

数式処理電卓を最大限活かした工学教育の可能性

Possibility of Engineering Education That Makes Use of Algebraic Calculators by Various Scenes

梅 野 善 雄^{※1}

Yoshio UMENO

Algebraic calculators are graphing calculators with a feature of computer algebra system. It can be said that we can solve mathematics only by pushing some keys of these calculators in technical colleges or universities. They also possess another feature, so we can make extensive use in engineering education. For example, we can use them for a basic education, a programming education, English education, and creative thinking tools for excellent students.

In this paper, we will introduce the summary of algebraic calculators, then, consider how we utilize them in engineer education.

Keywords : Algebraic Calculators, Engineering Education, Basic Education, Creative Thinking

キーワード：数式処理電卓，工学教育，基礎教育，創造的思考

1. はじめに

少子化傾向が加速する中で，大学全入化の時代が現実のものになりつつある．この状況では，入学時に厳しい選抜方法を課すことは学生から敬遠される．大学にとっては入学定員を確保することが最重要課題である．しかも，高校における学習指導要領の改訂により入学する学生の知識量は以前とは比べものにならないくらい多様になってきた．特に，数学において顕著であり，微積分について十分な知識を学ばないまま理工系の学部に入学者が増えてくる場合も少なくない．受験科目を増やすと今度は受験者数の減少に繋がるおそれがあり，そう簡単に科目数を変更することもできない．

中央教育審議会の答申にも見られるように，大学教育においては卒業時の学力保証の厳格化が求められてきている．このような中では，いったん入学させた以上，大学教育に必要な学力は全て大学が入学後に身につけさせなければならない．各大学とも，新入生の能力の多様さに戸惑いつつも，大学教育を行うために必要な導入教育・基礎教育を，手探りをしながら必死で進めているというのが現状ではないだろうか．

著者は，本誌で，数式処理可能な電卓について紹介し，工学教育における有用性について訴えたことがある^{1), 2)}．最近の大学における導入教育の大変さを目にすると，この電卓は大学の導入教育・基礎教育において使用すれば，大きな威力を発揮するのではないかと考えられている．さらには，その後の工学系専門科目の学習やプログラミング教育，そして，

TOEICなどの英語教育においても十分活用できるのではないかとと思われる．

そこで，この電卓の工学教育における有用性について再度紹介させていただくと同時に，積極活用した場合の工学教育の可能性について考察したい．

2. 数式処理電卓の概要

数式処理のできるグラフ電卓としては，カシオのClassPAD，テキサスインスツルメントのvoyage200とTI-89 titanium，そしてヒューレットパッカートのHP-50Gがある³⁾．ここでは，図1に示すvoyage200を例にとり，その機能を概観する．

この電卓には，パソコン用の数式処理ソフトDERIVEが組み込まれている．メモリーはRAM (188KB)，フラッシュROM (2.7MB)である．QWERTYキーボードであるのでプログラムを組むのも容易である．構造化プログラミング (TI-BASIC) の機能があり，数式処理の機能をプログラムの中で利用できる．単4アルカリ乾電池4本で稼働する．



図1 数式処理電卓 voyage200

平成 21 年 11 月 9 日受付

※1 一関工業高等専門学校

数式処理の機能としては、式の展開、因数分解、方程式の解法機能や、微分積分に関する各種の機能、グラフの描画機能（曲面のグラフも描画可能）がある。外部機器（別売）と接続すると、多様なセンサーを通して実データを直接収集することもできる。距離、音、温度、PH、圧力、速度等の多数のセンサーが用意されている。また、統計機能も充実しており、必要なデータが入力されていれば、統計上の推定・検定等の主要な計算を電卓のキー操作だけで行うことができる。その機能は、数式処理ソフトであるMathematicaやMapleの小型版と捉えた方がイメージしやすいかもしれない。計算速度（CPUはモトローラ68000）やグラフの表示精度（モノクロ128×240ピクセル）に目をつぶる必要はあるが、パソコンを開かずとも「何時でも・何処でも」携帯電話の感覚で数式処理や統計機能を利用できることの利点は大きい。

特に、単なる式の計算ばかりではなく、その計算の意味をグラフ上から考えたり、座標を表で示して数値の変化の上から考えることもできる。式・グラフ・数値の3つの側面からの総合的な理解を容易に得ることができるが、この電卓の特徴的なことである。

以下に微積に関する画面例を示す。図2ではテイラー展開と微分方程式の解析解が表示されている。図3ではVan der Pol微分方程式のベクトル場と解曲線が表示されている。

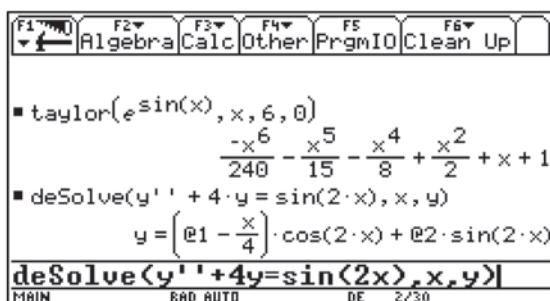


図2 微分の計算例

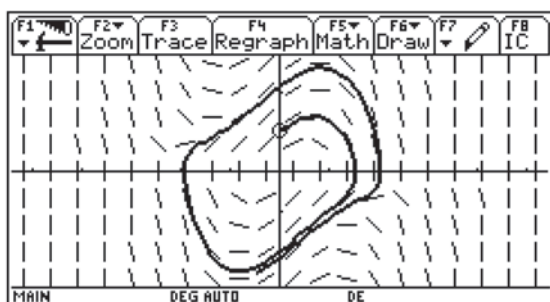


図3 ベクトル場と解曲線

3. 導入教育・基礎教育での利用

多様な数学力を持つ新入生に対応するため、その学部で必要とする数学を学習してこなかった者、あるいは学習はしてきたが十分な理解が得られていない者を対象に、多くの大学では高校レベルの数学を学ばせる機会を与えている。そこでは高校の授業並みの細やか

な教育指導が行われており、そのような指導のできる教員の確保が重要になってくる。高校の退職教員の活用など、各大学で様々な工夫がなされている^{4), 5)}。

数学や物理の基礎部分での学生の手まづきには様々なタイプがあり、授業で全体に注意しただけで全員に伝えることは不可能に近い。そのため、学習支援センター等の名称で、疑問に思う箇所を学生が自由に質問に行ける仕組みを整えているところも多い。そのようなセンターを設置するには、必要な施設や教員の確保など、大学側にも相当の経営努力が求められる。

しかし、そのような努力をしても、自分で質問に行き疑問を解消しようとする学生は一部の学生に過ぎないのが現状であろう。分からない箇所は自分で考えたり友人に聞くなどして解決を図っている者も多いと思われるが、疑問をひたすら蓄積していくだけの学生も少なくないと思われる。

数式処理のできる電卓は、他の人に質問しにくい学生でも自力で疑問を解消できる可能性を秘めている。例えば、数学ではいろいろな計算をしなければならないが、その計算過程が全て細かくテキストに記載されているわけではない。自明と思われる箇所や、ちょっと自分で計算すれば容易に分かると思われるところは省略した記述になっていることも多く、そのような箇所でもつまずく学生も多い。計算過程は理解できても、その計算の意味が理解できていない場合もある。

そのようなとき、数式処理ができグラフ描画もできる電卓は、いろいろな計算やグラフの確認のために利用できる。途中の計算過程が明示されていない場合でも、対応する計算式を入力すれば途中経過をある程度知ることができる。グラフを表示させたり座標を表で表示させることも容易である。自分の行った計算結果が正しいかどうか、自分で描いたグラフが正しいかどうか、いつでも簡単に確かめることができる。

そのようにして、個々の学生が自分の疑問内容に応じて電卓を操作すれば、自分でその疑問を解決できる場合が増えるだろうことが予想される。学生には理解の「壺」があり、それは個々の学生により異なるものである。この電卓は、学生側の多様な理解の壺に、十分対応できるのではないと思われる。

数式処理ソフトでも同様のことは可能であるが、それを行うには、パソコンを起動させて数式処理ソフトを動かし、必要なコマンドを打ち込む必要がある。市販の数式処理ソフトは、教育用ではあっても気軽に購入できる価格ではない。MaximaやXcasなどフリーの数式処理ソフトもあるが、そのようなソフトを使い慣れていない初学者に使用させることには躊躇がある。

電卓であれば、気になったとき「何時でも・何処でも」幾つかのキーを打ち込むだけでよい。パソコン室に出向く必要もなければ、その場でノートパソコンを広げる必要もない。微分・積分や行列・行列式の表示

も「見たまま」の表示である。導入教育等で基礎部分を確認する場合においては、機能性よりもこの利便性の重要性の方が上回るのではないだろうか。

特に、理工系の学生であれば、さらに線形代数、微分方程式、フーリエ変換、ラプラス変換、統計解析、プログラミングなども学ぶことになる。この電卓は、応用数学や応用物理などで出てくる計算にもある程度対応可能であり、導入教育・基礎教育に留まらず、卒業時まで十分利用できるレベルにあると思われる。

4. 工学系専門科目での利用

数式処理機能のあるグラフ電卓は、入学時の基礎教育のみならず、その後の専門科目の学習においても大きな教育効果が期待される。理工系の専門科目で現れる関数や方程式は、数学の教科書にある簡単な係数や解ばかりではない。その時点で必要な数学について基礎的な理解や計算力が身につけている場合は、単に煩雑なだけの計算に時間を費やすよりは、その先の思考のために時間を費やすべきであろう。数学が工学において一つの道具として利用されるのであれば、そのような場合は数式処理機能を積極的に活用することに躊躇する必要はないのではないだろうか。たとえば、文字式を含む、単純ではあるが煩雑な長い計算を行う必要が出てきたときは、即座に数式処理機能を利用して結果を出力させ、その結果の考察に時間を費やすべきではないだろうか。

著者が学生だった頃は、各種の計算には計算尺や対数表などが不可欠であった。現在、それは過去の遺品となり、関数電卓に置きかわっている。その後、数式処理を行う電卓が現れてから早10数年になる。どのような数式処理を行うべきかは人間が考える部分である。その本質部分を押さえている限り、そして工学上の問題意識を持っている限り、パソコンや電卓の数式処理を利用させることに支障があるとは思えない。数学では一瞬の閃きが本質的である。思いついたとき、「何時でも・何処でも」数式処理を試すことのできる電卓の利便性には、計り知れない可能性があるように思えてならない。

たとえば、工学で頻出する微分方程式にしても、2階定数係数線形であれば解析解を表示し、初期値を与えると解曲線も描画できる。ベクトル場を表示させて大域的な様子を把握したり、数値解を表で出力することも可能である。さすがに非線形方程式の解析解を求めることはできないが、それでも数値解の表示や、それをもとにした解曲線は描画することができる。

定型的な微分方程式では解き方自体は容易である。所与の初期条件や境界条件をもとに必要な係数を定めて解を確定できたとしても、そのグラフ上の振る舞いこそが工学では重要である。微分方程式の解法からグラフ描画までの一連のことが、手軽な電卓で可能に

なっていることの意義は大きい。学生が数学や専門科目の内容を理解してその先に思考を進める上で、この機器は大きな助けになるのではないだろうか。

このような電卓の利用に関しては、学生が考えなくなるのではないかと懸念がよく聞かれる。しかし、「分きたい」と最も切実に思っているのは学生自身であることを忘れてはならない。学生は「分かるためのツール」として利用するだろう。試験時にも使用せれば、従来は計算量が多くて出題できなかったような問題も出題できることになる。

むしろ、計算は積極的に電卓側に任せれば、従来よりも思考を問う問題を多く出題できることになる。そのような問題は計算の仕方や計算の意味を理解しないと考えることすらできない。この電卓の使用を認めた試験では、問題の出題のあり方自体を大きく変更する必要が出てくるだろう。単に公式を覚えているかどうか、その公式にあてはめた計算ができるかどうかを問うような問題はあまり意味がなくなる。それらの式を使いこなして、その先の思考を問う問題の出題が可能になる。学生が考えなくなるというのは、杞憂に過ぎないのではないと思われる。必要な公式を覚えているかどうか、あるいは自力での計算ができるかどうかを確かめたいときは、この電卓の持込みを認めない試験を行えば済むだけのことではないだろうか。

すでに、電気工学や機械工学に関する定型的なケースを集めて、必要とするモデル式を選択して条件値を入力すれば結果を返してくれるアプリケーションもフリーで公開されている^{6), 7)}。電気工学では700以上、機械工学では1000以上のモデル式が登録されている。図4は、ME*Pro（機械工学）の表示例である。

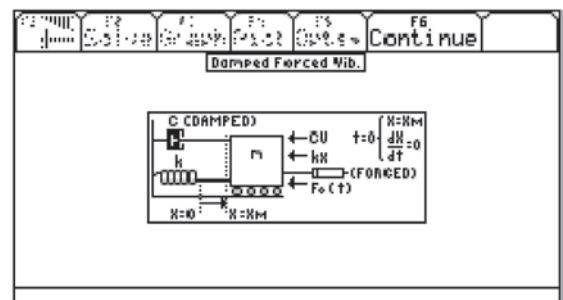


図4 ME*Proの表示画面例

なお、福井大学工学部の機械工学科では、この電卓（voyage200）の機能に注目して新入生に購入させ、実際の講義でも利用し始めた。線形制御の解析・設計用のライブラリを自主開発するなどして、学生実験でも使用されている⁸⁾。

5. 創造的思考ツールとしての利用

工学で現れる関数や方程式は、係数も複雑で解も簡単な数とは限らない場合が多い。しかし、数式処理のできる電卓が身近にあれば、パソコンを起動することなく手軽に結果を確認できる。何かを考えているとき

「何時でも・何処でも」計算結果を確認できることの利点は大きい。その結果を受けて、「では、こういう場合はどうなるだろうか?」と、その先に思考を進めることができる。学生に何らかのテーマを与えて、数式処理やグラフ機能を多用させて思考を促した場合、学生によっては相当高度のところまで到達できるのではないと思われる。

著者は高専の数学教員であるが、「自由研究」として、ときどき数式処理電卓を利用した課題を学生に与えている。数学に関するテーマではあるが、電卓を操作すれば成績下位の学生でも解答可能な内容としている。出題側としては単に基本的な性質に「自分で気づくこと」をねらったものであるが、提出されたレポートを見ると、出題者の予想以上の内容が提出されることも多い⁹⁾。以下に、幾つかの例を紹介する。

(例1) $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ のグラフ

高専1年生に、3次関数のグラフの形状と a, b, c との関係について考察させる課題を出した。 a, b, c の値を具体的に定めてグラフを表示させれば、成績下位の学生でもある程度の性質には気づくことができる。その中で、ある1年生は、グラフ機能の他に自力の計算も交えて考察することにより、次の結論に至った。

$$A = \frac{a+b+c}{3}, B = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3}$$

とおくと、この関数のグラフは、 $y = x^3 - Bx$ のグラフを、 x 軸方向に A 、 y 軸方向に $A^3 - AB - abc$ だけ平行移動したものである。」

この学生は、この関数の変曲点や極値の座標を文字式で表現することにも成功している。1年生なので微分法はまだ学んでいない。グラフ機能と手計算でいろいろな類推を行い、その真偽を電卓で確かめる。そして、さらに次の思考に進むことを繰り返してこの結果を得ている。事後の感想では、「自由研究は、やっているうちにどんどん面白くなってきて、めちゃくちゃ頑張りました。」と書いている。

(例2) $(x+1)^n$ の展開

高専1年の夏季休業の課題として、この展開式の係数と次数 n との間の関係について考察する課題を出した。その時点で、二項定理についてはまだ学んでいない。数式処理の展開(expand)の機能を利用して、いろいろな n について展開式を表示させれば(降べきの順に表示される)、成績下位の学生でもある程度の事には気づくことができる。ある学生は、この係数の現れ方の規則性として次のことに気づいた。

「左から数えて k 番目の項の係数とその項の次数を掛けて k で割ると、その次の項の係数になる。」

この学生は、二項定理の係数の規則性を完全に把握したことになる。例えば、 $(x+1)^n$ の展開式の2番目

の項は nx^{n-1} であるが、この学生によれば、3番目の項の係数は、 $n \cdot (n-1)/2$ となる。以下、同様のことを繰り返せば、全ての係数を計算することができる。

数学について「○○について考察せよ」という問題は、これまで成績上位の学生に対してしか出題することはできなかった。しかし、数式処理やグラフ機能を利用させれば、数学に関して「このような場合はどうなるか?」という試行錯誤を成績下位の学生に対しても行わせることができる。これらの例は、そのような試行錯誤を通じて、予備知識の十分ではない学生でも、一般性のある規則性に十分気づくことができることを示唆している。

この自由研究の後で、その感想を学生に書かせてみた。その記述内容を大まかに分類すると、次のような結果になる。168名中142名の回答である。

表1 自由研究に対する学生の感想

(1) 楽しかった・面白かった	35.9%
(2) 勉強になった・理解が深まった	15.5%
(3) 大変だが、面白かった・勉強になった	23.2%
(4) 分からなかった	19.0%
(5) その他	6.3%

表1を見ると、数学の問題に関して考察する課題であるにも関わらず、(1)~(3)を併せると7割以上の学生が、結果としては「面白かった・勉強になった」と回答していることに、むしろ出題した著者の方が驚かされた。この回答結果に、成績による差は現れていない。事後のアンケートで「自由研究は面白かったかどうか」を問うても同様であり、図5に示すとおり成績による差は現れていない。通常の問題と異なり、いろいろ試行錯誤をして自分で気づく体験をしたことで、このような結果になったのではないと思われる。

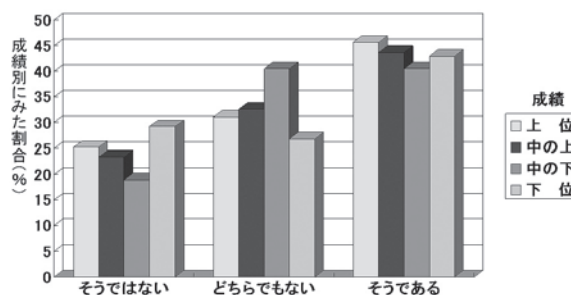


図5 自由研究は面白かった

同様のことを、工学専門への導入として、工学で現れる関数や数式を考察させて、何らかの工学的な性質について考えさせることはできないだろうか。この電卓は数式処理を含むプログラム(TI-BASIC)も可能であり、プログラムを通してシミュレーションすることもできる。いろいろな試行錯誤を通して何らかの気づきを得たときの喜びは、通常の問題を解いた時とは異なるものがあるであろう。そのような気づきは、工学を学習する上においても、強い動機付けになるので

はないだろうか。

6. プログラミング教育での利用

この数式処理電卓では、構造化言語 (TI-BASIC) によるプログラミングが可能である。CやFortranなどのプログラミング言語を習得済みの場合は、この電卓のプログラムは容易である。例えば、表2に示すような命令語がある。

表2 TI-BASICの命令語

If-EndIf, While-EndWhile, For-EndFor,
Loop-EndLoop, Goto, Lbl, Exit, Cycle, Local

代入や変数値の置き換えは、通常は「 $x = x + 1$ 」のような書式であるが、この電卓では「 $x + 1 \rightarrow x$ 」という書式になる。プログラム初心者には、この書式の方が分かりやすいのではないだろうか。さらに、いろいろな数式処理のコマンドをプログラムに組み込めるので、通常のプログラム言語よりは強力であるといえる。

ここで取り上げている電卓 (voyage200) はフルキーボードを備えている。電卓上でプログラムを組むことも容易であるが、行数が長いときは、やはりパソコン側で作成して電卓に転送する方が効率的である。パソコンとの接続用ソフトウェア (TI Connect) がフリーで提供されている。

しかし、この電卓のプログラムになじみすぎることは本来習得しなければならないCなどの言語を習得する上で妨げになるかもしれない。また、込み入ったプログラムを作成しようとするとはBASICでは限界があるかもしれない。そのような場合は、電卓用の実行ファイルをパソコン上のCで作成するアプリケーション (SDK: Software Development Kits) が提供され

ている。それを利用すると、電卓用のプログラムをCで作成することができ、アセンブリプログラム (この電卓のCPUはモトローラ68000) も組み込むことができる。作成したプログラムが電卓側で正常に動くかどうかは、パソコン上で簡単にシミュレートでき、正常動作を確認した上で実行ファイルを電卓に転送することになる。SDKのマニュアルは約1400ページあり、膨大なライブラリが用意されている。なお、シミュレート画面では旧機種 (TI-92Plus) の画面が表示されるが、voyage200とは互換性があるので動作上の問題はない。

このSDKを利用すると、普通のCのプログラム演習として、「電卓側で指定された機能を持つ実行ファイルを作れ」という課題を出すこともできるだろう。それは、本来のCのプログラム学習と何ら矛盾するものではない。ただし、その場合は、SDKのライブラリの内容について事前に説明しておく必要がある。

図6はSDKにすでに用意されている「Hello」プログラム、図7はそのシミュレート画面である。このプログラムを作成後、図7のパソコン上の電卓に転送して電卓側で「hello ()」と打ち込むと、(パソコンに表示されている) 電卓の液晶画面に、このようなダイアログが表示される。

7. 英語の学習ツールとしての利用

日本語表記がなされた数式処理可能な電卓は、日本では販売されていない。したがって、メニューやエラーは全て英文で表示される。単純な英文なので、大学生であれば理解に苦しむことはないと思われる。

ここで取り上げている電卓 (voyage200) には、選択式問題の提示ツールである「Study Cards」という

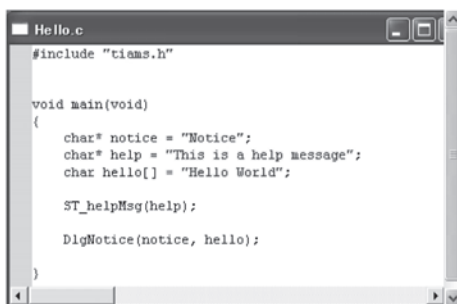


図6 SDKによる「Hello」プログラム

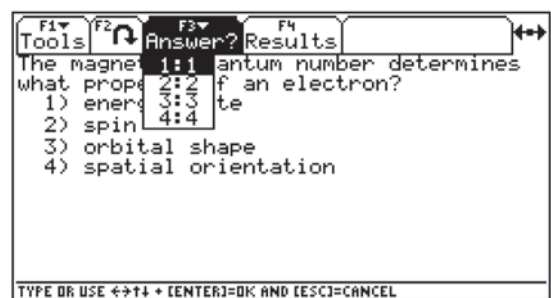


図8 Study Cardの問題例



図7 TI-92Plusのシミュレート画面

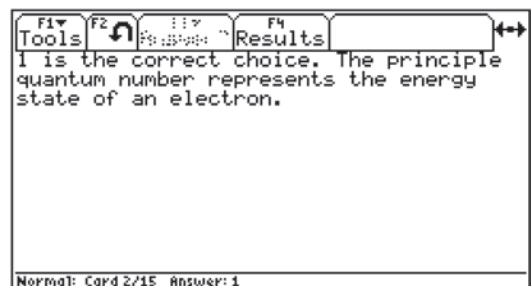


図9 Study Cardの解答画面例

アプリケーションが標準添付されている。そこで提示する問題はパソコン上で作成でき、問題作成ソフト「Card Creator」がフリーで提供されている。所定の書式を満たしていれば、表計算ソフト（エクセル等）で作成した内容をカットアンドペーストしてもよい。

例えば、図8はサンプルで提供されているサイエンスに関する問題である。問題文が長いときは幾つかの画面に分けて表示され、画像を貼り付けることもできる。選択肢の数や問題のレベルは問題作成者が指定でき、選択肢の表示画面も幾つかに分割表示できる。解答する番号はプルダウンメニューから選択する。図9のように、正解の場合は解説文が表示され、その内容も作成者が自分で作成できる。問題のレベル順に出題したり、シャッフルしてランダムに出題することもできる。

正解表示に併せて解説文も表示できるので、各問題に細かい解説文（英文）を付加すれば、英語による自主学習教材としての利用が可能である。数学の問題のみならず、専門科目での英語表現や術語の学習ツールとしても利用できるだろう。TOEICなど英語の問題演習としても利用できる。また、選択肢を設けた問題としなくても、いろいろな基礎事項や重要事項に対する、英文の解説集として利用することもできるだろう。

8. おわりに

数式処理のできる電卓が、導入教育や基礎教育、工学系専門科目での利用、プログラミング教育、さらには英語教育にいたるまで幅広く利用できることを述べてきた。同じことはパソコン上のアプリケーションでも可能であり、パソコンの方が機能も豊富で表示もカラフルである。しかし、それを利用するには各種のソフトウェアを用意した上でパソコンの前に座らなければならない、思いついたときに「何時でも・何処でも」というわけにはいかない。パソコン用ソフトウェアと比較して電卓側の機能に劣る面はあるが、電卓はハンドヘルドであるがゆえに、思い立ったときに「何時でも・何処でも」さまざまな利用の仕方ができる。低学力者の理解の補助としても、上位学生の創造的思考を援助するためにも利用できる。特に、数式処理の機能は、論文購読の効率化に繋がることも期待される。

ただし、単に学生に所持させて放置した場合は、電卓に頼って考えなくなる学生が出てくることも懸念される。その使用の仕方については十分な指導が必要と思われる。また、このような電卓の使用を認めた試験問題のあり方についても検討が必要になるだろう。数式処理可能な電卓の使用を認めた試験では、問題の内容や質を大きく転換することが必要になる。従前の試験問題は大幅に作り直すことになるが、教育の質の改善を図るためには必要な転換と思われる。

関数電卓が出現して、三角関数や対数関数の値は

キーを押すだけで済むようになった。数式処理のできる電卓は10年以上前に出現しているが、このような機能を持つ電卓の存在すら、未だによく知られていないのが実情である。理工系の教育において、この電卓の必要性は疑いようが無い。教育の中でどのように生かしていくべきなのか、早急な検討が必要とされているのではないだろうか。

なお、本研究の一部は、平成19～21年度科学研究費補助金・基盤研究（C）課題番号19500769（研究代表者：梅野善雄）の支援を受けている。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 梅野善雄：数式処理電卓は工学教育に何をもたらすか？, 工学教育, 48-4, pp.9-15, 2000
- 2) 梅野善雄：数式処理電卓の応数・応物での利用例案と予想される教育効果, 工学教育, 50-1, pp.22-27, 2002
- 3) 各電卓の詳細は、下記URLを参照されたい。
<http://www.casio.com/products/>
<http://www.naoco.com/>
<http://www.hp.com/country/us/en/#Product>
 参照日：いずれも、2009-9-9
- 4) 遠藤銀朗：大学工学教育における導入教育の必要性と役割, 工学教育, 57-1, pp.24-29, 2009
- 5) 青木克比古：自主的・自発的な工学基礎教育の学習支援の効果とこれからの展開, 工学教育, 57-3, pp.44-49, 2009
- 6) EE*Pro guidebook for TI-89/TI-92Plus
http://education.ti.com/downloads/guidebooks/apps/89ee_pro/eeepro.pdf, 参照日：2009-9-9
- 7) ME*Pro guidebook for TI-89/TI-92Plus
http://education.ti.com/downloads/guidebooks/apps/89me_pro/dvmeopro.pdf, 参照日：2009-9-9
- 8) 川谷亮治, 高田直人：学生実験におけるグラフ電卓の活用, 工学教育, 55-2, pp.43-47, 2007
- 9) 梅野善雄：高専における数式処理電卓を利用した数学教育, 数式処理, 15-2, pp.39-47, 2008

著 者 紹 介



梅野 善雄

1974年東北大学大学院理学研究科修士課程修了
 2001年一関工業高等専門学校一般教科教授。テクノロジーを活用した数学教育の研究に従事。日本数学教育学会、日本工学教育協会などに所属。2001年に日本工学教育協会賞（論文論説賞）受賞