

三角格子上的パーコレーション

梅野 善雄

(元) 一関工業高等専門学校

2025 年 6 月 14 日

[田崎清明：三角格子上的臨界パーコレーションの共形不変性] の紹介
<https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/pdf/suuriPercolation.pdf>

パーコレーション (浸透現象)

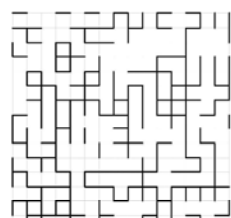
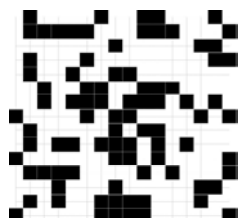
相転移現象の数学モデルが、パーコレーション (浸透現象) である。

- パーコレーションは、次々に何かが広がっていく (伝わっていく) 繋がり方に関する数学モデルである。

感染症の拡大の仕方, 森林火災, デマの拡散

神経細胞の情報伝搬, 多孔性物質の浸透の仕方, 等々

- 数学的には, 平面上の格子点を考えて, その格子点を一定の確率 p で占有する. 隣り合う占有された格子点を繋いでいくとき, 無限に繋がる道ができるのは, 確率 p がどのような場合であるかを考える.
- 占有された点を考えるときはサイトパーコレーション (左図), 隣り合う格子点を確率 p で辺で結んで無限に繋がる場合を考えるときはボンドパーコレーション (右図) という.

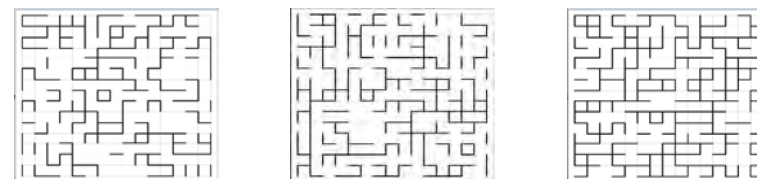


目 次

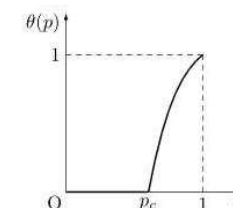
- 1 パーコレーション
 - パーコレーション (浸透現象)
 - パーコレーション相転移
 - 三角格子とヘックス・ゲーム
- 2 複素平面上の三角格子
 - 複素平面上の三角格子
 - 複素平面の単連結有界集合
 - 正則関数による変形とスミルノフの定理
- 3 スミルノフの定理の証明
 - カーディの公式
 - カーディの公式による証明
 - 正三角形に変換する正則関数の構成
 - カーディの公式の証明
 - 関数 $h(z)$ の正則性

パーコレーション相転移

- 下図は, 15×15 の正方格子における, $p = 0.45, 0.51, 0.55$ の場合のボンドパーコレーションである. (注) 外枠は気にしない!

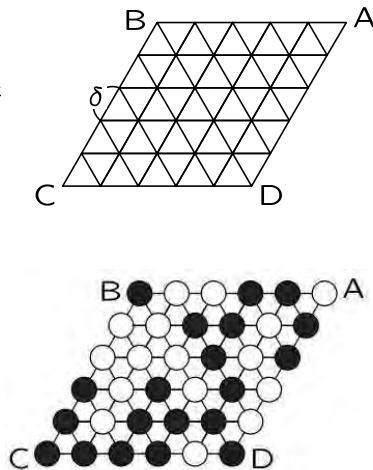


- $p = 0.45$ のときは, 端から端まで繋がるクラスターはない.
 $p = 0.51$ のときは, 左側に下から上まで繋がるクラスターがある.
 $p = 0.55$ のときは, 下から上, 左から右に繋がるクラスターがある.
- 平面の場合は, $p < \frac{1}{2}$ のときは無限に繋がることはなく, $p > \frac{1}{2}$ のときに突然無限に繋がる確率 $\theta(p)$ が正になる. 相転移と同じ現象なのでパーコレーション相転移と呼ばれる.
平面の場合の臨界確率は $p_c = \frac{1}{2}$ である.



三角格子とヘックス・ゲーム

- 平面全体で考えるのは難しいので、1 辺が 1 の菱形を、1 辺が δ の正三角形に分割した三角格子を考える。
 $\delta \rightarrow 0$ の場合は、格子点の数が無限大の場合を考えることになる。
- 格子点に確率 p で黒丸を、確率 $1 - p$ で白丸を置く操作を交互に行い、すべての格子点を埋める。
- これをゲーム化したのは、「ヘックス・ゲーム」と呼ばれる。
- ヘックス・ゲームでは、黒丸が辺 AB から辺 CD に連結するか、または白丸が辺 BC から辺 AD に連結するかのいずれか一方が成立し、引き分けは起こらないことが知られている。



5 / 22

辺 AB と辺 CD が連結する確率

- 引き分けは起こらないので、次のことが成り立つ。

$$(AB \text{ と } CD \text{ の連結確率}) + (BC \text{ と } AD \text{ の連結確率}) = 1$$
- 黒丸に注目し、点 AB と辺 CD が連結される確率を $f_\delta(p)$ とすると、

$$f_\delta(p) + f_\delta(1 - p) = 1 \quad (\text{双対性})$$
- $\delta \rightarrow 0$ のとき、次のことが証明されている。

$$p < \frac{1}{2} \implies f_\delta(p) \rightarrow 0$$

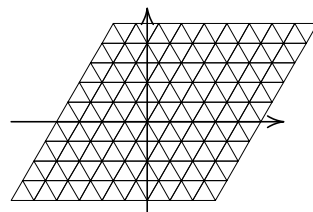
$$p > \frac{1}{2} \implies f_\delta(p) \rightarrow 1$$
- $p = \frac{1}{2}$ の前後で $f_\delta(p)$ の振るまいが大きく変わるので、これは相転移現象の一つとみれる。
- さらに、 $f_\delta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ が δ の値に依らず成り立つ。
 この値は格子点の数にはよらないので、スケール不変性がある。

6 / 22

複素平面の三角格子

- 三角格子上のパーコレーションを複素平面で考える。
- 1 辺 δ の無限に大きな三角格子を考え、格子点の集合を Λ_δ とする。
- $\tau = \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると、 Λ_δ は次式で表される。

$$\Lambda_\delta = \{j\delta + k\tau\delta \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$$



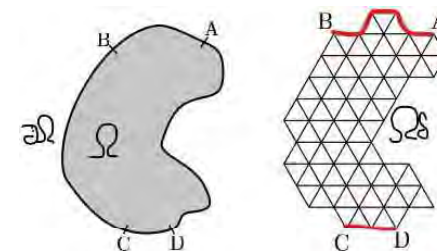
- $1 + \tau = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ である。 $\delta = 1$ として考えると

$$\begin{cases} k = 0 \text{ のときは,} & \text{実軸上の整数点} \\ j = 0 \text{ のときは,} & y = -\sqrt{3}x \text{ 上の点} \\ j = k \text{ のときは,} & y = \sqrt{3}x \text{ 上の点} \end{cases}$$

7 / 22

複素平面の単連結有界集合

- Ω を任意の有界で単連結な開集合とし、その境界を $\partial\Omega$ とする。
- 境界 $\partial\Omega$ 上に 4 点 A, B, C, D を、左回りに順番に並ぶように任意にとる。
- Ω の内側に入っている三角格子 Λ_δ を切り出して Ω_δ とし、 Ω_δ の境界の格子点で A, B, C, D に近い点を同じ記号で表わす。
- Ω_δ の境界に沿って、A から B に向かって左回りの格子点を繋ぐ線を弧 $\widehat{AB}$ とする。弧 $\widehat{CD}$ も同様とする。



8 / 22

Ω の正則関数による変形とスミルノフの定理

- 三角格子 Ω_δ の全ての格子点に, $p = \frac{1}{2}$ で黒石と白石を置いていく.
- 弧 $\widehat{AB}$ と弧 $\widehat{CD}$ を結ぶ道の存在確率を $f_\delta(\Omega; A, B, C, D)$ とする.
- $\widehat{AB}$ と $\widehat{CD}$ の連結確率を, $\delta \rightarrow 0$ のときの極限值として定める.

$$f(\Omega; A, B, C, D) = \lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(\Omega; A, B, C, D)$$

- 以上の状況で, 次のことが成り立つ.

定理 1 (スミルノフ)

任意の 1 対 1 の正則関数 Φ に対して $\Omega' = \Phi(\Omega)$ とし, A, B, C, D の Φ による像は ' をつけて表わすと, 次のことが成り立つ.

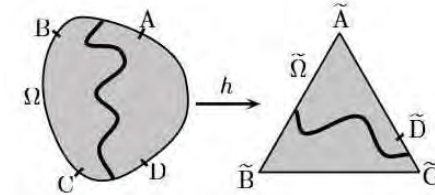
$$f(\Omega; A, B, C, D) = f(\Omega'; A', B', C', D')$$

つまり, この連結確率には, 任意の正則関数で変換しても変わらないという共形不変性がある. なお, 三角格子 Λ_δ の正則関数による変形は行われない.

9 / 22

有界集合 Ω を 1 辺が 1 の正三角形に写す

- 集合 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に, 4 点 A, B, C, D を左回りに順番に取る.
- 1 辺が 1 の正三角形 $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ を考え, その内部の領域を $\tilde{\Omega}$ とする.
- 集合 Ω を $\tilde{\Omega}$ に移す 1 対 1 の正則関数 $h: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ が存在する.
- 正則関数 h は, $h(A) = \tilde{A}, h(B) = \tilde{B}, h(C) = \tilde{C}$ となるように取ることができ, $\tilde{D} = h(D)$ が正三角形の辺上に一意的に定まる.



- このとき, 次のことが成り立つ.

定理 2 (カーディの公式)

$$f(\Omega; A, B, C, D) = (\tilde{C} \text{ と } \tilde{D} \text{ の距離})$$

10 / 22

カーディの公式によるスミルノフの定理の証明

- 記号を復習すると,
 - Ω は, 有界で単連結な開集合
 - Ω' は, 任意の 1 対 1 の正則関数 Φ による Ω の像
 - h は, Ω を 1 辺が 1 の正三角形 $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ に写す写像で, $h(A) = \tilde{A}, h(B) = \tilde{B}, h(C) = \tilde{C}$ を満たす.
 - リーマンの写像定理などで, この正則関数 h は一意的に定まる.

- 以上を元にとすると,
 - $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega', h: \Omega \rightarrow \triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ である.
 - $h' = h \circ \Phi^{-1}$ とおくと, $h': \Omega' \rightarrow \triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega' & \xleftarrow{\Phi} & \Omega \xrightarrow{h} \triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} \\ & & \searrow h \circ \Phi^{-1} \end{array}$$

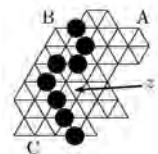
- h' は, Ω' を $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ に写す正則関数であり,
- 4 つの点 A', B', C', D' は, それぞれ $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ に写され,
- 連結確率 $f(\Omega'; A', B', C', D')$ は ($\tilde{C}$ と $\tilde{D}$ の距離) に等しい.
- したがって,

$$f(\Omega; A, B, C, D) = f(\Omega'; A', B', C', D') \quad //$$

11 / 22

関数 $h(z)$ の構成 (1)

- Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に, 左回りに 3 点 A, B, C を取る.
- Ω 内の三角格子 Ω_δ の格子点に, 確率 $p = \frac{1}{2}$ で黒石と白石を置く.
- 三角格子 Ω_δ のいずれかの三角形内の点を z とする.
- 事象 $E_{A:B,C}(z)$ は, 黒石が連結している道により Ω_δ が 2 つに分離し, 一方に A と z が, 他方に B と C がある状況とする.
- $E_{A:B,C}(z)$ の確率を考え, $\delta \rightarrow 0$ とした極限を $h_{A:B,C}(z)$ とする.



$$h_{A:B,C}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(E_{A:B,C}(z))$$

この値は, 連結した道ができる確率に依存する.

- 次のことが明らか.
 - z が点 A であれば, $h_{A:B,C}(A) = 1$ である.
 - z が $\widehat{BC}$ 上にあれば, $h_{A:B,C}(z) = 0$ である.
- 同様にして, $h_{B:C,A}(z), h_{C:A,B}(z)$ を考える.

12 / 22

関数 $h(z)$ の構成 (2)

- $\tau = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を用いて, 複素関数 $h(z)$ と実関数 $s(z)$ を次のように定める. $\tau^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ である.

$$h(z) = \frac{h_{A;B,C}(z) + \tau h_{B;C,A}(z) + \tau^2 h_{C;A,B}(z)}{\sqrt{3}}$$

$$s(z) = h_{A;B,C}(z) + h_{B;C,A}(z) + h_{C;A,B}(z)$$

- $h(z), s(z)$ に関して, 次のことが成り立つ.

補題 1

(1) $h(z)$ は Ω 上で正則である. (2) $s(z)$ は Ω 上で一定値 1 をとる.

- (2) は, 点 z は A, B, C のいずれかと同じ側にあることから.
- 補題 1 を用いると, 定理 5(カーディの公式) が証明できる.

13 / 22

カーディの公式の証明 (連結確率と距離)

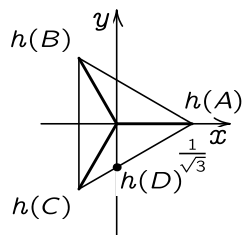
- $h_{A;B,C}(z)$ の定義から, $f(\Omega; A, B, C, D) = h_{A;B,C}(D)$
- 点 D は弧 $\widehat{CA}$ 上にあるから, $h_{B;C,A}(D) = 0$ である.
- $s(z) = 1$ より, $h_{A;B,C}(D) + h_{C;A,B}(D) = 1$
- $h(D)$ の分母を払うと, $\sqrt{3}h(D) = h_{A;B,C}(D) + \tau^2 h_{C;A,B}(D)$
- $h_{C;A,B}(D) = 1 - h_{A;B,C}(D)$ より

$$h_{A;B,C}(D) = \frac{\sqrt{3}h(D) - \tau^2}{1 - \tau^2}$$

- 右辺の分子と分母を $\sqrt{3}$ で割ると,

$$f(\Omega; A, B, C, D) = \frac{h(D) - h(C)}{h(A) - h(C)}$$

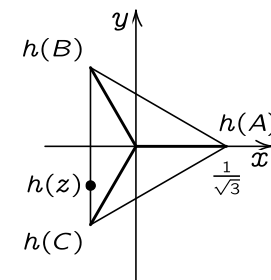
- $h(D)$ は $h(C), h(A)$ を結ぶ線分上にあるので, 右辺は実数であり, $h(C)$ と $h(D)$ の距離を表わす. よって, 定理 5 が証明された.



15 / 22

カーディの公式の証明 (正三角形に写す)

- $h_{A;B,C}(A) = 1, h_{B;C,A}(A) = 0, h_{C;A,B}(A) = 0$ であるので, $h(A) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である.
- 同様に, $h(B) = \frac{\tau}{\sqrt{3}}, h(C) = \frac{\tau^2}{\sqrt{3}}$
- 3 点 $h(A), h(B), h(C)$ は 1 辺が 1 の正三角形の頂点である.
- z を $\widehat{BC}$ 上にとると $h_{A;B,C}(z) = 0$ であるから,
 - $h(z) = \frac{\tau h_{B;C,A}(z) + \tau^2 h_{C;A,B}(z)}{\sqrt{3}}$
 - $s(z) = 1$ より $h_{B;C,A}(z) + h_{C;A,B}(z) = 1$
 - $h(z)$ は $h(B)$ と $h(C)$ を結ぶ線分上にある.
 - z が他の弧上にあるときも同様に三角形の辺上にある.
- $h(z)$ は領域 Ω を 1 辺が 1 の正三角形の内部に写す.

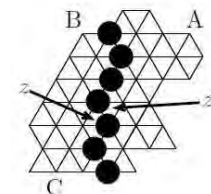


14 / 22

関数 $h(z)$ の正則性の検討

$$h(z) = \frac{h_{A;B,C}(z) + \tau h_{B;C,A}(z) + \tau^2 h_{C;A,B}(z)}{\sqrt{3}}$$

- $h'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(z+h) - h(z)}{h}$ を調べるには, $h_{A;B,C}(z+h) - h_{A;B,C}(z)$ 等について知る必要がある.
- $h_{A;B,C}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(E_{A;B,C}(z))$ なので, $E_{A;B,C}(z+h) - E_{A;B,C}(z)$ を検討.
- $E_{A;B,C}(z+h) - E_{A;B,C}(z)$ は, $A, z+h$ が連結した道の同じ側にある事象と, A, z も同じ側にある事象の差集合なので, $A, z+h$ が同じ側にあり, A, z が異なる側にある確率である.
- そこで, 領域 Ω 内の三角格子を Ω_δ とし, z, z' を, Ω_δ の三角形内の点とすると, $P_{A;B,C}(z, z')$ を, 次のことが成り立つ確率とする.



$E_{A;B,C}(z')$ が真で, $E_{A;B,C}(z)$ が偽である.

16 / 22

$P_{A;B,C}(z, z')$ の対称性

$P_{A;B,C}(z, z')$ には、次のような対称性がある。

補題 2

z を三角格子 Ω_δ の一つの三角形内の点とし、 $z + \eta, z + \tau\eta, z + \tau^2\eta$ が、それぞれ隣接する三角形内の点となるように $\eta \in \mathbb{C}$ をとる。

このとき、任意の $\delta > 0$ と任意の 3 点 A, B, C 、そして上の条件を満たす任意の z, η について、次のことが成り立つ。

$$P_{A;B,C}(z, z + \eta) = P_{B;C,A}(z, z + \tau\eta) = P_{C;A,B}(z, z + \tau^2\eta)$$

$h_{A;B,C}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(E_{A;B,C}(z))$ であることより、 $\delta \rightarrow 0$ のときは

$$P_{A;B,C}(z, z') \rightarrow h_{A;B,C}(z') - h_{A;B,C}(z)$$

であり、 η を $\tau\eta, \tau^2\eta$ にしても成立する。 $\tau^3 = 1$ である。 $\delta \rightarrow 0$ のときは $h_{A;B,C}(z)$ では、 $h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z)$

$$= h_{B;C,A}(z + \tau\eta) - h_{B;C,A}(z)$$

$$= h_{C;A,B}(z + \tau^2\eta) - h_{C;A,B}(z)$$

17 / 22

$h_{A;B,C}(z)$ の差分の対称性

■ $h_{A;B,C}(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} P(E_{A;B,C}(z))$ より、 $\delta \rightarrow 0$ のときは

$$\begin{aligned} h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z) &= h_{B;C,A}(z + \tau\eta) - h_{B;C,A}(z) \\ &= h_{C;A,B}(z + \tau^2\eta) - h_{C;A,B}(z) \end{aligned}$$

■ η を $\tau\eta$ で置きかえると、

$$\begin{aligned} h_{A;B,C}(z + \tau\eta) - h_{A;B,C}(z) &= h_{B;C,A}(z + \tau^2\eta) - h_{B;C,A}(z) \\ &= h_{C;A,B}(z + \eta) - h_{C;A,B}(z) \end{aligned}$$

■ η を $\tau^2\eta$ で置きかえると、

$$\begin{aligned} h_{A;B,C}(z + \tau^2\eta) - h_{A;B,C}(z) &= h_{B;C,A}(z + \eta) - h_{B;C,A}(z) \\ &= h_{C;A,B}(z + \tau\eta) - h_{C;A,B}(z) \end{aligned}$$

19 / 22

3 点 $z + \eta, z + \tau\eta, z + \tau^2\eta$ の関係

$$P_{A;B,C}(z, z + \eta) = P_{B;C,A}(z, z + \tau\eta) = P_{C;A,B}(z, z + \tau^2\eta)$$

■ 補題 2 の第 1 式は、連結した道により 2 点 $A, z + \eta$ が同じ側にある、2 点 $A, z + \tau\eta$ が異なる側にある確率である。

第 2 式は $B, z + \tau\eta$ と B, z について、

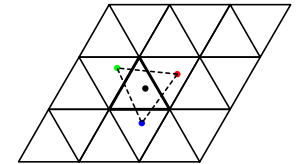
第 3 式は $C, z + \tau^2\eta$ と C, z について同様の確率を考えると、それらの確率はいずれも一致することを述べている。

■ 3 点 $z + \eta, z + \tau\eta, z + \tau^2\eta$ は、 z を含む三角形と隣り合う異なる三角形内にあり、 z を中心として 120° ずつ回転した点になる。

■ $\eta = \frac{\sqrt{5} + i}{\sqrt{18}}$ とすると $|\eta| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

であり、たとえば右図の状況になる。

(z : 黒, $z + \eta$: 赤, $z + \tau\eta$: 緑, $z + \tau^2\eta$: 青)



18 / 22

関数 $h(z)$ の正則性の検討 (2)

補題 2 より導かれた差分の関係式を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \eta) - h(z)}{\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z)}{\eta} \\ &\quad + \tau \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{B;C,A}(z + \eta) - h_{B;C,A}(z)}{\eta} \\ &\quad + \tau^2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{C;A,B}(z + \eta) - h_{C;A,B}(z)}{\eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z)}{\eta} \\ &\quad + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \tau^2\eta) - h_{A;B,C}(z)}{\tau^2\eta} \\ &\quad + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h_{A;B,C}(z + \tau\eta) - h_{A;B,C}(z)}{\tau\eta} \end{aligned}$$

と $h_{A;B,C}(z)$ だけで表せる。 $\tau^3 = 1$ を利用した。

20 / 22

関数 $h(z)$ の正則性の検討 (3)

- 同様の变形から, $h'(z)$ の η が, $\tau\eta, \tau^2\eta$ の場合も $h_{A;B,C}$ を用いた同じ式で表わすことができるので, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \eta) - h(z)}{\eta} \\&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \tau\eta) - h(z)}{\tau\eta} \\&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h(z + \tau^2\eta) - h(z)}{\tau^2\eta}\end{aligned}$$

- つまり, 任意の η に対して, $\eta, \tau\eta, \tau^2\eta$ という 3 つの方向からの $h(z)$ の微分が一致する.
- この場合は, 以上のことだけで正則性が保証されるようである. それは, $h_{A;B,C}(z)$ が調和関数であることからの帰結のようである.
- ★ 以上, 田崎解説を紹介した.
複素関数論に詳しい方の補足を頂きたい!

【終わり】

[参考] 数ナビの部屋 <https://yunavi.lsv.jp/>

グラフ電卓絡みで開設した Web サイトであるが, いろいろなページで構成される.

- グラフ電卓: 活用事例 (数学・工学)・操作マニュアル等
- 数学関係: TeX, emath, MePoTeX, gnuplot, Maxima, R
- 高専関係: 「高専教育」諸論考・学業意識の推移・高専リンク
- リンク集: 数学学習・べき分布・学習総合・悩みごと等

下記は, 「べき分布」に関するリンク集のメニューである.

■ 「べき分布」: 関連リンク集 [Map]

はじめに(概説)	「べき分布」の解説	「べき分布」の具体例
「べき分布」と自然現象	「べき分布」と生物現象	「べき分布」と社会現象
「べき分布」と経済現象	「べき分布」とネットワーク	「べき分布」のメカニズム
相転移・臨界現象	パーコレーション(浸透現象)	複雑系・フラクタル
自己組織化臨界現象	シミュレーション	参考文献