べき乗則」や「べき分布」に従う現象が見られる。

べき乗則と相転移

- 相転移：同じ物質でありながら、温度等を変化させると、突然異なる状態に変化する。
- 磁石の場合：熱していくと、ある温度で磁力を失う。その温度を T_c として $t = (T - T_c)/T_c$ とすると、磁化率 χ ，比熱 C ，自発磁化 m ，相関距離 ξ ，外部磁場 H ，そして相関関数を $G(r)$ とすると，次の関係が成り立つ。べき指数を，臨界指数という。

$$\chi \propto |t|^{-\gamma} \quad (T > T_c) \qquad \chi \propto |t|^{-\gamma'} \quad (T < T_c)$$

$$C \propto |t|^{-\alpha} \quad (T > T_c) \qquad C \propto |t|^{-\alpha'} \quad (T < T_c)$$

$$m \propto |t|^\beta \quad (T < T_c)$$

$$\xi \propto |t|^{-\nu} \quad (T > T_c) \qquad \xi \propto |t|^{-\nu'} \quad (T < T_c)$$

$$G(r) \propto r^{-\tau} e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (T \neq T_c) \qquad G(r) \propto r^{-d+2-\eta} \quad (T = T_c)$$

- 他の物質でも，上記に対応する物理量を考えると，臨界指数は多少異なっても，いずれもべき乗則で変化している。

スケーリング則

- 相転移する物質の臨界指数のパターンは限定的で、同じような値をとる幾つかのクラスに分類できるのではないかと予想されている。
- 臨界指数が同じような値をとるクラスは、普遍性 (ユニバーサル) クラスと呼ばれる。たとえば、下記のようなクラスがある。

クラス 臨界指数	平均場	2次元 イジング	2次元 パーコレーション
α	0	0	$-\frac{2}{3}$
β	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{36}$
γ	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{43}{18}$
δ	3	15	$\frac{91}{5}$

- これらの臨界指数は、どの普遍性クラスでも、スケーリング則と呼ばれる共通の関係式を満たすと予想されている。

$$2 - \alpha = \beta(\delta + 1) = \gamma + 2\beta$$

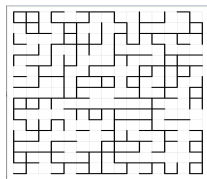
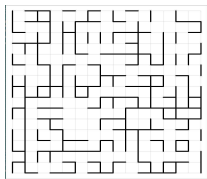
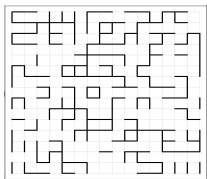
上記の値は、いずれもこれを満たしている。

パーコレーション (浸透現象)

- パーコレーションは、次々に何かが広がっていく (伝わっていく) 繋がり方に関する数学モデルで、普遍性クラスの一つである。

感染症の拡大, 森林火災, デマの拡散, 神経細胞の情報伝搬, 等々

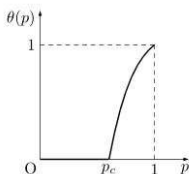
- 数学的には, 平面上の隣り合う格子点を一定の確率 p で結んで, 無限に繋がるのは確率 p がどのような場合であるかを考える。
- 下図は, 15×15 の正方格子における, $p = 0.45, 0.51, 0.55$ の場合の, 辺の繋がりを考えるボンドパーコレーションである。



- $p = 0.45$ のときは, 端から端まで繋がるクラスターはない。
- $p = 0.51$ のときは, 左側に下から上まで繋がるクラスターがある。
- $p = 0.55$ のときは, 下から上, 左から右に繋がるクラスターがある。

パーコレーション相転移

- 平面の場合は、 $p < \frac{1}{2}$ のときは無限に繋がることはなく、 $p > \frac{1}{2}$ のときは無限に繋がる確率 $\theta(p)$ が、突然、正になる。パーコレーション相転移と呼ばれる。



- 臨界点 p_c の近傍の状況を見るため、原点と繋がる格子点の集合 C_0 の個数 $|C_0|$ を考え、次のような関数を考える。

$$\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty) \qquad f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_p(|C_0| = n)$$

$$\chi(p) = E_p(|C_0|) \qquad \tau_p(x) = P_p(x \in C_0)$$

$$\xi(p) = \sqrt{\frac{1}{\chi(p)} \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} |x|^2 \tau_p(x)}$$

- $|C_0| = \infty$ となるのは、 $\theta(p) > 0$, $\chi(p) = \infty$, $\inf_x \tau_p(x) > 0$ の場合である。

臨界指数とスケーリング則

- 臨界点 p_c の近傍では、相転移の場合と同様に、いろいろな量が転移点との距離に関してべき乗則に従って変化する。
最後の式の d は、空間次元である。

$$\langle \alpha \rangle \quad \frac{d^3}{dp^3} f(p) \propto (p_c - p)^{-1-\alpha} \quad (p \uparrow p_c)$$

$$\langle \beta \rangle \quad \theta(p) \propto (p - p_c)^\beta \quad (p \downarrow p_c)$$

$$\langle \gamma \rangle \quad \chi(p) \propto (p_c - p)^{-\gamma} \quad (p \uparrow p_c)$$

$$\langle \nu \rangle \quad \xi(p) \propto (p_c - p)^{-\nu} \quad (p \uparrow p_c)$$

$$\langle \delta \rangle \quad P_{p_c}(|C_0| = n) \propto n^{-1-\frac{1}{\delta}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

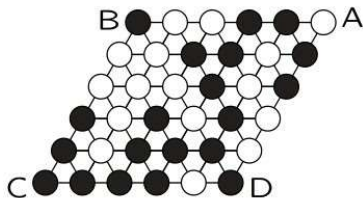
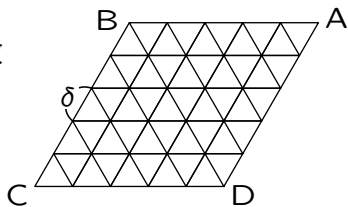
$$\langle \eta \rangle \quad \tau_{p_c}(x) \propto |x|^{2-d-\eta} \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

- 臨界点 p_c では、クラスターのサイズはべき分布にしたがう。
- 相転移と同様、臨界指数は次の関係式を満たすと予想されている。

$$2 - \alpha = \beta(\delta + 1) = \gamma + 2\beta$$

三角格子とヘックス・ゲーム

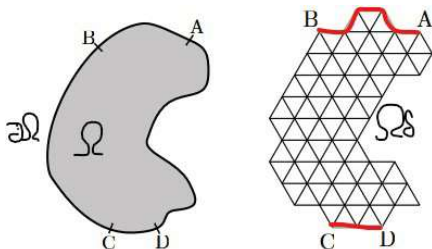
- 1 辺 1 の菱形を 1 辺 δ の正三角形に分割する。 $\delta \rightarrow 0$ のときは、格子点の数が無限大になる。
- 格子点に確率 p で黒丸を、確率 $1 - p$ で白丸を置く操作を交互に行い、すべての格子点を埋める。
- これをゲーム化したのは、「ヘックス・ゲーム」と呼ばれる。
- ヘックス・ゲームでは、黒丸が辺 AB から辺 CD に連結するか、または白丸が辺 BC から辺 AD に連結するかのいずれか一方が成立し、引き分けは起こらない。
- 黒丸に注目し、点 AB と辺 CD が連結される確率を $f_\delta(p)$ とすると、



$$f_\delta(p) + f_\delta(1 - p) = 1 \quad \therefore \quad f_\delta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

複素平面の単連結有界集合

- Ω を任意の有界で単連結な開集合とし、その境界を $\partial\Omega$ とする。
- 境界 $\partial\Omega$ 上に 4 点 A, B, C, D を、左回りに順番に並ぶように任意にとる。
- Ω の内側に入っている三角格子 Λ_δ を切り出して Ω_δ とし、 Ω_δ の境界の格子点で A, B, C, D に近い点を同じ記号で表わす。
- Ω_δ の境界に沿って、 A から B に向かって左回りの格子点を繋ぐ線を弧 \widehat{AB} とする。弧 \widehat{CD} も同様とする。



Ω の正則関数による変形とスミルノフの定理

- 三角格子 Ω_δ の全ての格子点に、 $p = \frac{1}{2}$ で黒石と白石を置いていく。
- 弧 \widehat{AB} と弧 \widehat{CD} を結ぶ道の存在確率を $f_\delta(\Omega; A, B, C, D)$ とする。
- \widehat{AB} と \widehat{CD} の連結確率を、 $\delta \rightarrow 0$ のときの極限值として定める。

$$f(\Omega; A, B, C, D) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(\Omega; A, B, C, D)$$

- 以上の状況で、次のことが成り立つ。

定理 1 (スミルノフ)

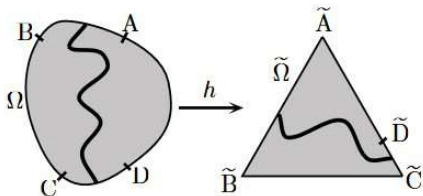
任意の 1 対 1 の正則関数 Φ に対して $\Omega' = \Phi(\Omega)$ とし、 A, B, C, D の Φ による像は $'$ をつけて表わすと、次のことが成り立つ。

$$f(\Omega; A, B, C, D) = f(\Omega'; A', B', C', D')$$

つまり、この連結確率には、任意の正則関数で変換しても変わらないという共形不変性がある。なお、三角格子 Λ_δ の正則関数による変形は行われぬ。

有界集合 Ω を 1 辺が 1 の正三角形に写す

- 集合 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に, 4 点 A, B, C, D を左回りに順番に取る.
- 1 辺が 1 の正三角形 $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ を考え, その内部の領域を $\tilde{\Omega}$ とする.
- 集合 Ω を $\tilde{\Omega}$ に移す 1 対 1 の正則関数 $h: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ が存在する.
- 正則関数 h は, $h(A) = \tilde{A}, h(B) = \tilde{B}, h(C) = \tilde{C}$ となるように取ることができ, $\tilde{D} = h(D)$ が正三角形の辺上に一意的に定まる.



- このとき次の公式が成り立つ. カーディの公式を利用すると, スミルノフの定理が容易に証明できる.

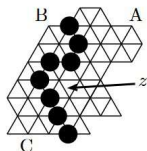
定理 2 (カーディの公式)

$$f(\Omega; A, B, C, D) = (\tilde{C} \text{ と } \tilde{D} \text{ の距離})$$

関数 $h(z)$ の構成

■ 関数 $h(z)$ の構成 (1)

- 三角格子 Ω_δ のいずれかの三角形内の点を z とし, 事象 $E_{A:B,C}(z)$ は, 黒石が連結している道により Ω_δ が2つに分離し, 一方に A と z が, 他方に B と C がある状況とする.
- $E_{A:B,C}(z)$ の確率を考え, $\delta \rightarrow 0$ とした極限を $h_{A:B,C}(z)$ とする.



$$h_{A:B,C}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(E_{A:B,C}(z))$$

- このとき, z が点であれば, $h_{A:B,C}(A) = 1$ であり, z が \widehat{BC} 上であれば, $h_{A:B,C}(z) = 0$ である.

- 同様にして $h_{B:C,A}(z)$, $h_{C:A,B}(z)$ を考えて, 複素関数 $h(z)$ と実関数 $s(z)$ を次により定める. $\tau = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ である.

$$h(z) = \frac{h_{A:B,C}(z) + \tau h_{B:C,A}(z) + \tau^2 h_{C:A,B}(z)}{\sqrt{3}}$$

$$s(z) = h_{A:B,C}(z) + h_{B:C,A}(z) + h_{C:A,B}(z)$$

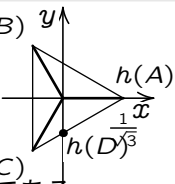
関数 $h(z)$ の性質

$h(z)$, $s(z)$ に関して, 次のことが成り立つ.

補題 1

(1) $h(z)$ は Ω 上で正則である. (2) $s(z)$ は Ω 上で一定値 1 をとる.

$h(z)$ は, Ω を 1 辺が 1 の正三角形に移すことの証明. $h(B)$



- $h_{A;B,C}(A) = 1$, $h_{B;C,A}(A) = 0$,
 $h_{C;A,B}(A) = 0$ より, $h(A) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- 同様に, $h(B) = \frac{\tau}{\sqrt{3}}$, $h(C) = \frac{\tau^2}{\sqrt{3}}$
- 点 $h(A)$, $h(B)$, $h(C)$ は 1 辺が 1 の正三角形の頂点である.

一方, $h_{A;B,C}(z)$ の定義から, $f(\Omega; A, B, C, D) = h_{A;B,C}(D)$

- 点 D は弧 \widehat{CA} 上にあり $h_{B;C,A}(D) = 0$. また, $s(z) = 1$ より,
 $h_{A;B,C}(D) + h_{C;A,B}(D) = 1$.
- $h(D)$ の分母を払うと, $\sqrt{3}h(D) = h_{A;B,C}(D) + \tau^2 h_{C;A,B}(D)$
- $h_{A;B,C}(D) = \frac{\sqrt{3}h(D) - \tau^2}{1 - \tau^2}$

補題 1 を用いたカーディの公式の証明 (概略)

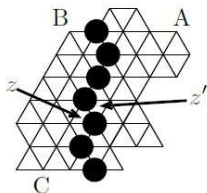
- 右辺の分子と分母を $\sqrt{3}$ で割ると,

$$f(\Omega; A, B, C, D) = \frac{h(D) - h(C)}{h(A) - h(C)}$$

- $h(D)$ は $h(C)$, $h(A)$ を結ぶ線分上にあるので, 右辺は実数であり, $h(C)$ と $h(D)$ の距離を表わす. //

- 次に, $h'(z)$ を調べるため,
 $E_{A;B,C}(z+h) - E_{A;B,C}(z)$ を検討.

- $E_{A;B,C}(z+h) - E_{A;B,C}(z)$ は,
 $A, z+h$ が連結した道の同じ側にある事象
と, A, z も同じ側にある事象の差集合なの
で, $A, z+h$ が同じ側にあり, A, z が異
なる側にある確率である.



- $P_{A;B,C}(z, z') \stackrel{\text{def}}{=} P(E_{A;B,C}(z'))$ が真 and $E_{A;B,C}(z)$ が偽)

関数 $h(z)$ の正則性の検討

補題 2

z を三角格子 Ω_δ の一つの三角形内の点とし, $z + \eta, z + \tau\eta, z + \tau^2\eta$ が, それぞれ隣接する三角形内の点となるように $\eta \in \mathbb{C}$ をとる.

このとき, 任意の $\delta > 0$ と任意の 3 点 A, B, C , そして上の条件を満たす任意の z, η について, 次のことが成り立つ.

$$P_{A;B,C}(z, z + \eta) = P_{B;C,A}(z, z + \tau\eta) = P_{C;A,B}(z, z + \tau^2\eta)$$

$h_{A;B,C}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(E_{A;B,C}(z))$ であることより, $\delta \rightarrow 0$ のときは

$$P_{A;B,C}(z, z') \rightarrow h_{A;B,C}(z') - h_{A;B,C}(z)$$

$P_{A;B,C}(z, z + \eta)$ の対称性から

$$\begin{aligned} h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z) &= h_{B;C,A}(z + \tau\eta) - h_{B;C,A}(z) \\ &= h_{C;A,B}(z + \tau^2\eta) - h_{C;A,B}(z) \end{aligned}$$

$h_{A;B,C}(z)$ の差分の利用

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \eta) - h(z)}{\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z)}{\eta} \\ &+ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \tau^2 \eta) - h_{A;B,C}(z)}{\tau^2 \eta} \\ &+ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \tau \eta) - h_{A;B,C}(z)}{\tau \eta}\end{aligned}$$

と $h_{A;B,C}(z)$ だけで表せる。 $h'(z)$ の η が、 $\tau\eta$, $\tau^2\eta$ の場合も $h_{A;B,C}$ を用いた同じ式で表わすことができるので、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \eta) - h(z)}{\eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \tau \eta) - h(z)}{\tau \eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \tau^2 \eta) - h(z)}{\tau^2 \eta}\end{aligned}$$

つまり、任意の η に対して、 η , $\tau\eta$, $\tau^2\eta$ という 3 つの方向からの $h(z)$ の微分が一致する。

おわりに

三角格子に関する部分は、下記文献の概要を紹介したものである。

田崎清明：三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性，数理科学，No.546，2008

<https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/pdf/suuriPercolation.pdf>

★ ChatGPT によれば、以下のようなことが返ってきた。

- 関数 $h(z)$ の正則性は， $h_{A;B,C}(z)$ が調和関数になることから導かれる。
- 三角格子のボンド・ボンドパーコレーションでは， $p_c \approx 0.347$
- 正方格子のボンド・パーコレーションでは $p_c = \frac{1}{2}$ ，
サイト・パーコレーションでは $p_c \approx 0.5927$ 。
- 臨界確率での連結している黒石の個数を s とすると，その個数はべき分布に従い $P(s) \sim s^{-\tau}$ であり， $\tau = \frac{187}{91} \approx 2.055$ である。
- 三角格子ではない場合に，臨界点における共形不変性は未証明。

【終わり】